Varietats

Mètode abreujat per a la determinació dels símbols de les cares als cristalls [1]

Emprant el mètode de la projecció estereogràfica, hom pot assolir la determinació dels símbols de les cares cristal·lines pel mètode abreujat de V. Dolivo-Dobrovolsky [2]. En aquest treball es dóna a conèixer un mètode encara més general i senzill per a la determinació gràfica dels símbols a base de la projecció gnomònica. Ha d'ésser preferit a l'anterior, en primer lloc, perquè la projecció gnomònica és de més fàcil construcció, i, en segon lloc, l'aproximació assolida emprant línies rectes és major que amb els arcs de cercle utilitzats en la projecció estereogràfica.

Aquest mètode, però, presenta alguns inconvenients, que consisteixen en l'allunyament de determinats punts, per conseqüència de la gran distància polar de les cares que representen. En tot cas, aquests inconvenients poden subsanar-se disminuint l'escala en portar sobre el paper de dibuix els diferents punts de la projecció gnomònica. Utilitzant fulles del format ordinari per als canevas de Fedorov o Vulf (de 10 cm de radi), els punts de la projecció que suposen distàncies polars majors de 51°, queden fora del paper. Si tinguéssim alguna cara la distància polar de la qual voregés els 68°, caldrà dividir en dues parts el radi fonamental del cercle, i en quatre si alguna cara tingués 79° de distància polar. D'aquesta manera, pot assegurar-se que en la major part dels casos serveix la projecció gnomònica, puix que en els cristalls rarament es troba una distància polar major de 79° [3].

* * *

Els punts *P*, *Q*, *R*, *U* i *X* (fig. 1) representen la projecció gnomònica de cinc cares

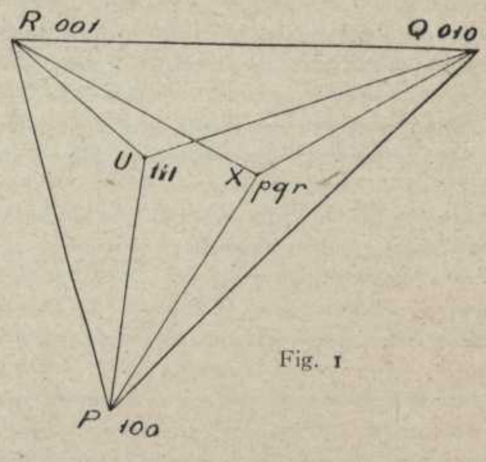

Fig. 1

---

[1] Prof. J. M. Anxeles, de la Universitat de Leningrado. *Memòries de la Societat Mineralògica de Rússia*, t. LIX, 1930, fasc. 1, pàgs. 33-40.

[2] *Anals de l'Institut de Mines de Leningrad*, t. VII, fasc. 3, 1929, pàg. 151.

[3] Si alguna cara tingués una major distància polar, encara que no molta més, en lloc de reduir l'escala és més convenient afegir una fulla de paper i extendre en ella el restant del dibuix.

d'un cristall. Plà de projecció *PQR*, plà del dibuix. Considerarem, en primer lloc, el cas general amb les nombroses qüestions que poden derivar-se. Tracem les rectes que lliguen tres dels cinc punts, p. ex., *P*, *Q* i *R*. Unirem, després, cada un dels dos punts restants, *X* i *U*, amb els tres primers mitjançant les rectes *XP*, *XQ*, *XR* i *UP*, *UQ*, *UR*. Obtindrem, així, sis triangles: *XQR*, *UQR*, *XPR*, *UPR*, *XPQ* i *UPQ*.

El mateix Prof. J. M. ANXELES, en el seu treball "Relació entre els índexs i les coordenades esfèriques de les cares dels cristalls" [1], demostra que la proporció entre les àrees dels esmentats triangles és racional,

$$\frac{\text{àr.}\triangle\, XQR}{\text{àr.}\triangle\, UQR} : \frac{\text{àr.}\triangle\, XPR}{\text{àr.}\triangle\, UPR} : \frac{\text{àr.}\triangle\, XPQ}{\text{àr.}\triangle\, UPQ} = p : q : r \qquad [1]$$

en què p, q i r són números sencers i senzills.

Si *P*, *Q* i *R* fossin les cares fonamentals (100), (010) i (001), *U* la cara unitat (111), tindríem que p, q i r són els índexs de la cara *X*.

En l'esmentada obra hom demostra que la relació es compleix, així mateix, per a qualsevol altra disposició dels punts *P*, *Q*, *R*, *U*, *X* en el cristall. Una relació semblant té lloc entre les arestes.

Pels punts *X* i *U* tirem perpendiculars als costats del triangle *PQR* (fig. 2). Aleshores

$$\frac{XK}{Uk} = \frac{\text{àr.}\triangle\, XQR}{\text{àr.}\triangle\, UQR}$$

ja que en els triangles *XQR* i *UQR* (considerant *QR* com a base comú) la relació entre

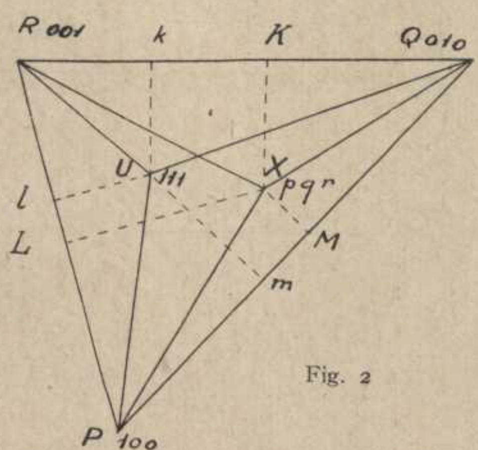

Fig. 2

llurs àrees és proporcional a les altures *XK* i *UK* respectivament.

De la mateixa manera

$$\frac{XL}{Ul} = \frac{\text{àr.}\triangle\, XPR}{\text{àr.}\triangle\, UPR} \quad i \quad \frac{XM}{Um} = \frac{\text{àr.}\triangle\, XPQ}{\text{àr.}\triangle\, UPQ}$$

[1] *Treballs de la Societat de Naturalistes de Leningrad*, t. LV, fasc. 4, pàg. 101.

Substituint aquests valors en l'expressió [1], resulta:

$$\frac{XK}{Uk} : \frac{XL}{Ul} : \frac{XM}{Um} = p : q : r \qquad [2]$$

Tracem, ara, una recta pels punts X i U fins a tallar els costats del triangle PQR (o en la prolongació de dits costats).

A la fig. 3, el punt A està indicat per l'intersecció de la recta XU amb el costat QR, oposat al vèrtex P; el punt B, per la intersecció amb el costat PR, oposat al

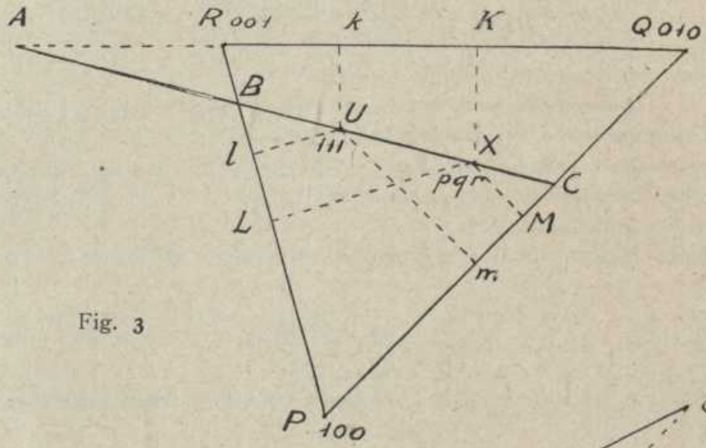

Fig. 3

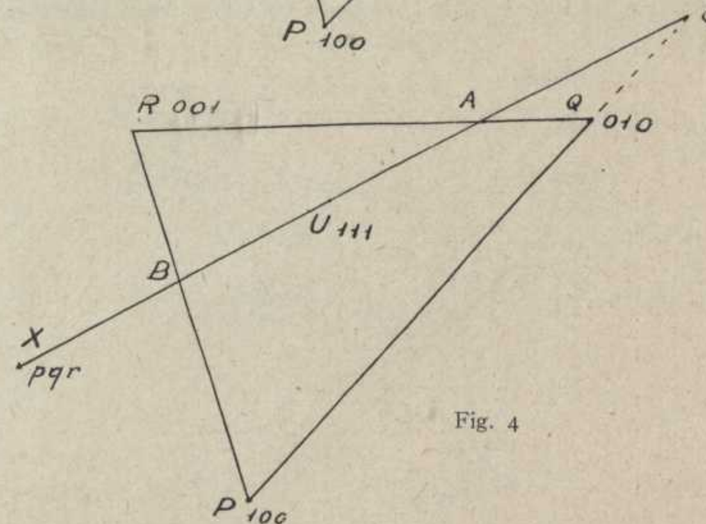

Fig. 4

vèrtex Q; i, per últim, C, en la intersecció amb el costat PQ, oposat a R.

Als triangles XKA i UkA, tenim:

$$\frac{XK}{Uk} = \frac{AX}{AU}$$

De la mateixa manera, als triangles LXB i lUB, com en els triangles MXC i mUC, tenim:

$$\frac{XL}{Ul} = \frac{BX}{BU} \quad \text{i} \quad \frac{XM}{Um} = \frac{CX}{CU}$$

Substituint en [2] els resultats obtinguts:

$$p : q : r = \frac{AX}{AU} : \frac{BX}{BU} : \frac{CX}{CU} \qquad [3]$$

Essent P, Q i R les cares fonamentals (100), (010) i (001), U la cara unitat (111), queda demostrat que p, q, r són els índexs de la cara X. En conseqüència, per a determinar els índexs del complèx cristal·logràfic de la cara X, caldrà traçar una recta pels punts X i U fins a trobar els costats del triangle PQR en els punts A, B i C, mesurar, després, els segments de recta compresos entre aquests punts i els punts X i U i, finalment, prendre la relació de magnitud entre els esmentats segments.

Pot ocórrer que els segments AX i AU tinguin la mateixa direcció i quedin al mateix costat del punt A. Aleshores, la relació és positiva. Però pot donar-se el cas de què, amb coincidència de direcció, estiguin a diferent costat. Si els punts X i U es disposen al mateix costat de B o C, la relació $\frac{BX}{BU}$ o $\frac{CX}{CU}$ és positiva, i si es disposen a diferents costats és negativa. Així, p. ex., per a la posició que el punt X té a la fig. 4, la relació $\frac{BX}{BU}$ serà negativa, i escriurem:

$$p : q : r = \frac{AX}{AU} : - \frac{BX}{BU} : \frac{CX}{CU}$$

Quan la posició de la recta XU sigui tal que talli molt lluny els costats del trian-

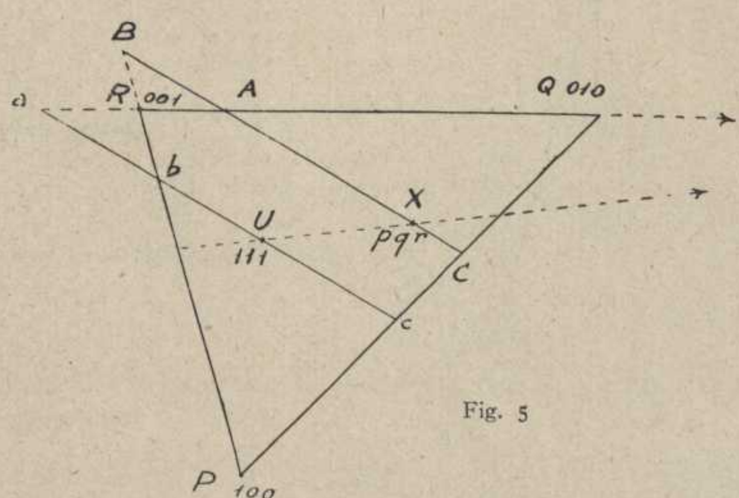

Fig. 5

gle PQR (fig. 5), és més convenient traçar pels punts X i U dues rectes, paral·leles entre elles, de direcció qualsevulla, amb tal que sigui avantatjosa. En la fig. 5, tenim:

$$p : q : r = \frac{AX}{aU} : \frac{BX}{bU} : \frac{CX}{cU} \qquad [3\ a]$$

Hom fa la demostració traçant perpendiculars des dels punts X i U als costats del triangle PQR. Per la semblança dels triangles tenim que la relació $\frac{AX}{aU} : \frac{BX}{bU} : \frac{CX}{cU}$, correspon, en igualtat, a la relació que existeix entre els segments de les perpendiculars traçades dels punts X i U als costats del triangle. La proporció entre aquests segments, segons la fórmula [2], és igual a la relació entre p, q i r.

Quan, accidentalment, en comptes de la cara unitat U (111) tinguem una cara qualsevulla V, de símbol $_pV$, $_qV$, $_rV$, segons es demostra a l'obra ja esmentada, no hi ha alteració de les fórmules si hom substitueix p, q, r, per $\frac{p}{pV}$, $\frac{q}{qV}$, $\frac{r}{rV}$ [5]

Si tinguéssim altres cares en lloc de les fonamentals, hom segueix un procediment semblant exposat a l'obra de V. Dolivo-Dobrovolsky [6].

Examinem ara alguns dels casos més importants:

Una de les cares fonamentals és parallela a l'eix de la projecció. Els punts P, Q, R *estan a una gran distància del centre.*

1.—La cara X es troba entre les cares Q i R (fig. 6); el punt X coincideix amb el punt A i es troba en la recta QR; $AX = O$.

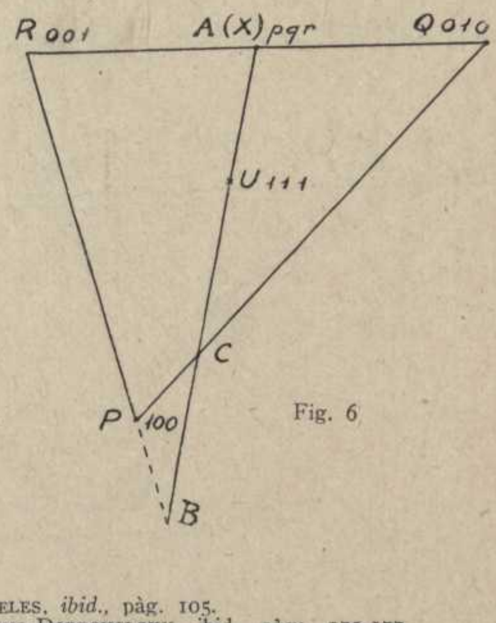

Fig. 6

[5] O. M. Anxeles, *ibid.*, pàg. 105.
[6] V. V. Dolivo-Dobrovolsky, ibid., pàgs. 175-177.

Substituint $AX = O$ en la fòrmula [3], tenim:

$$p : q : r = 0 : \frac{BX}{BU} : \frac{CX}{CU} \qquad [4\,a]$$

De la mateixa manera quan la esmentada cara X pugui trobar-se en PR o en PQ, tindrem:

$$p : q : r = \frac{AX}{AU} : 0 \ \frac{CX}{CU} \qquad [4\,b]$$

$$p : q : r = \frac{AX}{AU} : \frac{BX}{BU} : 0 \qquad [4\,c]$$

2.—La recta XU és paraHela a CR. El punt A està en l'infinit (fig. 7).

$$AX = AU + UX$$

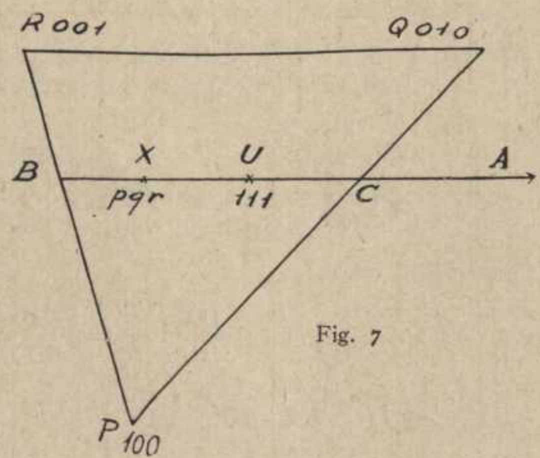

Fig. 7

D'ací hom dedueix:

$$\frac{AX}{AU} = 1 + \frac{UX}{AU} = 1 + \frac{UX}{\infty} = 1$$

Substituint en la fòrmula [3], resulta:

$$p : q : r = 1 : \frac{BX}{BU} : \frac{CX}{CU} \qquad [5\,a]$$

Si la recta XU fos paraHela a PR (essent B a l'infiniti) o a PQ (C a l'infinit), tindrem anàlogament:

$$p : q : r = \frac{AX}{AU} : 1 : \frac{CX}{CU} \qquad [5\,b]$$

$$p : q : r = \frac{AX}{AU} : \frac{BX}{BU} : 1 \qquad [5\,c]$$

3.—La cara X és paral·lela a l'eix de la projecció (vertical). El punt X serà, doncs, infinit (fig. 8) [7].

$$AX = AU + UX$$
$$BX = BU + UX$$
$$CX = UX - (-CU) = CU + UX.$$

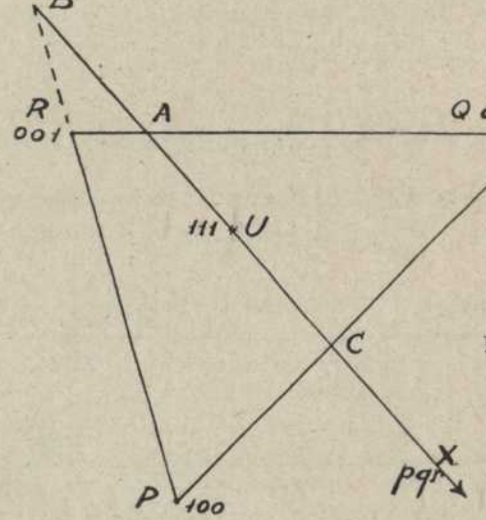

Fig. 8

Substituint en l'equació [3], resulta:

$$p : q : r = \left(1 + \frac{UX}{AU}\right) : \left(1 + \frac{UX}{BU}\right) : \left(1 + \frac{UX}{CU}\right) =$$
$$\left(\frac{1}{UX} + \frac{1}{AU}\right) : \left(\frac{1}{UX} + \frac{1}{BU}\right) : \left(\frac{1}{UX} \mp \frac{1}{CU}\right)$$

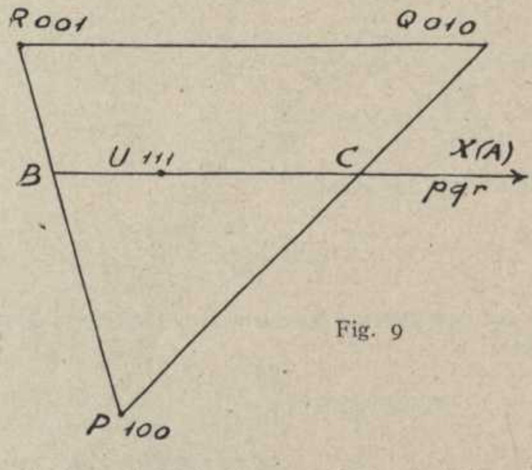

Fig. 9

[7] Al cas de què X sigui infinit, la recta XU coincideix amb el punt U per ésser paral·lela al radi fonamental del cercle de projecció.

Però com X és a l'infinit.

$$p : q : r = \frac{1}{AU} : \frac{1}{BU} : \frac{1}{CU} \qquad [6]$$

4.—Tant X com A són a l'infinit (fig. 9). Substituint en la fórmula [6], tindrem:

$$p : q : r = 0 : \frac{1}{BU} : \frac{1}{CU} \qquad [7\ a]$$

Si X i B o X i C són a l'infinit, tindrem:

$$p : q : r = \frac{1}{AU} : 0 : \frac{1}{CU} \qquad [7\ b]$$

$$p : q : r = \frac{1}{AU} : \frac{1}{BU} : 0 \qquad [7\ c]$$

Una de les cares fonamentals és paral·lela a l'eix de projecció, i com a conseqüència un dels punts P, Q o R es troben a l'infinit (fig. 10)

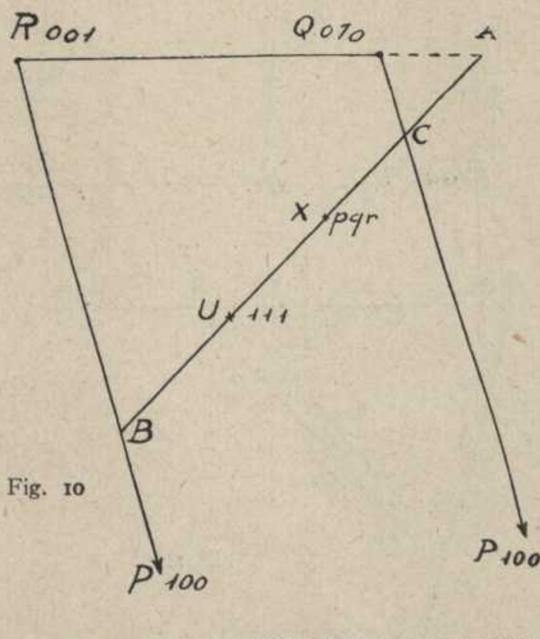

Fig. 10

5.—P és infinit; XU és paral·lela a PQ i PR, i per consegüent B i C són, també, a l'infinit (fig. 11).

Anàlogament que al cas 2, tenim:

$$p : q : r = \frac{AX}{AU} : 1 : 1 \qquad [8\ a]$$

Si Q és a l'infinit, A i C ho són també:

$$p : q : r = 1 : \frac{BX}{BU} : 1 \qquad [8\ b]$$

Si R, A i B fossin a l'infinit:

$$p : q : r = 1 : 1 : \frac{CX}{CU} \qquad [8\ c]$$

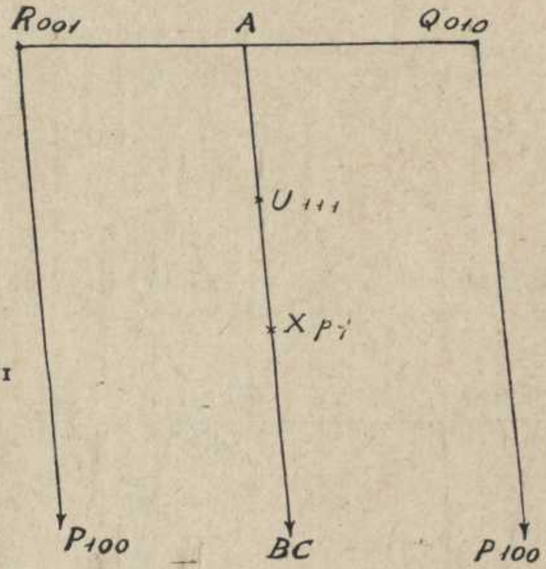

Fig. 11

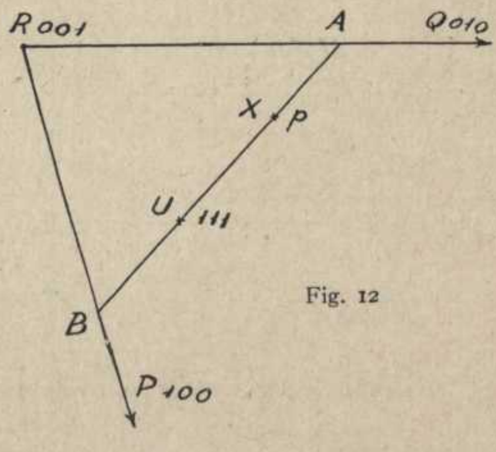

Fig. 12

Dues de les cares fonamentals són paral·leles a l'eix de projecció, i per consegüent, dos dels punts P, Q, R *es troben a l'infinit.*

6.—Siguin P i Q infinits (fig. 12). Cal advertir que aquest cas és el més freqüent a la pràctica. El costat PQ del triangle PQR es troba a l'infinit, i com a conseqüència el punt C és, també, infinit.

Substituint de la mateixa forma que al cas 2 (fórmula [5 c]):

$$p : q : r = \frac{AX}{AU} : \frac{BX}{BU} : 1 \qquad [9]$$

7.—Si la recta XU fos paral·lela a QR, a més de C és també infinit el punt A. Aleshores resulta:

$$p : q : r = 1 : \frac{BX}{BU} : 1 \qquad [10\ a]$$

Si la recta XU fos paral·lela a PR, B i C serien infinits:

$$p : q : r = \frac{AX}{BU} : 1 : 1 \qquad [10\ b]$$

8.—C i X són infinits (fig. 13). Substituint $CX = \infty$ en la fórmula [6], resulta:

$$p : q : r = \frac{1}{AU} : \frac{1}{BU} : 0 \qquad [11]$$

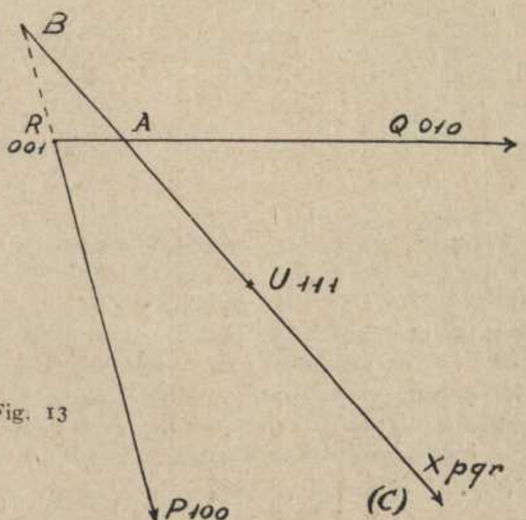

Fig. 13

En el cas que P i R o Q i R siguin infinits, les fórmules que resulten són anàlogues a [9], [10 a], [10 b] i [11]. Únicament cal canviar el lloc del zero.

* * *

Els principis generals que hom dedueix dels casos especials són els següents:

1.—Si un o dos dels tres punts A, B i C es troben a l'infinit, la fracció corresponent de la fórmula [3] és substituïda per l'unitat (casos 2, 5, 6 i 7).

2.—Si el punt X és a l'infinit, el numerador de cada fracció de la fórmula [3] és substituït per la unitat (casos 3, 4 i 8).

3.—Si el punt X coincideix amb un dels punts A, B o C, o dit d'altra manera, si la cara X es troba en zona amb el primer, segon o tercer eix, la corresponent fracció de la fórmula [3], és substituïda per zero (casos 1, 4 i 8).

(Traducció directa del rús per R. CANDEL I VILA.)