DUES SOLUCIONS GRAFIQUES INTERESSANTS

CASUALMENT, ha arribat a la nostra taula d'estudi un interessant escrit en el qual l'autor exposa algunes solucions a altres tants problemes geomètrics que, fins avui, han preocupat força els matemàtics.

Sense fer a les solucions esmentades cap mena de comentari, ens limitarem a exposar-les seguint les normes de llur autor, confiant que de llur estudi els nostres lectors sabran treure'n algun profit.

DUPLICACIÓ DEL CUB

L'origen del problema és el següent:

Els atenesos eren víctimes de tota mena de desgràcies i mals: incendis, fams, guerres, etc., que anihilaren la població. Horroritzats per tota aquesta plaga que els delmava, consultaren l'oracle del Temple d'Apol a Delos, per tal de conèixer què calia fer per a aplacar les ires dels deus; Apol els contestà que havien de construir un temple doble del que tenien en aquell moment. Aquest temple tenia la forma d'un cub. S'apressaren, tot seguit, a la construcció del nou temple doblant les dimensions en els tres sentits i, satisfets de llur obra, esperaren amb no poca impaciència un millorament a la seva dissort.

Les desgràcies es redoblaren en intensitat; consultat novament l'oracle els respongué que havien interpretat falsament els seus desigs i que ço que els havia dit era que el temple a construir fos el doble en volum del que existia.

Tots els savis de l'època treballaren, inútilment, sense obtenir cap resultat afalagador; intervingueren més tard, HIPÒCRATES, ARQUÍMEDES, EUTOCIUS, PAPPUS, DEMÒSTRATES i NICOMEDES amb els mateixos negatius resultats, que, no obstant, foren profitosos per a altres rams de la ciència. Modernament, ho han intentat NEWTON i HUYGENS; però tampoc no han sabut resoldre aquest problema.

Després de veure, doncs, que fins a la data no existia solució possible exacta ni solament aproximada, veiem, ara, amb la senzillesa que planteja el Sr. H. TOULOUSE la qüestió:

Considerem una recta indefinida AD, que forma al punt A un angle de 45° amb l'altra recta AG.

Prenem la distància $AP=1$; aixequem una perpendicular a P que serà PN; a N aixequem una altra perpendicular a la recta AG, que serà NO.

Considerem que el triangle ANO és rectangle i isòsceles; per tant, segons el conegut teorema de PITAGORES

$$\overline{AN}^2=\overline{AP}^2+\overline{PN}^2$$

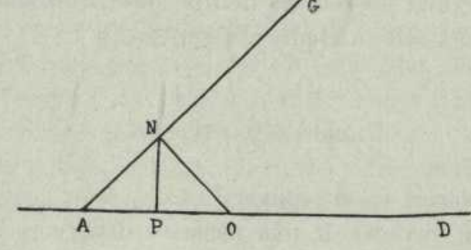

Fig. 1

i com sigui que $AP=PN$ i sabem que $AP=1$ resulta que

$$AP=PN=1$$

i

$$\overline{AN}^2=1^2+1^2$$

o

$$\overline{AN}^2=1+1=2$$

d'on

$$\boxed{AN=\sqrt{2}} \qquad \text{(a)}$$

Recordem bé aquesta valor i anem a un altre concepte.

Sobre una recta indefinida AG aixequem, en un punt qualsevol K, una perpendicular KI d'una llargada també qualsevulla; però que, per al millor control, farem igual a 3.

A partir del punt K i en el sentit KG, prendrem una magnitud igual a AN que serà KE. Unirem I amb E i aixecarem sobre IE una altra perpendicular que tallarà la recta AG al punt A, on farem un angle $GAD=45°$ i allargarem IK fins trobar la recta AD en el punt B.

El triangle AKB és rectangle i isòscels; per tant

$$\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 \quad \text{i com que} \quad AK = BK$$

resulta
$$\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AK}^2$$
$$AB = \sqrt{2\,\overline{AK}^2}$$
$$AB = \sqrt{2} \times AK$$

i recordant que $\sqrt{2} = AN$ (a) podrem substituir el seu valor i queda

$$\boxed{AB = AN \times AK} \qquad \text{(b)}$$

Per altre costat, considerem el triangle AEI en el qual, segons el teorema que diu "l'altura relativa a la hipotenusa és mitja proporcional entre els segments en què divideix a aquesta" tindrem $AK \times KE = \overline{IK}^2$

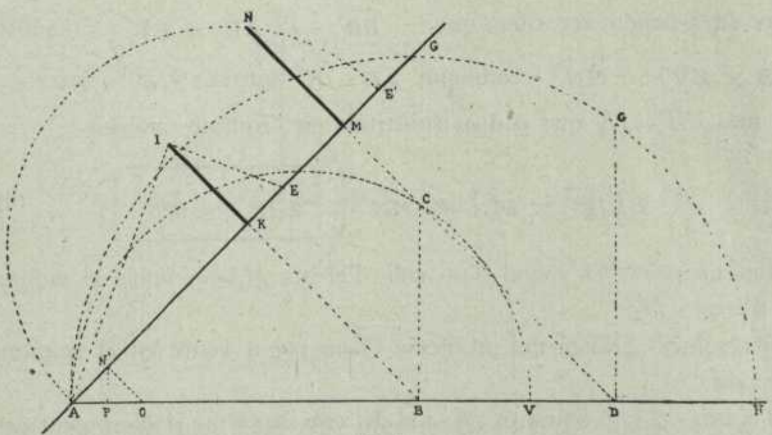

Fig. 2

o també $AK \times AN = \overline{IK}^2$ i segons (b) resulta $AB = \overline{IK}^2$ o també

$$\boxed{IK = \sqrt{AB}} \qquad \text{(c)}$$

A partir de B prenem $BV = IK = 3$ i amb centre $\frac{AV}{2}$ traçarem l'arc AV que trobarà la perpendicular BC en el punt C.

Aleshores, pel teorema exposat anteriorment, tindrem: $AB \times BV = \overline{BC}^2$

Sobre AD, a partir del punt B, prenem $BD=BC$; unim DC i allarguem-lo fins trobar AG en el punt M; a partir de M prenguem una llargada $ME'=AN$; amb diàmetre AE' i centre $\frac{AE'}{2}$ tracem una semi-circumferència que talli la perpendicular MN al punt N.

Sobre AD allargada, prenem una distància $DH=MN$ i amb AH per diàmetre tracem una altra mitja circunferència. Aixequem una perpendicular al punt D fins a trobar la circumferència en G'.

Pels teoremes anteriors tindrem $\overline{G'D}^2 = AD \times DH$ i com que $DH = MN$ i $AD = \overline{MN}^2$ resultarà que $\overline{G'D}^2 = MN \times MN \times MN = \overline{MN}^3$

Ara bé: $G'D = CD$ d'on $\overline{CD}^2 = \overline{MN}^3$ i com que $\overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{BD}^2$ pel consabut teorema de Pitàgores, podem substituir llurs valors i ens quedarà $\overline{CB}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{MN}^3$; però si tenim en compte que $CB=BD$, resulta

$$2\ \overline{CB}^2 = \overline{MN}^3$$

Per altra banda, recordem que $\overline{CB}^2 = AB \times BV$ i substituint $2\,(AB \times BV) = \overline{MN}^3$ i com que $AB = \overline{IK}^2$ queda $2\,(\overline{IK}^2 \times BV) = \overline{MN}^3$

A més, $BV=IK$ que podem substituir en l'equació anterior

$$2\,(\overline{IK}^2 \times IK) = \overline{MN}^3 \qquad \boxed{2\ \overline{IK}^3 = \overline{MN}^3} \qquad \text{(d)}$$

Conseqüència: El volum d'un cub d'aresta MN és doble al volum d'un altre d'aresta IK.

La resolució gràfica del problema l'hem pogut veure en el transcurs de la demostració.

El costat del cub donat és IK, i el del cub de volum doble buscat és MN.

Gràficament, pot resoldre's amb exactitud: teòricament pot demostrar-se com havem vist. Però, numèricament, la solució no pot ésser mai exacta. Fixem-nos en la valor de MN a partir d'IK: de l'anterior igualtat ens queda

$$MN = \sqrt[3]{2} \times IK$$

i si tenim en compte que $\sqrt[3]{2} = 1'259916...$ mai el producte no pot donar un número exacte. Això no obstant, no deixa d'oferir els seus avantatges per a resoldre els casos pràctics que puguin presentar-se.

II

Quadratura del cercle

Sabem que, fins avui dia, no s'ha pogut trobar, encara, numèricament, cap solució exacta a aquest etern problema, car en totes les fórmules que per a assolir-ho puguin emprar-se, ha d'entrar, forçosament, el factor π, que, com sabem, es un número amb la seva part decimal inacabable.

Malgrat això, s'ha cercat de trobar alguna solució gràfica que pugui satisfer els nostres desigs. És la següent:

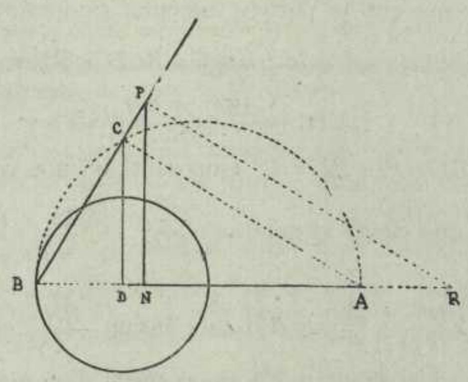

Fig. 3

Sobre una recta indefinida AB, prenem un punt D com a centre d'una circumferència: a partir de D, en direcció contrària, portarem una magnitud DA, igual al desenrrotllament de la meitat d'aquella. Aquesta magnitud és cercada per endavant mitjançant qualsevol dels procediments gràfics sobradament de tots coneguts.

Aleshores, amb $R = \frac{BA}{2}$ tracem una mitja circumferència BCA. En el lloc D, centre de la primera, aixecarem una perpendicular DC fins a trobar-se amb l'altra. Unim B amb C i C amb A.

La perpendicular CD és presa com a costat d'un quadrat que serà exactament, en superfície, equivalent a la del cercle de radi BD. Heus ací la demostració.

Circumferència$=2\ \pi\ R = \pi\ d$, essent $d=2\ R$. En la figura sabem que

$$AD = 1/2 \text{ circ.} = \frac{2\ \pi\ R}{2} = \pi\ R$$

Per un dels teoremes exposats en el primer problema tindrem

$$\overline{CD}^2 = BD \times DA$$

Per principi sabem que $BD = R$ i $DA = \frac{2\ \pi\ R}{2} = \pi\ R$ que podem substituir en la fórmula anterior

$$\overline{CD}^2 = R \times \pi\ R = \pi\ R^2 \qquad \boxed{\overline{CD}^2 = \pi\ R^2}$$

que és ço que ens proposàvem demostrar.

Ara bé; per un punt qualsevol N pres sobre AB, aixequem una perpendicular que trobi BC en el seu allargament P. Al punt P i sobre la línia BC aixequem una perpendicular que trobarà AB en el punt R.

Pel mateix teorema que ja portem esmentat tindrem $\overline{PN}^2 = RN \times BN$ $\frac{BN}{} = \frac{PN}{CD}$ per semblança dels triangles BCD i BPN. D'on resulta que

$$CD = \frac{BD \times PN}{BN}$$

però sabem que BD=R i BN=R' (suposant un nou cercle de radi BN)

$CD = \frac{R \times PN}{R'}$ que elevat al quadrat $\overline{CD}^2 = \frac{R^2 \times \overline{PN}^2}{(R')^2}$ i sabent que

$\overline{CD}^2 = \pi\ R^2$ queda $\frac{\overline{PN}^2 \times R^2}{(R')^2} = \pi\ R^2$ i simplificant $\frac{\overline{PN}^2}{(R')^2} = \pi$ i $\overline{PN}^2 = \pi\ (R')^2$

ço que ens demostra ben clar que PN és el costat d'un quadrat d'àrea exactament igual a la d'un cercle de radi $BN=R'$.

Així podríem seguir cercant altres costats de quadrats equivalents a tants altres cercles de radis R'', R''', etc., i en cadascun d'ells fer la mateixa demostració, amb no menys exactitud. La conseqüència que d'aquest fet podem deduir és ben evident: si d'un punt qualsevol de BC es baixa una perpendicular sobre BA, queden determinades dues rectes, una de les quals és el costat d'un quadrat i l'altra el radi d'un cercle equivalent en superfície.

A. QUINTANA I MARÍ
Enginyer Químic

Tarragona, 1 abril 1930.