LA VITALITAT DE

per Sanders MacLane

La recerca actual en la matemàtica implica una àmplia varietat d'idees noves i velles que s'entrellacen entre si. Per exemple, els resultats obtinguts a les corbes i les superfícies definides per equacions policròmiques, igual que en la geometria algebraica, han sorgit de l'estudi d'ones solitàries i també de les teories físiques de Gauge. Han estat resoltes ara qüestions que s'havien arrossegat durant segles en la teoria dels nombres, mentre d'altres s'han revelat com insolubles. La classificació de tots els grups simples finits està gairebé realitzada (i el seu tractament complet serà copiós); la representació dels grups ajuda a l'estudi de la simetria. Aquests desenvolupaments i molts d'altres donen testimoni de la vitalitat de la matemàtica.

S.Mac Lane és professor de servei distingit Max Mason de matemàtiques a la Universitat de Chicago, Chicago, Illinois 60637. El seu article fou publicat amb el títol *Mathematics* a "Science", vol. 209, pàgs. 104-110, el 4 de juliol del 1980.

8 DISSABTE

Avui dia, la recerca matemàtica activa és una complexa varietat de camps i subcamps[1] que s'entrellacen. Alguns d'aquests camps es van establir fa molt temps i són relativament concrets, com la geometria, la teoria dels nombres o les equacions diferencials. D'altres són nous i aparentment abstractes, com l'anàlisi funcional o la teoria K en l'àlgebra. Gairebé en totes aquestes qüestions tenim actualment una gran varietat de treballs molt interessants, alguns connectats molt íntimament amb les aplicacions, com en el cas de la teoria dels sistemes lineals. Altres camps actius com la geometria algebraica semblen haver estat traslladats lluny de les aplicacions. Malgrat tot, apareixen connexions sorprenents entre diferents qüestions, com en el recent descobriment que nocions de la geometria algebraica poden ésser usades per a resoldre equacions diferencials parcials no lineals (els solitons) i a les teories de Gauge, les quals són ara d'interès central en la física teòrica (en relació amb els instantons i les equacions de Yang-Mills). Interaccions similars, igual de sorprenents, tenen lloc entre branques molt diferents de la matemàtica pura —com queda il·lustrat al debat de la conjuctura de Smith de més endavant o pels exemples a *Mathematics Today.*[2]

Aquests darrers anys han vist un progrés extraordinari en matemàtiques, tant si ho mesurem per la gran quantitat de qüestions famoses que han quedat resoltes[2,3] o pel nombre remarcable de nous conceptes que s'han desenvolupat. Primerament, donaré alguns exemples de vells problemes que s'han resolt i de conceptes que s'han desenvolupat. Després, provaré de donar exemples més detallats d'alguns dels camps nous de la recerca matemàtica.

Els problemes matemàtics surten naturalment, però poden arribar a ésser molt recalcitrants i de vegades literalment insolubles. Així, les sèries de Fourier han estat usades per a descriure fenòmens periòdics durant uns dos-cents anys. El teorema de la convergència bàsica per a aquestes sèries va ésser conjecturat aproximadament el 1910 pel rus N. Luzin, però va ésser establert el 1966 per Carleson[4] (convergència "gairebé a tot arreu" donada una funció L^2).

Als voltants del 1800 Gauss mostrà que els nombres complexos $m + n i$, amb $i = \sqrt{-1}$ i m i n nombres enters, podien ésser descomposts únicament en primaris. Gauss trobà també uns altres vuit casos similars de descomposició única per nombres $m + n\sqrt{-d}$, on d és positiu. Hom va suposar que hi podria haver un altre cas (en total sumarien deu), però Heggner,[5] Baker[6] i Stark[7] varen provar que només hi havia nou casos d'aquest estil. Un problema constant és el de determinar si un nombre tan explícit és irracional (com 2 o 37) o transcendent (com e o π). Recentment hi ha hagut un gran progrés en aquest respecte; per exemple, la famosa funció zeta de Riemann. R. Apéry va reexir el 1978 a demostrar que ζ és irracional.[8]

El problema dels quatre colors aparegué per primer cop fa cent anys; s'assegurava que en qualsevol mapa dels diferents països del món és possible d'acolorir el territori de cada país fent servir com a màxim quatre colors diferents, de tal manera que dos països que es toquin no tinguin mai el mateix color. Nombrosos intents per provar això varen fracassar, però ara Appel i Haken[9] han establert aquest teorema usant un mètode clàssic de tractament amb l'ajut de càlculs massius, unes dues mil configuracions espacials, en un computador.

La geometria ha fet grans passes en la classificació de varietats tancades. En dues dimensions, aquestes varietats són superfícies tancades com l'esfera, el tor (tub interior), la superfície d'un pretzel amb dos forats, tres forats, etc.. De fet, es pot provar que aquesta llista és una classificació completa de les superfícies de dues cares. La classificació de superfícies pertany a la topologia (la geometria del simplement continu). Una classificació que correspongués a les varietats de dimensions més altes era un complet misteri. Ara, usant un conjunt de tècniques algebraiques i geomètriques (una de les quals es diu "cirurgia"), s'ha pogut fer un progrés considerable en aconseguir alguns nivells d'aquesta classificació, i hi ha hagut sorprenents nous resultats per a varietats de dimensió 3. Així i tot, per a varietats de dimensió 4 encara resten dificultats especials.[10]

La multiplicació pot ésser no commutativa, com en les molt familiars fórmules $i^2 = j^2 = -l$, $ij = -ji = k$ per la multiplicació dels quatre elements bàsics l,i,j,k dels quaternions. Aquestes fórmules van ésser generalitzades (els anys 30) per poder definir unes certes àlgebres de "producte encreuat" amb més elements bàsics. S'esperava que cada àlgebra apropiada (la que és central i simple sobre un camp) podia ésser presentada com una àlgebra de producte encreuat. Gràcies a Amitsur[11] ara sabem que això és fals.

Els quaternions tenen invers, així que formen una àlgebra de divisió. El famós teorema que afirma que les àlgebres de divisió amb més de quatre unitats no existeixen ha estat, molt recentment, il·luminat per profunds resultats en la topologia sobre l'invariant de Hopf.[12]

La geometria que es va veure limitada a tres

LES MATEMÀTIQUES

dimensions, ara s'estén a espais amb un nombre infinit de dimensions, com els espais de Hilbert usats en la mecànica quàntica. Altres exemples poden ésser els espais d'infinites dimensions de Banach que sorgeixen en l'estudi de les propietats de les funcions. Totes les funcions f d'un tipus donat, cada una d'elles amb la seva norma $\|f\|$, formen el que se'n diu un espai de Banach. S'esperava que cada espai tingués una base (un conjunt infinit apropiat d'eixos coordenats). Ara sabem que això no és cert,[13] però els operadors dels espais de Banach continuen essent molt útils en l'anàlisi funcional.

En l'àlgebra, un sistema de nombres o altres objectes amb una operació d'addició de "bon comportament" és anomenat grup abelià –per exemple, els grups abelians dels nombres enters i dels nombres reals. Un grup abelià que tingui una base es diu que és lliure. J.H.C. Whitehead tenia una conjectura versemblant d'una bona propietat que hauria de caracteritzar aquests grups lliures (en cada extensió amb nucli el grup additiu dels enters és partit"). Ara, gràcies a S. Shelah, resulta que aquesta hipòtesi pot ésser certa o falsa al mateix temps.[14] En un model de la teoria de conjunts és certa, i en un altre, falsa. Més en general, altres problemes famosos com la hipòtesi contínua no tenen una solució definida o són insolubles. Els anys seixanta, als nens de pàrvuls se'ls ensenyava a base de conjunts la forma d'entendre la nova matemàtica. Avui reconeixem que els conjunts són només una forma de formular una base per a les matemàtiques, des que existeix un apropament alternatiu efectiu per categories (topoi elementals),com se'ns mostra a la nota [15].

Ara retornarem a la consideració d'algunes de les noves i actives branques de la matemàtica i d'alguns dels nous conceptes que han fet canviar la nostra manera de procedir. Per exemple, en comptes de trobar funcions per a satisfer equacions diferencials, avui dia es considera més efectiu buscar solucions que siguin "distribucions" o funcions generalitzades. Els operadors diferencials representats per aquestes equacions s'han estès a ésser operadors pseudodiferencials amb unes propietats més flexibles. La transformació de Fourier s'utilitza sistemàticament per a simplificar equacions; en casos pràctics es veu suplementada per la transformació de Fourier ràpida, que es deu originalment a Gauss i s'ha redescobert molt recentment.[16]

Quan es va descobrir el càlcul, l'operació de la deferenciació ens era descrita en termes de quantitats reals infinitesimals; consegüentment, eren repudiades perquè no es consideraven prou rigoroses. Ara, això ja no passa. Actualment, hi ha models "no estàndards" [17] dels nombres reals que tracten el càlcul com si es tractés d'infinitesimals autèntics. Aquests models es construeixen amb tècniques que inclouen la lògica matemàtica; també es poden desenvolupar models alternatius partint d'idees geomètriques en relació amb els punts "infinitament propers" sobre una varietat.[18]

Aquestes són només algunes mostres de la varietat de nous camps. Per tractar d'aquesta varietat, assajaré de descriure amb més detall alguns aspectes de la recerca matemàtica: l'estudi de la simetria a partir dels grups, el procés de com representar un ojecte matemàtic (un grup, per exemple) a través d'un altre (per exemple, un grup de transformacions), varietats, el contrast entre local i global, l'ús d'aquestes idees a la física de partícules, el progrés de l'anàlisi i el nou concepte d'ones solitàries. Aquests punts no pretenen cobrir tots aquests nous camps de la matemàtica pura o tots els recents avenços remarcables en la matemàtica aplicada i en la ciència del computador.

GRUPS I SIMETRIA

La simetria es pot analitzar matemàticament en termes de grups. Per exemple, un triangle equilàter té sis simetries –tres rotacions al voltant del seu centre, amb angles de 120°, 240° i 360°, respectivament, més tres simetries aixals, cada una segons les tres altures del triangle. Una operació mixta, una d'aquestes simetries seguida d'una altra, és també una simetria, per tant, una de les sis. Les sis simetries, d'aquesta manera, formen un grup sota l'operació de composició (multiplicació). Aquí la composició d'una simetria s amb una simetria t s'escriu $s.t$ i significa t seguit de s.

A l'icosaedre, un sòlid de costats iguals, amb 12 vèrtexs i 20 cares triangulars, cinc de les quals es troben a cada vèrtex, hom troba una sèrie més gran de simetries. Per comptar-les, s'ha de seleccionar un vèrtex qualsevol V. Com que tots els vèrtexs són iguals, hi ha una simetria que porta V a qualsevol dels 12 vèrtexs V'. Un cop allà, es pot fer rotar l'icosaedre al voltant d'aquest vèrtex, de manera que es pugui portar qualsevol cara a qualsevol de les cinc cares del vèrtex; així, tot el que se'ns diu en V són $12 \times 5 = 60$ simetries rotacionals. (Poden ésser representades apropiadament com les permutacions parelles de cinc nombres). Altre cop, la composició de dues simetries (una darrera l'altra) és una simetria, de manera que les simetries rotacionals formen un grup de 60 elements.

Més generalment, un grup G és qualsevol conjunt d'elements s, t,... que poden ésser multiplicats per donar productes st i satisfer totes les regles de la multiplicació de nombres excepte la llei commutativa –això és perquè $s.t.$ no té perquè correspondre a t.s. Quan un grup és finit, com en els exemples de més amunt, el nombre d'elements de G es diu l'ordre de G. També hi ha molts grups infinits molt importants, com el grup de totes les rotacions sobre l'origen de l'espai tridimensional. D'aquest grup infinit se'n diu grup de Lie (que representa un grup continu) perquè cada rotació té rotacions molt properes. Es coneix un sistema per a classificar tots els possibles grups de Lie simples –i és molt usat.

Un progrés remarcable s'ha fet recentment en la teoria de grups. Encara no podem descriure tots els grups finits possibles, però som a prop de descobrir tots els grups finits simples. Un grup G es diu simple si no pot ésser col·lapsat a dintre d'un grup H més petit que aquest; traçant cada element de G amb un element de H, els productes tracen els productes. Per exemple, el grup d'un triangle no és simple perquè pot ésser col·lapsat en un grup amb solament dos elements, ± 1, enviant s a -1 si s gira el triangle, i a $+1$ si deixa el triangle tal com està. (Així, les simetries respecte a les altures són les que giren el triangle). Per una altra banda es pot provar que el grup de l'icosaedre és simple.

Des de fa temps hom disposa d'una llista considerable de grups finits simples. Per cada nombre primer p, les p rotacions d'una roda amb p radis formen un grup simple. Per cada nombre enter $n \geqslant 5$ hi ha un grup simple d'ordre $n/2$, que consisteix en totes les permutacions parelles de n objectes; per a $n = 5$, és el grup de l'icosaedre. Adaptant alguns grups de Lie familiars des dels nombres reals usuals a un nombre apropiat finit de sistemes, es pot construir sistemàticament una llista de grups finits simples del que se'n diu el tipus de Lie. Però això no és tot; més enllà d'aquestes llistes sistemàtiques hi ha un mínim de 24 altres grups finits simples, anomenats grups esporàdics. Un grup d'aquests d'ordre 7920 va ésser descobert per H. Mathieu el 1861; aviat en va trobar quatre més. No se'n varen trobar més fins als darrers quinze anys, quan es descobriren de sobte 19 grups més, començant l'any 1965 amb el grup de Z.

Janko de 175.560 elements. Se sospita que n'existeixen més. Un d'ells és anomenat el "monstre" de Fischer-Griess, i deu tenir un ordre de 8.10^{53}. Més exactament, el seu ordre seria el producte dels següents nombres primers:

$$2^{46}.3^{20}.5^{9}.7^{6}.11^{2}.13^{3}.17.19.23.29.41.47.59.71.$$

Aquest febrer passat ens va arribar la notícia (de R.L. Griess júnior) que aquest grup havia estat construït amb càlculs fets a mà i no amb l'ajuda de computadors, com ha estat el cas d'altres grups simples esporàdics que s'han trobat prèviament.

Un grup molt vigorós de matemàtics alemanys, britànics i americans ha estat treballant per mostrar que aquesta llista de grups finits simples és completa. La prova d'aquest resultat ha estat molt curosament perfilada,[19] i tots els teoremes parcials que es troben ara en estudi. Quan tot estigui complet, la prova total ocuparà unes dues mil planes de meticulosos arguments matemàtics. Aquesta és una prova a una escala mai vista per a un sol resultat.

L'elaborada determinació de tots els grups finits simples, encara que sigui un gran treball, no és més que un punt de partida per a altres qüestions. Una d'elles és la de determinar explícitament com els grups simples es poden ajuntar entre ells per formar un altre grup finit. (Una part d'això es troba en el problema dels grups d'extensió). Els grups simples tenen també misterioses connexions amb la teoria dels nombres. Aquí, algunes qüestions, aparentment només sobre nombres enters, es poden abordar millor amb mètodes analítics, com els que es varen desenvolupar al llarg del segle dinou. L'estudi de funcions el·líptiques va portar a una certa funció el·líptica modular J molt útil, expressada en termes d'una variable $q = e^{2\pi i r}$ de la manera següent:

$$J(q) = \frac{(1 + 240\,q + \ldots)^3}{q\left(\prod_1^{\infty}[1 - q^n]^{24}\right)}$$

Això té el desenvolupament en sèrie de potències:

$$J(q) = 1/q + 744 + 196.884\,q + 21.493.760\,q^2 + \ldots$$

Noteu el coeficient 196.884. El grup monstre mencionat anteriorment pot ésser descrit com un grup de transformació lineal en un vector espai de dimensió 196.883. El fet curiós que aquesta dimensió + 1 sigui el coeficient de q de més amunt no és pas una coincidència. Els matemàtics ara van pel camí de donar-hi una explicació i de relacionar les connexions entre el grup monstre i la teoria dels nombres.

REPRESENTACIÓ DE GRUPS

Un comprensió més profunda de l'estructura dels grups depèn sovint de la seva representació per transformacions. Això comporta una transformació bijectiva d'un vector espai en ell mateix, per reflexió o per rotació en l'espai. Cada transformació d'aquesta mena en un espai de *n* dimensions pot ésser expressada com una matriu n x n de nombres (reals, complexos, elements d'un sistema finit de nombres). Així, una representació d'un grup G és un procés que reemplaça cada element s de G per una matriu S n x n (o la transformació corresponent) de manera que el producte st d'un grup d'elements és representat per un producte matricial ST. És important simplificar qualsevol d'aquestes representacions en d'altres de més simples (simplificant cada matriu n x n en blocs quadrats més petits). Les representacions més simples, aquelles que ja no es poden simplificar més, s'anomenen irreduïbles. Cada una d'aquestes representacions irreduïbles és resumida pel seu caràcter, el qual és la funció que dóna per a cada grup d'elements la suma dels termes diagonals de la matriu representada. Aquestes representacions i caràcters, per tota la varietat de sistemes de nombres, pot ésser determinada per tots els grups finits, i jugar un paper important en la descripció dels grups especials, com pot ésser el monstre de què abans s'ha tractat.

Els grups infinits poden tenir una estructura contínua que pot ésser "limitada" (tècnicament, pels grups compactes de Lie). També poden ésser analitzats per representacions, especialment per rotacions (això és, transformacions unitàries), fent servir altre cop caràcters. En molts casos importants, la geometria implicada por ésser descrita purament algebraicament en termes d'una àlgebra anomenada de Lie. S'ha descobert (i es descobrirà) molt sobre l'estructura d'aquestes àlgebres. Fins molt més grans grups infinits, com els grups de tots els moviments rígids (sobretot les translacions) o el grup de Poincaré de la teoria de la relativitat, tenen representacions importants que han estat analitzades, començant pel treball d'E. Wigner el 1939. Aquests grups requereixen representacions en espais d'infinites dimensions (espais de Hilbert) i apareixen a la mecànica quàntica i enlloc de la física (el "camí de vuit parts").

Més recentment, Harish-Chandra ha fet un estudi de representacions d'infinites dimensions de grups arbitraris de Lie semisimples en termes de traçats (caràcters generalitzats) i distribucions (funcions generalitzades). Aquesta feina és connectada molt fortament amb problemes d'anàlisi, en una subtil generalització de la forma com les funcions trigonomètriques ordinàries proveeixen representacions del grup de Lie de totes les rotacions θ d'un cercle ordinari; aquestes representacions envien cada angle de rotació θ a: $\cos 2n\theta + i \sin 2n\theta = e^{2in\theta}$, com a l'anàlisi de Fourier usada per a l'estudi de funcions periòdiques. En una llarga sèrie de papers, Harish-Chandra[20] ha completat aquesta anàlisi harmònica en un teorema que inclou "autodistribucions invariants", representat per caràcters apropiats, i proveint, c m en el cas dels grups finits, una composició apropiada en caràcters irreduïbles. Hi ha profundes connexions amb la teoria dels nombres ("formes automòrfiques") que han estat explorades durant l'última dècada per R.P. Langlands i d'altres.[20] Es preveu que es continuarà treballant en aquestes connexions almenys fins al proper segle.

VARIETATS I TOPOLOGIA

La geometria contínua (això és: la topologia) ha fet i farà un progrés extensiu amb subtils mètodes algebraics i profunds resultats sobre varietats. Una varietat topològica pot ésser descrita com petites peces d'un espai euclidià enganxades les unes amb les altres (per exemple, un tor és un tub interior apedaçat). Quan les peces són enganxades juntes per mapes lineals, del resultat se'n diu una varietat lineal formada per peces. Similarment, un enganxament distingible dóna una varietat distingible. Per exemple, una esfera ordinària pot constar de diverses lúnules (o de dos hemisferis sobreposats) ajuntades; totes dues formes donen la mateixa estructura distingible en aquesta esfera de dues dimensions.

Una famosa conjectura que no es va poder demostrar en molt de temps, la de Hauptvermutung, deia que qualsevol varietat lineal formada per peces ha de tenir essencialment una triangulació única (un enganxament lineal). Molt recentment, D. Sullivan va provar que això era cert per a una classe de varietats molt gran. Kirby i Siebenmann[21] varen provar que quasi totes les varietats topològiques poden ésser triangulades,[22] però també varen trobar exemples en els quals no era possible aquesta triangulació. Les varietats distingibles despertaren l'interès general quan J.W. Milnor descobrí el fet sorprenent que l'esfera ordinària de set dimensions tenia més d'una d'aquestes estructures distingibles. La classificació de les varietats definia propietats qualitatives simples, com el fet d'ésser mesurades per nombres, com el nombre de peces connectades. Ara els mesuraments de la connectivitat són fets per invariants algebraiques molt més subtils, capaces de fer distincions molt més clares i de donar invariància sota les deformacions (o homotopia).

Les noves idees de la teoria de categories van ésser inventades per descriure aquest procés de mapar un camp, com és la topologia, amb un altre, com l'àlgebra, i aquesta teoria s'ha convertit ara en una qüestió molt interessant per si mateixa.

Potser l'aspecte més xocant de la topologia és la forma tan efectiva amb què les tècniques geomètriques i algebraiques han estat usades per a passar problemes de classificació en la teoria de les varietats a problemes en la teoria homotòpica i resoldre després aquests últims per mitjà de l'ús de les invariants de l'àlgebra topològica. Els procediments usats il·lustren un tret fonamental comú a gran part de la matemàtica moderna, des de la geometria algebraica fins a l'anàlisi funcional. El temps, altre cop, i per problemes específics i concrets que s'han plantejat, ha portat els matemàtics a inventar teories molt abstractes i que van molt lluny, teories d'una gran profunditat i bellesa, amb aplicacions que es troben molt lluny dels problemes originals que les motivaren. Per raons de brevetat i accés puc dedicar poca atenció en aquest article a moltes de les àrees més centrals i madures de la matemàtica, precisament perquè la seva maduració ha necessitat tantes idees i tècniques abstractes, totes elles molt poderoses i gens fàcil de resumir.

GEOMETRIA LOCAL I GLOBAL

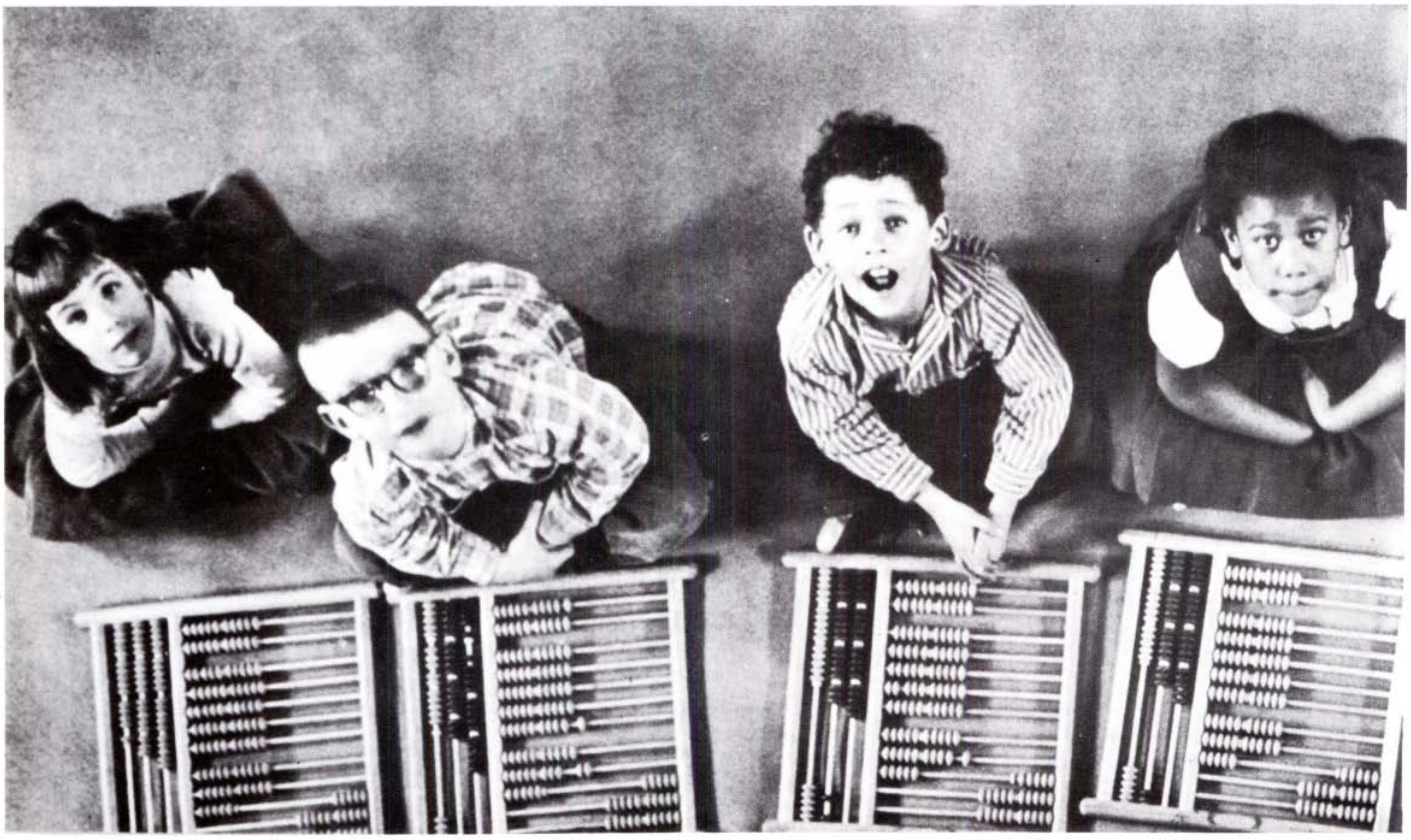
La geometria diferencial és la branca de les matemàtiques en la qual el càlcul és usat per a la comprensió de propietats geomètriques (curvatura...) de corbes i superfícies. Un progrés molt recent en la geometria diferencial ha depès d'una interacció entre les propietats locals i globals. Una propietat local d'una superfície és la que pot ésser calculada en un punt de la superfície usant només propietats de l'entorn d'aquell punt, com pot ésser, per exemple, per coordenades vàlides a prop d'aquell punt. La curvatura gaussiana d'una superfície en un punt és una de les propietats locals: pot ésser mesurada en termes de les sumes dels angles de triangles petits a prop del punt; té la propietat remarcable que depèn solament d'angles i distàncies mesurades en la mateixa superfície, i no en la manera en la qual la superfície es veu situada en el seu espai ambient.

La característica d'Euler d'un polígon és un exemple d'una propietat local. Sigui V el nombre de vèrtexs, E el nombre d'arestes i F el nombre de cares del poliedre; així, per a un tetraedre, $V = 4$, $E = 6$ i $F = 4$, mentre que per a un cub, $V = 8$, $E = 12$ i $F = 6$. En els dos casos $V - E + F = 2$; la mateixa equació val per a un octaedre o per a qualsevol subdivisió poligonal (regular o no) d'una figura com la superfície d'una esfera. Per a una superfície tancada diferent, com pot ésser la d'un tor, qualsevol subdivisió de la superfície en triangles o polígons dóna una suma diferent, $V - E + F = 0$, amb la mateixa resposta, sense que importi quina subdivisió és fa. Per a qualsevol superfície S la quantitat corresponent $V - E + F = \chi(S)$ és un nombre enter que depèn solament de la superfície S i no de la forma en què la superfície pot ésser dividida en vèrtexs, arestes i cares; $\chi(S)$ s'anomena característica d'Euler de la superfície. És una propietat global de la superfície, perquè depèn de la forma com tota la superfície es comporta.

Un problema típic de la geometria diferencial és el de Gauss-Bonnet, el qual afirma que la curvatura gaussiana de la superfície, quan s'integra sobre tota la superfície S, sempre dóna el resultat $2\pi\,\chi(S)$. Això és una relació típica entre una invariant local (la curvatura en cada punt) i una global (la característica d'Euler). Aquests darrers anys han ajudat a una millor comprensió de la prova d'aquest teorema, la seva generalització i les seves conseqüències. Una conseqüència simple és que "no pots pentinar els cabells d'una bola de billar, però ho pots fer en un tor". Específicament, és possible col·locar fàcilment una tangent que no sigui igual a zero a cada punt de la superfície del tor, la qual varia contínuament amb el punt; però això no es pot fer en una esfera, on qualsevol camp de vectors tangent pot tenir almenys una singularitat (vegeu el remolí de cabells del clatell humà). S'ha dedicat a la geometria diferencial força feina molt subtil per estendre aquests resultats a les possibilitats d'altres camps de vectors en altres superfícies i a varietats de dimensions més elevades. Per exemple, els anys 1944 i 1945, Chern[23] va estendre el teorema de Gauss-Bonnet a varietats riemannianes d'una dimensió arbitrària i va desenvolupar conseqüentment les classes característiques resultants (com $\chi(S)$) com a invariants globals d'aquestes varietats. Això, ara té repercussions en l'estudi de les formes de subdivisió de les varietats en fulles (una foliació).

La geometria geodèsica proveeix un altre exemple sorprenent de la interrelació de les propietats locals i globals. Una corba C en una superfície és geodèsica si dóna les distàncies més curtes; això és, si el camí al llarg de C des d'un punt p a C fins a un altre punt q a C és el camí més curt possible, en la superfície des de p fins a q, donat un p i un q que no són gaire lluny l'un de l'altre. Així, en una esfera ordinària, cada cercle màxim és geodèsic. Els geòmetres havien mostrat les geodèsiques de manera explícita en moltes superfícies especials. El desig natural de voler comprendre i saber més va portar, a través de la tasca de Poincaré, Birkhoff, Morse, Lusternik-Schnirelmann i d'altres, a un teorema d'existència general que diu que, donada una superfície convexa tancada, sempre existeixen almenys tres geodèsiques simples i tancades diferents. Un exemple degut a Morse havia indicat ja que tres és el nombre més possible en aquest resultat. Klingenberg[24] i d'altres han estès aquests resultats de les superfícies a dimensions més grans.

Aquests problemes sobre geodèsia signifiquen que s'ha de trobar una corba d'amplitud mínima. Altres problemes mínims anàlegs han estat codificats en el càlcul de variacions ("varia la corba fins que estiguis segur que tens l'amplitud mínima"). Així, per a una funció $f(x_1, \ldots, x_n)$ sabem, com en el càlcul, que al mínim de f totes les derivades parcials $\partial f / \partial x_i$ s'esfumaran; en el màxim passarà exactament el mateix. Més generalment, un punt $(x_1, \ldots, x_n)$ on totes aquestes primeres derivades parcials s'esfumen, s'anomena el punt crític de la funció f; pot ésser un mínim de f, un màxim de f, o un punt mitjà, com en el cas tan familiar del punt en la part més alta d'un pas muntanyós, quan $f(x,y)$ es mesura sobre el nivell del mar. Per a una funció de *n* variables hi ha $n + 1$ tipus d'aquests punts crítics. Quan el nombre de punts crítics de cada tipus per a una funció donada és comptat, resulta que aquests han de satisfer un



cert nombre de relacions especials, com va descobrir Marston Morse els anys 1920. La teoria de Morse que resultà per a punts crítics ha jugat un paper important en la construcció de geodèsics (punts crítics per a la funció que donen la llargada d'una corba) i en la classificació de varietats de més altes dimensions, usant els punts crítics de funcions que poden ésser definits dintre de les varietats.[25]

Quan s'estén una capa de sabó en una anella de filferro, la capa forma una superfície amb l'àrea mínima possible (per al límit de l'anella donada). D'aquesta superfície se'n diu una superfície mínima: com a superfície d'àrea mínima és anàloga en dues dimensions a una geodèsica (corba de llargada mínima); hi ha situacions anàlogues en més dimensions. El problema de Plateau demanava provar el teorema que diu que sempre existeix una superfície mínima per al límit d'una anella donada de qualsevol forma, només mentre sigui rectificable (té una llargada). Aquest teorema central va ésser provat per primer cop els anys trenta d'aquest segle per Jesse Douglas i Tibor Radó. Les seves solucions, però, no excloïen superfícies que poguessin tenir singularitats com són els punts d'embrancament. Aquesta possibilitat ha estat eliminada en un estudi més recent fet per Osserman,[26] que va mostrar que els punts d'embrancament no són presents.

Una superfície mínima també pot ésser descrita com una solució d'una certa equació en derivades parcials (no lineal) (EDP, com abreviació). L'estudi d'aquestes EDP és un tema molt vast en el qual, ens en podem vanar, hi ha hagut un progrés molt considerable recentment. El tema exigeix l'ús de molts i molt recents teoremes d'existència, mostrant que EDP apropiades tenen solucions per a valors de contorn apropiats. Hi ha també un teorema de no-existència molt notable degut a Lewy.[27] Aquest darrer mostrà una EDP lineal en tres variables independents que tenien coeficients suaus, però amb solucions no suaus —el truc era que el terme constant era suau (tenia derivades de tots els ordres) però no era analític. Aquest exemple tan sorprenent ha estimulat una recerca més profunda en L. Hörmander i d'altres, en teoremes d'existència per a EDP.

Algunes qüestions d'aquest tipus impliquen una geometria complexa, és a dir, es tracta sempre d'una geometria d'un nombre parell de dimensions reals, ja que cada nombre complex $z = x + iy$ inclou dues coordenades reals x i y. Més en general, considerem un espai de dimensió $2n$: C^n, amb coordenades donades per n nombres complexos, i siguin D_1 i D_2 dos conjunts de comportament normal en l'espai (tècnicament, suaus i de domini estrictament convexos).

Un problema fonamental és determinar si D_1 i D_2 són equivalents en el sentit apropiat, a través d'una funció F que traça D_1 sobre D_2, essent F i la seva inversa funcions de comportament normal (és a dir, analítica en el pla complex). Tot depèn de com sigui el comportament

de F a mesura que ens acostem als límits de D_1. Vormeer mostrà que F és necessàriament contínua prop dels límits, i llavors Fefferman[28] demostrà que la funció és suau en tot el camí fins al límit. Fefferman utilitzà la funció de Bergman KD per a aquest domini, que depèn de dos punts variables en el domini. Aquest resultat, per altra banda, va poder ésser usat per a aconseguir informació sobre la solució de certes EDP de Monge-Ampere que apareixen en geometria.

GEOMETRIA I FÍSICA DE PARTÍCULES ELEMENTALS

Un dels desenvolupaments més interessants en física d'altes energies en aquesta dècada passada ha estat l'emergència gradual de teories que han portat alguna mena d'ordre al reialme de les partícules elementals. Actualment, es creu molt àmpliament que les anomenades teories de Gauge proveiran una explicació satisfactòria als fenòmens experimentals observats, inclosa la diversitat de partícules fonamentals com són l'electró, el protó, el neutró i els mesons. Les teories de Gauge són matemàticament sofisticades i aporten un bon nombre d'idees clau en les quals els matemàtics han treballat, bastant independentment, durant moltes dècades. Com a resultat, aquests desenvolupaments han portat, en aquests últims anys, a una interacció creixent entre els matemàtics i els físics teòrics.

Des dels dies dels treballs d'Einstein en la relativitat general, fa cosa de seixanta anys que no hi havia hagut tanta activitat a la frontera entre la matemàtica i la física. De fet, la relativitat general, la qual interpreta el camp gravitacional com una curvatura en l'espai-temps, es pot dir que ella mateixa és una teoria de Gauge, i també ho és la teoria de l'electromagnetisme de Maxwell. En aquesta teoria el camp electromagnètic també pot ésser vist com una corba, no una corba d'espai-temps però una corba d'algun espai de fase fictici. Per veure això, imaginem que a cada punt d'espai-temps col·loquem un disc circular marcat amb graus. Per uniformar aquests discs, imaginem un observador que es mou des d'un punt a l'altre, portant el disc amb ell. La interpretació geomètrica de la teoria de Maxwell diu que si un observador agafés un camí diferent, el seu disc mostraria una lectura diferent al final, i la desviació depèn de la intensitat del camp electromagnètic de la regió travessada.

En les teories de Gauge modernes les altres forces involucrades en els nuclis s'interpreten d'una manera semblant al fet de causar curvatures o distorsió. De tota manera, la fase angular mesurada per un disc s'ha reemplaçat per una fase multidimensional descrita, no per una rotació plana, sinó per una rotació en un espai de tres o més dimensions. Com que les rotacions en més dimensions no commuten (això és, els resultats depenen de l'ordre en el qual es fan les rotacions), la matemàtica és molt més complicada; en particular, el camp de les equacions es torna no lineal (equacions diferencials). Resoldre aquestes equacions és ara un problema molt seriós. S'han aconseguit alguns èxits en aquest sentit, usant les tècniques matemàtiques modernes tretes d'àrees insospitades, com la geometria algebraica.

S'han trobat idees topològiques que juguen un paper molt significatiu en aquestes teories no lineals. Això es pot entendre en termes de divulgació de la següent manera: Les equacions lineals són en principi molt fàcils de resoldre, mentre que les equacions no lineals es poden resoldre de manera aproximada comparant-les amb les equacions lineals així com una corba pot ésser aproximada per una tangent. De tota manera, aquestes aproximacions són inherentment locals —això és, només funcionen en una petita regió. Els arguments topològics són una forma molt valuosa d'obtenir informació global a partir de dades locals.

Actualment, és clar que moltes idees geomètriques i tècniques s'utilitzaran en l'imminent desenvolupament de teories de Gauge.[29] Un problema important que ens resta és el de comprendre la teoria quàntica dels camps de Gauge. Això és essencial per a la física perquè tractem de fenòmens a distàncies molt curtes (o el que és el mateix, a molt altes energies), i l'aparell matemàtic per a poder tractar satisfactòriament de camps de Gauge quantitzats està encara naixent. Resta un problema desafiant per al futur i que probablement requerirà la unió de les forces dels matemàtics i dels físics.

ONES SOLITÀRIES

Un exemple de la recerca en matemàtica aplicada és el ràpid progrés en ones solitàries. Aquestes ones es varen detectar per primer cop l'any 1840 per Scott Russell en el canal d'Edimburg-Glasgow, on va veure una sola ona amb una cresta molt llarga baixant pel canal sense canviar de forma durant una milla i mitja. Primer no es va saber com obtenir aquestes formes d'ona a partir de les equacions diferencials parcials estàndard per a les ones d'una superfície d'aigua. Un model adequat d'equació fou trobat per diversos autors, entre els quals D.J. Korteweg i G. de Vried, l'any 1895. Si u és l'altura de l'ona sobre el nivell estàndard d'aigua en el canal, a un temps t i a una distància x del punt de partida, llavors u, com a funció de x i t, satisfà l'equació diferencial parcial de Korteweg - De Vries:

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

en la qual u_t indica la derivada parcial de u respecte a t i u_x respecte a x. Podem explicar aquesta equació model a partir d'un terme bàsic ($u_t + u_x = 0$) que expressa la propagació de l'ona en una sola direcció; més un efecte no lineal $u\,u_x$ i l'efecte de la dispersió donat per u_{xxx}. Això s'aplica, com una bona aproximació, a ones de petita amplitud i corresponentment a una longitud d'ona gran. L'equació té solucions explícites ondulatòries que es propaguen, una per cada amplitud possible, expressada en termes de les secants hiperbòliques. Aquestes solucions especials proveeixen una descripció aproximada de les ones solitàries tal com Scott Russell les va observar. A més a més, l'equació pot ésser usada per a demostrar el que passa quan dues ones solitàries de diferents amplituds es troben: l'ona de més gran amplitud atrapa la més petita; hi ha un període d'aparent i confusa interacció, i llavors l'ona de més gran amplitud ressorgeix sense canviar la forma, seguida de la més petita, sense que aquesta es vegi afectada per la col·lisió.

La mateixa equació de Korteweg-De Vries s'aplica a molts altres fenòmens físics:[30] en magneto-hidrodinàmica, en un plasma fred lliure de col·lisions (C.S. Gardner i H. Morikawa); en ones longitudinals, en un reticulat unidimensional de masses iguals connectades per molles no lineals; en ones de pressió en líquids bombollants; en ones en vares elàstiques i almenys en vint altres fenòmens. Donada aquesta varietat d'aplicacions es necessitaven mètodes més incisius de solucions. El treball en aquest camp va portar a algunes sorpreses. Primer de tot, l'esbarriada de mètodes usats en tractar d'equacions com la de Schrödinger de la mecànica quàntica podien ser aplicats cap enrera. Aquests mètodes tan dispersos depenen de si es troben dades del xoc adequades com els valors propis, l'espectre continu i les densitats espectrals. Perquè l'equació de Korteweg-De Vries enfoca el xoc a la inversa: començant per lleis molt simples de l'evolució temporal de les dades del xoc, recobrem els fets necessaris sobre les solucions u de l'equació original. És usant aquest mètode de dispersió inversa que podem demostrar matemàticament la interacció de dues ones solitàries en diferents solitons, com hem esmentat abans.

A més a més, les invariants físiques usuals per a aquestes equacions —invariants com l'energia i el moment— s'apliquen també aquí, però per a aquesta equació diferencial hi ha un nombre infinit d'invariants diferents. Finalment i més recentment, han aparegut diverses connexions entre l'equació de Korteweg-De Vries i propietats de corbes definides per equacions algebraiques (més exactament, les mateixes corbes amb uns quants punts omesos). Aquesta mena de corbes —i la seva varietat aritmètica i propietats algebraiques— havien estat estudiades des de fa temps en geometria pura; el que és sorprenent és la connexió que hi ha amb les ones a l'aigua. Aquest punt requereix una elucidació més profunda, com una part de la important recerca que s'està portant a terme respecte a l'equació de Korteweg-De Vries. Una part de la recent recerca esmentada ha fet servir les poderoses tècniques de la teoria de la bifurcació per proveir a les ones solitàries solucions per a les equacions diferencials exactes per a ones de superfície.

INTERACCIÓ DE CAMPS DESIGUALS

El progrés recent en la matemàtica depenia en gran mesura de les interaccions entre camps aparentment diferents i remots. Un exemple n'és l'aparició d'idees de la geometria algebraica "pura" en qüestions aplicades sobre les teories de Gauge i sobre l'equació de Korteweg-De Vries, com ja s'ha mencionat abans. Un altre exemple xocant es refereix a la recent demostració de la hipòtesi de Smith sobre les transformacions periòdiques en una esfera tridimensional.

Si l'esfera ordinària S^2 es gira $360°/n$ al voltant del seu eix vertical (nord-sud), la transformació resultant T, repetida n vegades, és simplement la identitat ($T^n = 1$); així, diem que T és periòdic amb un període n. Els únics punts que T deixa fixos són dos, el pol sud i el pol nord; es pot dir que aquests punts constitueixen una esfera S^0 de zero dimensions.

Ara, considerem una esfera tridimensional S^3, donada com l'indret matemàtic de $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Una transformació T de S^3 en ella mateixa és anomenada periòdica si T, repetida *n* vegades per un nombre enter *n*, porta cada punt un altre com a ell mateix ($T^n = 1$). Per exemple, una rotació en un subespai de 3 dimensions (rotació entorn l'eix Z de les coordenades x, y, deixant t fixa) durant 360°/n serà periòdica; aquest cop tots els punts del cercle $z^2 + t^2 = 1$ es deixen fixos. Normalment és veritat que qualsevol transformació diferencial periòdica T sobre aquesta esfera de 3 dimensions, fins i tot si és molt més irregular, deixarà fixos un nombre de punts que formaran una corba simple i tancada (S', la imatge contínua d'un cercle). De tota manera, aquesta corba de punts fixos podria ser nuada (com si féssim un nus). Fa uns trenta anys o més, P.F. Smith va conjecturar que aquesta corba no seria mai nuada. L'any 1979 es va verificar aquesta conjectura −gràcies a l'esforç d'un col·lectiu de mitja dotzena de matemàtics que feien servir diferents tècniques especials des de les superfícies mínimes, i les propietats d'espais tridimensionals que no són euclidians d'una forma hiperbòlica a les propietats dels grups K, una estructura algebraica molt recentment desenvolupada, lligada als espais topològics.

Notem uns quants exemples més d'interaccions entre camps diferents. El càlcul de variacions, una qüestió respectable usada per la geodèsica, superfícies mínimes i similars, ha tingut un renaixement i un nou desenvolupament en la teoria del control òptim. En els últims quaranta anys s'han desenvolupat les idees precises sobre quines funcions són efectivament computables a partir de les concepcions de la lògica simbòlica de K. Gödel; s'ha trobat la seva utilitat en la teoria dels nombres, on subministren una prova que hi ha equacions en nombres enters (equacions diofàntiques) per a les quals no hi ha un mètode sistemàtic de solució. Aquestes idees són també usades en la ciència dels computadors, la informàtica, per a valorar la complexitat d'una computació. Els geòmetres algebraics es passaren vint-i-cinc anys per trobar la solució[31] a una conjectura d'A. Weil sobre els punts "racionals" d'unes certes corbes algebraiques. En resultà també una solució a un vell problema de Ramanujan. Aquest va considerar una certa funció molt útil (n); pot ésser descrita com el coeficient de q^n, que apareix en el desenvolupament $q\,(1-q^n)^{24}$ en la funció el·líptica modular esmentada abans. Ramanujan volia avaluar la mida d'aquesta quantitat, especialment en el cas en el qual *n* és un nombre primer n = p. Era relativament fàcil mostrar que (p) és com a màxim $2p^6$; el sorprenent (i molt més complicat) nou resultat[31] és que (p) és com a màxim $2p^{11/2}$.

Podem trobar el resum dels nous resultats respecte a aquest subjecte en dos volums anuals del "Mathematical Reviews", en què hi va haver l'any 1979 més de quaranta mil articles subdividits en seixanta-una especialitats, passant des de la matemàtica aplicada a l'economia i l'òptica fins a la variable complexa i les equacions diferencials finites. En aquesta alienació de tòpics, l'anàlisi harmònica abstracta (de funcions periòdiques) connecta amb els problemes de la teoria de probabilitats, mentre els conceptes molt generals de la teoria de categories són una ajuda a l'estudi de l'autòmata d'estat finit. La matemàtica presenta una intricada xarxa d'estructures i tècniques detallades i necessàries per a la comprensió analítica dels fenòmens del món.

(S. Mac Lane)

Referències i notes

1. Agraeixo l'ajuda en la preparació d'aquest article a Charles Amick, M.F. Atiyan, Jerry Bona, Felix Browder, Alberto Calderon, S.S. Chern, Irving Kaplansky, Peter May i Paul Sally.

2. L.A. Steen, editor: *Mathematics Today* (Springer Verlag, Nova York, 1978).
3. Vegeu també *Mathematicals Developments arising from Hilbert problems,* dins *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976) vol. 28.
4. L. Carleson: *On convergence and growth of partial sums of Fourier series,* "Acta Math.", núm. 116,135 (1966).
5. K. Heegner: *Diophantische Analyse und Modulfunktionen;* "Math. Z." núm. 56, 227 (1952).
6. A. Baker: *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers* "Mathematika", núm. 13, 204 (1966).
7. H.M. Stark: *There is no tenth complex quadratic field with class number one,* "Proc. Natl. Acad. Sci. USA" núm. 57,216 (1967); *On the grap in a theorem of Heegner,* "J. Number Theory", núm. 1,16 (1969).
8. A. van der Poorten: *A proof that Euler mised... Apéry's proof of the irrationality of*$^{3)}$, "Math, Intell., núm. 1,195 (1979).
9. K. Appel i W. Haken: *Every planar map is four colorable,* "Bull. Am. Math. Soc." núm. 82,711 (1976). Vegeu també l'article d'Appel i Haken en la referència 2.
10. R. Mandelbaum: *Four dimensional topology: An introduction,* "Bull. Am. Math. Soc." núm. 2,1 (1980).
11. S.A. Amitsur: *On central division algebras,* "Isr. J.Math." núm. 12, 408,1972.
12. J.F. Adams: *On the nonexistence of elements of Hopf invariant one,* "Bull. Am. Math. Soc.", núm. 64,279 (1958).
13. P. Enflo: *Recent results in general Banach spaces* dins *Proceedings of the International Congress on Mathematics* (Canadian Mathematics Congress, Vancouver, B.C., 1975) pàgs. 53-57.
14. P.C. Eklof: *Whitehead's problem is undecidable,* "Am. Math. Mon.", núm. 82,775 (1976).
15. F.W. Lawrere, dins *Model Theory and Topoi,* C. Maurer i G.C. Wraith, editors. (Springer-Verlag, Nova York, 1972) pàgs. 1-12.
16. J.W. Cooley i J.W. Tukey: *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series,* "Math. Comput.", núm. 19,257 (1965).
17. A. Robinson: *Non Standard Analysis* (North Holland, Amsterdam, 1966), pàgs. XI i 293.
18. E.J. Dubuc: *C-schemes* (Preprint Series núm. 3, Mathematics Institute, Arthus University, Arthus, Dinamarca, 1979/80).
19. D. Gorenstein: *The classification of finite simple groups,* "Bull. Am. Math. Soc." núm. 1,47 (1979).
20. Harish-Chandra: *Harmonic analysis on real reductive groups, III,* "Ann. Math." núm. 104, 117 (1976). Vegeu també A. Borel i W. Casselman, editors: *Automorphic forms, representations and L-functors,* dins *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979) vol. 33, part 1, pàgs. X i 322.
21. R.C. Kirby i L.C. Siebenmann: *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung,* "Bull. Am. Math. Soc." núm. 75, 742 (1969).
22. R.K. Lashof i M.G. Rothenberg: *On the Hauptvermutung, triangulation of manifolds and h-cobordism,* ibid., núm. 72, 1040 (1966).
23. S.S. Chern: *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds,* "Ann. Math." núm. 45, 747 (1944).
24. W. Klingenberg: *The theorem of the three closed geodesics,* "Bull. Am. Math. Soc." núm. 76, 601 (1965).
25. S. Smale: *What is global analysis?* "Am. Math. Mon." núm. 76, 4 (1969).
26. R. Osserman: *The nonexistence of branch points in the classical solution of Plateau's problem,* "Bull. Am. Math. Soc." núm. 75, 1247 (1969); Vegeu també E. Bombieri: *Recent progress in the theory of minimal surfaces,* "Enseign. Math." núm. 25, 1 (1979).
27. H. Lewy: *An example of a smooth linear partial differential equation without solution,* "Am. Math." núm. 66, 155 (1957).
28. C. Fefferman: *Monge-Ampere equations, the Begman kernel and geometry of pseudoconvex domains,* ibid., núm. 103, 395 (1976).
29. R.O. Wells, Jr.: *Complex manifolds and mathematical physics,* "Bull. Am. Math. Soc." núm. 1, 296 (1979).
30. R.M. Miura: *The Korteweg-de Vries equations: A survey of results,* "SIAM" (Soc. Ind. Appl. Math. rev.) núm. 18, 412 (1976); vegeu també J. Bona: *Solitary waves and other phenomena associated with model equations for long waves,* en prensa.
31. N.M. Katz: *An overview of Deligne's proff of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields (Hilbert problem 8)* dins la referència 2, pàgs 257-306.