L'EXISTÈNCIA DELS INDIVISIBLES TERMINANTS I CONTINUANTS EN EL CONTINU, SEGONS EL P. FRANCESC SUÁREZ

§ I. — OBJECTE DE LA PRESENT DISSERTACIÓ

L'objecte de la present dissertació és l'anàlisi d'una idea continguda en la Disputació Metafísica XL del P. Francesc Suárez, en la secció 5, que porta el títol «*Existeixen en la quantitat contínua punts, línies i superfícies que siguin vertaderes entitats, distintes entre elles i realment diferents del cos en què es consideren?*»

L'explicació dels termes d'aquesta interrogació, feta, no a filòsofs-teòlegs del segle XVII, sinó a filòsofs-matemàtics del segle XX, necessita una manifestació prèvia molt coneguda, que es troba en Poincaré (*Science et Hypothèse*, p. 193, cap. X. *Les théories de la physique moderne*). *Aquestes consideracions* — diu, parlant de la valor metafòrica de les teories — *ens expliquen per què algunes teories, que es creien deixades i definitivament condemnades per l'experiència, reneixen, de sobte, de llurs cendres i comencen nova vida. Elles expressaven relacions veritables: i això no deixava d'ésser, fins que, per una raó o per una altra, havíem cregut que devíem expressar les dites relacions amb un altre llenguatge. Havien, doncs, conservat una espècie de vida latent.* Aquesta afirmació, temperant-la una miqueta, es pot aplicar a la nostra qüestió i a la interrogació de Suárez, que en llenguatge modern pot fer-se així: *¿Existeix connexió racional entre la concepció euclideana-arquimèdica de l'espai i l'existència en ella d'indivisibles punts, línies i superfícies com a entitats reals, distintes entre elles i del cos en què es consideren?*

No hem de tractar ara cap problema criteriològic, encara que la discussió, naturalment, porta a fer-ho. Ens mantindrem en un ordre ideal, propi de les matemàtiques pures; i així, doncs, com en estudiar les teories de Lobatchewski i Riemann, o les més modernes de Klein i Hilbert, fem constar solament la connexió racional dels postulats fonamentals de la Geometria, sense considerar altra valor real que la que prové de la sola i pura raó, així també, prescindint dels sentits i altres fonts de coneixement, considerarem una connexió que, encara que implícitament és continguda en els estudis dels matemàtics moderns que s'han ocupat de la geometria no-arquimèdica, no obstant, prescindint de l'objectivació, no l'he trobada millor expressada i discutida que en el lloc citat de Suárez (α).

§ 2. — ELS INDIVISIBLES

Suposem, doncs, com elements de raciocini els cossos i l'espai que ocupen, intuïtivament considerats. Immediatament se'ns ofereix en cada cos l'existència d'una entitat limitant, que fa que el cos no ocupi tot l'espai considerable; aquesta entitat limitant, intuïtivament considerada, és ço que anomenem *superfície terminant* del cos, i és una sola i determinada per a cada cos. Si del cos en traiem alguna part (la qual és una operació practicable, tanmateix s'admeti la propietat intuïtiva dels cossos afectats de quantitat contínua d'ésser divisibles en parts també contínues), s'obté una altra superfície terminant que pot ésser, en totalitat, diferent de l'anterior, o bé ésser solament distinta inadequadament; si s'admet la possibilitat d'aquest cas com a postulat intuïtiu, llavors les superfícies terminants tenen una part, superficial també, comú, i dues parts diferencials lligades entre si i amb la part comú per un element limitant que, intuïtivament considerat, és ço que anomenem *línia terminant* de qualsevol de les tres superfícies parcials. Una nova divisió ens dóna lloc a la consideració dels *punts terminants* de les línies. I aquests tres elements intuïtius, *punt, línia, superfície,* són ço que Suárez i els altres

(α) Cal tenir en compte dues coses en tota la present discussió: Suárez, com tots els escolàstics del seu temps, no admetia *l'infinit actual* o *in actu,* encara que Sant Tomàs i molts altres afirmaven que no se n'havia demostrat la repugnància o contradicció. Per altra banda En Suárez era molt intuïtiu i objectiu, i, com que la intuïció en l'espai havia fet veure (fins el programa d'Erlangen) a tots els matemàtics l'existència real dels indivisibles en l'extensió, i precisament en nombre infinit actual, perquè existeixen precedentment de tota consideració intel·lectual i de tota divisió realitzada (puix aquesta, per a fer-se, els suposa en l'ordre *ontològic,* encara que per ella es prova l'existència dels indivisibles, i, per tant, el coneixement de la seva existència precedeix el de l'existència dels indivisibles, o sia en l'ordre *lògic*), d'aquí la dificultat de la qüestió per a Suàrez i molts altres del seu temps i més antics o més moderns que han tingut la mateixa opinió que ell. La manera de fugir de la dificultat per a Suárez es pot veure en el § 43 de la discussió; en síntesi és que no repugna una multitud infinita de punts i línies i superfícies, si no arriben a constituir més que un cos finit que els *sentits* ens proven existir realment, i la *intuïció* la dels indivisibles.

Els arguments per a provar la impossibilitat de *l'infinit actual* que usaven els escolàstics, són actualment rebutjats, puix tots suposen el nombre infinit o l'extensió infinita *total* de tal faisó que exclou tot increment possible. Així una barra infinitament llarga, però no infinitament gruixuda, fent-la miques podria omplir l'espai infinit i compendre, per tant, a si mateixa i demés les parts exteriors de l'espai; un nombre infinit actual dividit per mitat ens donaria o dos números finits (i llavors resultaria que la suma de dos números finits podria ésser infinita, la qual cosa és contra la intuïció) o dos números infinits actuals (i això no pot ésser, segons els antics, perquè *no podrien créixer* i, per tant, sumar-se per donar-nos el número anteriorment considerat). Com que no admetien sinó *un* infinit de cada espècie (de número, d'extensió, d'intensitat), d'aquí que els sortís al pas la dificultat que *el tot fóra igual a la part.* Com se sap, els matemàtics moderns, si admeten la possibilitat de l'infinit actual és amb la condició que hi pugui haver distints infinits en cada espècie; i tingui's ben present que aquesta qüestió és molt diferent de la de *la potència dels conjunts,* perquè aquesta es refereix a la discussió de *l'infinit potencial* de diverses espècies (numerable, continu, hipercontinu) que era en aquesta forma desconeguda fins al segle XIX.

filòsofs de l'Escola designen amb el nom genèric d'*indivisibles* i especifiquen amb els d'*absolut, segons dues i segons una dimensió.*

Aquestes operacions intuïtives, tan naturals als que han estudiat les matemàtiques elementals i de les quals la discussió filosòfica profunda i completa data del programa d'Erlangen, va ésser, no obstant, l'objecte d'una discussió vivíssima entre els contemporanis de Suárez, i ell va ésser el que en va donar en aquell temps un anàlisi més acceptable i delicat. La seva opinió era que aitals operacions eren possibles realment, i, per tant, que els indivisibles *punt, línia* i *superfície* tenien existència real, així abans com després de la divisió de la quantitat contínua en què es consideressin; i que, encara que no es poden considerar, ni realment ni idealment, com separades de la mateixa, amb tot es distingeixen d'ella i entre si. Considerem el seu anàlisi, que comentarem conforme al pensament modern. En les conferències he citat dos francesos, perquè llurs obres ja són del domini del públic intel·lectual espanyol i català; no obstant, ja donaré altres més genuïnes i copioses fonts, així antigues, de contemporanis de Suárez, com modernes, que no dubto seran de profit per als que vulguin fer més complets estudis en la matèria.

§ 3. — ARGUMENTS CONTRA L'EXISTÈNCIA DELS INDIVISIBLES

Contra l'existència dels indivisibles oposa Suárez, des del començament del seu anàlisi, vuit arguments.

PRIMER. — El punt no és res positiu, en realitat; per tant, ni la línia ni la superfície, car, si es treu el principi, es treu el principiat, i, si es treu l'indivisible absolut, també el relatiu. Que el punt no és res real i positiu, es veu, perquè el punt o és terminatiu o continuatiu: No pot ésser terminatiu solament (*i Suárez, amb els seus contemporanis, recorre a la intuïció, nosaltres als postulats implícits primaris de la Geometria euclideana en què s'apoiava*), perquè no es pot fingir un punt que no estigui entre parts de línies o superfícies; demés, ¿quina és la necessitat d'aquest punt, i quin el seu efecte en la realitat? Limitar la línia? Si amb la imaginació es prescindeix de tal límit, la línia està amb la mateixa longitud que abans. Ni pot ésser continuatiu, el punt, perquè sempre es pot considerar com a terminatiu de les dues parts d'una línia que per ell passi; si, doncs, les parts es terminen per si mateixes, no hi ha cap necessitat d'un punt terminatiu d'elles i continuatiu de la totalitat.

SEGON. — Si el punt continuatiu és necessari, serà per a unir les parts (*o separar-les, es podria afegir*); però les parts poden unir-se per si mateixes immediatament, com moltes altres coses, i tal com ho farien amb el punt ho poden fer entre si immediatament.

TERCER. — (Argument Aquil·les contra la concepció euclideana-arquimèdica de l'espai, encara en els nostres temps). Si existeixen els punts, existeixen infinits punts en el continu, distints realment entre si; car, si fossin en nombre finit, o la línia es constituiria de sols ells *o tindria parts finites en les quals sola-*

ment es podria dividir, i ambdues coses són impossibles. Per altra banda, no és menys impossible que hi hagi infinits punts en el continu, puix admetre aquesta multitud infinita de punts en el continu porta els mateixos inconvenients que admetre qualsevol altra multitud actualment infinita, perquè, encara que aital multitud estigui connexa a altres parts contínues, no deixa d'ésser actualment infinita en la realitat. — He d'advertir que la major part del comentari de Suárez i el nostre serà sobre aquest argument en què se suposen moltes coses que en els nostres temps s'han analitzat millor.

QUART. — Si els punts continuatius existeixen, són distints de les parts que continuen, puix no hi ha cap raó per a identificar-los amb l'una més que amb l'altra; i amb totes dues no pot ésser, puix són distintes entre si. Si, doncs, els punts es distingeixen de les parts, es podrien treure tots els punts sense treure les parts, i així se seguirien dos absurds: que el continu quedaria dividit amb actual divisió, *i els punts, per altra banda, podrien formar una multitud infinita discreta.* En aquestes darreres paraules denota Suárez que en el seu temps no es tenia clara idea dels conjunts infinits discrets: per exemple, *els numerables*, que es poden ordenar amb un ordre equivalent al de la sèrie natural 1, 2, 3..., n.... Es coneixien les progressions geomètriques decreixents i llur interpretació en l'espai; mes les idees clares i precises en aquesta matèria, proposada en forma general, radiquen en Cantor, que va ésser el primer que va demostrar aquest important teorema en 1873: *El conjunt de punts d'una línia no és numerable* (β).

QUINT. — La mateixa dificultat dels punts amb una línia existeix amb les línies d'una superfície i les superfícies d'un cos; i, demés, se segueix aquesta dificultat especial: que en un cos finit es podria trobar una línia infinita en longitud. Dos mitjans són els que proposa el P. Suárez per a obtenir aquesta línia de longitud infinita: l'un consisteix a formar amb dues rectes paral·leles una graella o reixa infinitament densa en la forma de la figura 1, quan les rectes interposades es toquen com els punts infinits de les dues bases paral·leles; l'altre mitjà és formar una hèlix de pas infinitament petit entre dos punts contigus d'una recta. Aquesta dificultat, encara després del descobriment del càlcul diferencial de Leibnitz, repugna al pensament ma-

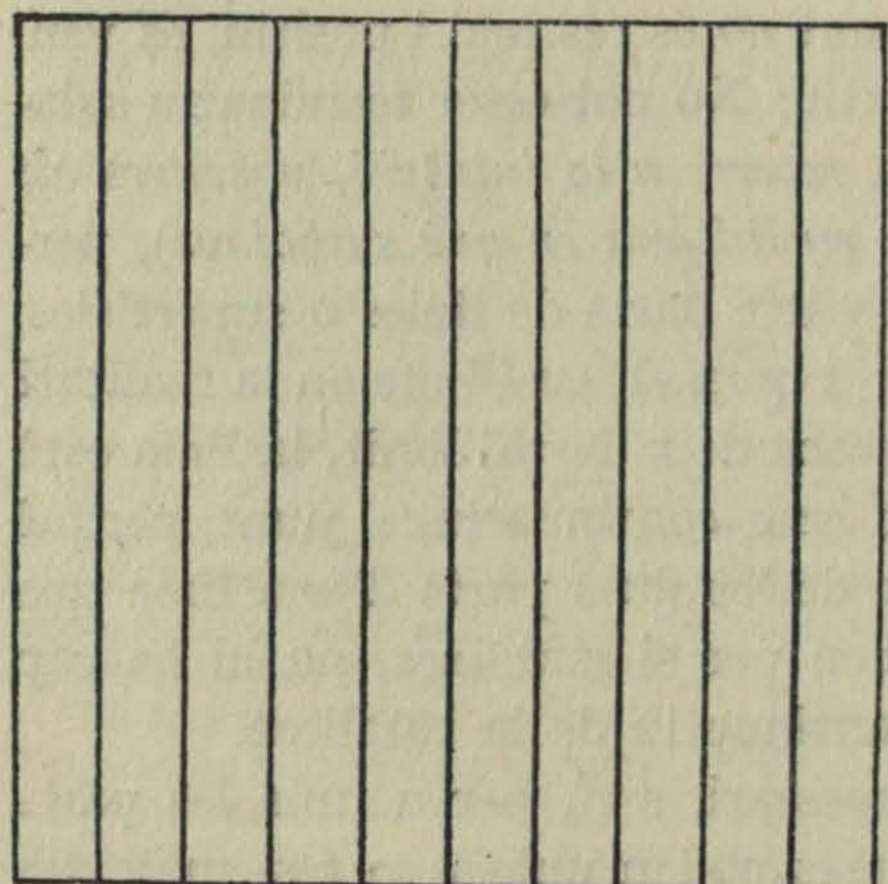

Fig. 1

(β) Liouville ja havia demostrat en 1840 l'existència de números *transcendents* (o sia *no-rels* d'equacions algèbriques), la qual cosa és en substància el teorema de Cantor, en forma distinta.

temàtic. No obstant, tingui's present que, després de Suárez i abans de Leibnitz, un altre jesuïta, el P. Cavalieri, italià, apoiant-se en aquesta mateixa concepció dels indivisibles, va realitzar les primeres integracions, donant així el primer pas en l'explicació general d'aquest problema que omple un segle d'or de les Matemàtiques. La concepció de Cavalieri fou rebutjada, però no la realitat que sota d'ella s'amagava, com dèiem al principi citant Poincaré.

SEXT. — No es pot assignar subjecte adequat del punt; aquest no pot, per tant, existir. La conseqüència no la prova Suárez, puix en el seu temps la noció de substància no havia rebut ni la més lleugera contradicció; segons la consigna, ometem la discussió de la realitat de la substància, puix encara que sembla problema d'ontologia o metafísica, en realitat resulta de criteriologia. Que no es pugui assignar subjecte físic adequat del punt, es vol demostrar perquè aquest subjecte ha d'ésser indivisible com el punt, i, si és substancial, es segueix que hi ha indivisibles substancials, i això sembla contra tota experiència, o intuïció, diriem nosaltres.

SETÈ. — Un punt no pot tocar les parts d'una línia per a continuar-les; perquè, amb què les toca? Si en un altre indivisible, llavors tota la línia es formarà de punts discrets; si en un divisible, es segueix l'absurd que un indivisible pot tocar un divisible, la qual cosa és contra la intuïció matemàtica euclideana-arquimèdica, segons la qual un punt mai toca una línia o una superfície, sinó que o dista d'elles o està sobre d'elles. Si es diu que no toca en res determinat, llavors cau la raó matemàtica (fixeu-vos bé) més forta per a provar l'existència dels punts matemàtics, que és que: *un globus perfectament esfèric toca en un punt a una superfície perfectament plana.* Aquesta raó prova el supòsit que al principi he fet per a limitar l'enunciat de Suárez amb un altra forma, puix aquesta raó suposa que es pot donar un globus perfectament esfèric, i això és una definició, o, en nostre llenguatge més precís, un postulat d'Euclides, així com que es pot donar una superfície perfectament plana (que és un altre postulat d'Euclides) i que poden ésser tangents, ço que es basa en la tangent a un cercle com a límit d'una secant, i això, igualment, en molts teoremes d'Euclides sobre triangles i en el principi d'Arquimedes de la divisibilitat indefinida del cercle. No es cregui, amb això, que estem cometent un cercle viciós; puix ço que es tracta de provar és que aquesta divisibilitat indefinida no porta contradiccions i els arguments contraris a ella que addueix Suárez volen fer veure aquesta contradicció. Abans de veure com respon Suárez a aquests arguments, com estableix la seva teoria, com resol les dificultats que d'ells li provenen i les que porta la seva concepció, seguint el seu anàlisi vegem com esmicola les sentències positives contràries.

Ometem el vuitè argument, perquè es funda en l'autoritat d'Aristòtil, en aquell temps molt venerable per als escolàstics, mes de poc interès ara per a nosaltres. Al final tractarem d'aquesta interpretació.

§ 4. — Les dues solucions extremes oposades

Cinc sentències discuteix Suárez sobre el continu i els seus indivisibles. La primera, dels nominalistes Ockam, Gregori de Rímini i Durand, nega l'existència dels indivisibles de qualsevol classe; per a ells els cossos i totes llurs parts són tridimensionals, i les superfícies, línies i punts ens de raó, resultat de la precisió que fem d'una, de dues o de les tres dimensions, però sense existència real. Els nominalistes poden dir-se, amb tota raó, els predecessors dels geòmetres d'avui dia, puix rebutjaven la necessitat de la geometria euclideana-arquimèdica, que no era sinó una ciència ideal.

La segona sentència, comú a tots els que sense profunditzar han estudiat Matemàtiques, encara en els nostres dies, i també de tots els anteriors a Klein i Poincaré, afirma simplement l'existència real dels indivisibles, malgrat totes les dificultats, que procuraven resoldre amb més o menys claredat. El motiu d'aquest assentiment és la intuïció de l'espai des de Pitàgoras, Plató, Aristòtil, que serví de base a Euclides i Arquímedes, pares de la geometria tradicional. Aquest consentiment l'expressa Suárez amb aquestes paraules: *Tota la ciència geomètrica sembla suposar que hi ha línies i superfícies, de les quals prova moltes propietats, com es pot veure en Euclides.* Com hem dit, Suárez s'inclina a aquesta tendència, i els arguments que dóna per provar-la (ja els hem indicat en la setena objecció) són: que un cos esfèric toca realment i en un sol punt a una superfície plana; que un cos cilíndric toca realment, segons una recta, a un pla; i que dos cossos amb superfícies planes es poden tocar en tota una cara qualsevol de cada un d'ells. Aquests arguments els dóna Suárez com arguments irrebatibles, i vaig a provar que així és, suposades algunes coses que Suàrez i tots els seus contemporanis i posteriors han suposat fins fa quaranta anys.

Primer supòsit. — *Que pot existir un cos perfectament esfèric.* Això és la definició euclideana 14 del llibre XI dels *Elements;* que es pot resoldre en aquestes tres proposicions: *els cossos tenen superfície, la superfície és contínua, i una superfície pot ésser esfèrica.* Les dues primeres proposicions, intuïtivament evidents, no ho són racionalment, i el mateix Suárez, en admetre la probabilitat de l'opinió nominalista, manifesta clarament que sols la intuïció li fa admetre la opinió contrària; la tercera és pròpiament matemàtica, i enclou moltes suposicions derivades, l'anàlisi de les quals és degut a Klein, Hilbert i Enriques. Poincaré, en la seva primera etapa criteriològica, en valorar la tasca de Lobatchewski, admetia implícitament i sense dubtar, aquestes dues proposicions; més tard, en publicar els seus opuscles filosòfico-matemàtics (que, junt amb els articles de la *Revue générale des Sciences* i de la *Revue de Métaphysique et de Morale* sobre la psicologia i metafísica matemàtica, omplen els seus últims deu anys d'existència), el treball és molt més complet i precís. Ja no es tractava de provar la indemostrabilitat del postulat d'Euclides, partint d'altres postulats, sinó de cercar la realitat geomètrica, momentàniament enterbolida pel programa d'Erlangen. En *La science et l'hypothèse* proposa definir els punts, com corresponents a un subgrup (el dels moviments de rotació entorn d'un punt) del grup dels moviments, mes ja confessa que l'experiència en què es funda és *excessivament grollera.* Enriques, en la *Enciclopédie des sciences mathématiques*, III_1 1, en rebutjar la definició de superfície com a límit d'un cos, puix dóna lloc a un cercle viciós, proposa aquest procediment de Poincaré com a producte de l'experiència física; jo he de confessar, amb tot el respecte que m'inspira el savi professor de la Universitat de Bolonya, que tan producte de la experiència física, tan principi intuïtiu em sembla que els cossos es moguin segons un grup amb subgrup equivalents als punts, com l'existència de superfícies límits i de punts matemàtics. Zenon d'Elea negant el moviment, i els nominalistes negant els indivisibles, són analistes contra intuïtius; Enriques és analista en un cas, i intuïtiu en l'altre; i és perquè en el primer cas vol negar, i l'anàlisi és apte per a això, i en el segon afirmar, i en últim cas ha de recórrer a la intuïció per a poder fer-ho.

SEGON SUPÒSIT. — *Que pot existir un cos amb una superfície contínua plana.* No té diferent dificultat que el primer supòsit.

TERCER SUPÒSIT. — *Una esfera* (o un cilindre) *i un pla poden tocar-se.* Dues demostracions vol donar Suárez d'aquest supòsit, més cap resisteix a la moderna crítica; la primera, matemàtica, és la conegudíssima demostració tradicional del pla tangent; la segona, física, pressuposa la primera. Hem de recòrrer als principis de la geometria euclideana-arquimèdica, que, com hem manifestat, són postulats intuïtius.

QUART SUPÒSIT. — *Una esfera i un pla sols poden tenir una línia contínua comú, i llavors no es toquen.* Això és un teorema que es dedueix immediatament d'altres i d'un principi intuïtiu de la secció de l'espai i de la d'una esfera per un pla.

Amb aquests quatre supòsits és evident, racionalment, que l'esfera i el pla tangent tenen un element de contacte, que és un punt matemàtic. No obstant, aquesta prova, així exposada, ha perdut tota valor real absoluta i sols li queda el que hem donat al començament. Ja veig que immediatament sorgeix l'objecció: *llavors no hem fet sinó un cercle viciós: si l'esfera i el pla tenen un punt comú, hi ha punts.* Hem fet alguna cosa més, puix hem donat un pas en la prova de la no-contradicció en l'existència dels indivisibles i en la geometria euclideana-arquimèdica, que per la seva mateixa estructura els admet i treballa amb ells *sense contradir-se mai;* tal geometria és, doncs, una geometria *possible.* Per millor donar a entendre el meu pensament, permeteu-me que us llegeixi un paràgraf de Picard, *La Science moderne et son état actuel* (p. 73), tractant dels principis de la Geometria: *En aquests últims anys la qüestió de la independència dels postulats ha preocupat, sobretot, els geòmetres alemanys, i construint Geometries lliures d'un qualsevol axioma ha es-*

tat establerta per Hilbert la independència dels tals. Així es veurà com és inexacte parlar, com es fa algunes vegades, de tres soles Geometries possibles (*hiperbòlica, parabòlica i el·líptica*). Cinc són les sèries d'axiomes o postulats que estableix Hilbert en ses *Grundlagen der Geometrie:* Primera: *Axiomes de connexió.* Segona: *Axiomes d'ordre.* Tercera: *Axiomes de congruència.* Quarta: *Axioma de paral·lelisme.* Quinta: *Axiomes de continuïtat.* I entre ells prova que existeix independència i compatibilitat tals com els proposa la geometria tradicional; mes jo no sé si en el decurs de tants teoremes estan realment assignats tots els principis, i si es tracta de cossos generals, amb disposicions enterament arbitràries i independents (almenys en primer examen) de la mateixa continuïtat topològica. Hi pot haver nous principis provinents d'algun grup de transformació no descobert explícitament, encara que se'n faci ús implícit. Sigui com sigui, donarem per afirmada la connexió lògica de la idea geomètrica tradicional, que importa la de la compatibilitat amb l'existència d'indivisibles punts i, per tant, de línies i superfícies.

§ 5. — Les solucions intermèdies

Mes la tasca de Suárez fóra poca cosa si es reduís a això, que no és sinó un prenunci embrionari i mal definit de ço que s'ha fet en els nostres dies, com és clar a qualsevol que pensi en les idees enunciades. Perquè ell, ultra les dues opinions exposades, la dels nominalistes per una banda que neguen els indivisibles i amb aquests la geometria tradicional, i la corrent en el seu temps, que afirmava els uns i l'altra, a la qual ell s'inclina (sense negar la compatibilitat lògica de la primera, que sols rebutja com a contrària a la intuïció, no a la raó), exposa altres tres opinions dels seus contemporanis, als quals no anomena, segons costum, i totes tres les rebutja per il·lògiques.

La primera admet indivisibles terminants i no continuants: així sembla que es conserva la geometria tradicional que rebutgen els nominalistes, i es fuig la dificultat dels infinits indivisibles del continu. Però, contra aquesta opinió oposa Suárez la dificultat que no hi ha punts ni línies purament terminants dels cossos, puix aquests, segons la geometria tradicional i la intuïció, són terminats per superfícies, no per punts ni línies.

La segona, del filòsof portuguès Fonseca, no admet més indivisible que la superfície externa dels cossos que els limita. En quant afirma l'existència d'aquesta superfície límit, és enterament acceptada per Suárez, puix això no és sinó una part de la segona opinió tradicional. Mes, com que aquesta opinió admet el contacte real i positiu entre dos cossos terminats en dos plans, així ha d'admetre el contacte en general; i, llavors, el de la esfera i el pla, que es fa realment i positivament en un punt, segons la geometria euclideana, ens porta a afirmar l'existència dels punts. Es veu que Suárez fa ús del primer, del segon i del quart supòsit que, al contrari dels nominalistes, admetien els partidaris de l'opinió que estem analitzant; mes en el tercer supòsit, en el qual Suárez cercava la prova de la seva opinió i refutació de la contrària, donaven els adversaris tres respostes que Suárez diu que no entén, ni jo tampoc. La primera és que l'esfera i el pla es toquen, no en una entitat real, sinó en una entitat ideal o de raó, i això no sembla tenir-ne molta, puix, si el contacte és real, real ha d'ésser l'element de contacte, i, si s'admet que dos cossos terminats segons plans adherents es toquen realment, el mateix cal dir d'una esfera i una cara plana. La segona resposta diu que no és un veritable contacte formal, sinó *eminent:* això és una fugida de paraula, que el que la diu no cerca tant donar una solució racional com enfosquir amb un concepte estrany la qüestió i evitar la discussió. La tercera resposta diu que el contacte, llavors, és negatiu, no positiu; aquesta resposta, en termes moderns, no crec que es pugui expressar sinó negant el tercer supòsit que una esfera i un pla poden tocar-se, puix no poden tenir, segons aquesta opinió, superfícies comuns, ço que és contra els conceptes (i no dic *definicions* expressament) d'esfera i pla que es tenien llavors i es tenen encara, assentats els postulats euclideans. No obstant, si es prescindeix d'aquell tercer supòsit (i això és enterament antieuclidià), crec que aquesta opinió no pot dir-se contradictòria; mes, en aquest cas, la superfície externa no és sinó la imatge intuïtiva del límit dels cossos, sense altra valor metafísica ni científica. Perquè, com fa notar Suárez, si dues superfícies es tallen o es toquen, les línies o punts comuns existien en cada una d'elles abans del contacte, i llavors cau l'opinió; i, si es nega aquest element comú, llavors estem exactament en l'opinió dels nominalistes, puix no hi ha contactes ni seccions indivisibles i sols penetració de cossos, quedant-hi com intangibles les superfícies, que sols són límits dels cossos. En aquest cas no hi ha contradicció, com no n'hi ha en el dels nominalistes, i ho concedeix Suárez; però ens hem apartat totalment de la concepció tradicional euclideana-arquimèdica de l'espai i el continu, i resulta més senzill, per això, prescindir totalment d'indivisibles.

La tercera opinió, positivament rebutjada, proposa l'admissió d'indivisibles continuants i terminants en la superfície, mes no en el cos. Contra aquesta opinió, pensada pel mateix Suárez, diu que se segueixen tots els inconvenients de l'opinió tradicional sobre l'infinit actual d'indivisibles. Demés, diu que les parts del continu tenen, segons aquesta opinió, reals i positius indivisibles en la superfície actualment terminant; mes, com que la divisió no ha creat aquests indivisibles, sinó que solament els ha separat o posat de relleu, i ja abans existien materialment en l'interior del cos, llavors se segueix que en aquesta nova superfície existeixen indivisibles que abans eren purament continuants del cos proposat. Aquesta és la primera vegada que en tot el seu raonament Suárez fa ús de la idea intuïtiva que serveix per a definir la quantitat, o sia la divisibilitat no creadora, segons la clàssica definició d'Aristòtil: *Quantitatiu s'anomena allò que és divisible en les parts ja existents, les* *quals, juntes o separades, són aptes per a existir* (γ). Per què no n'ha fet ús en rebutjar la sentència anterior? Dues són les causes: primera, perquè per a Suárez l'argument Aquil·les, o sia el més fort contra els euclideans-arquimèdics, que neguen els indivisibles, és el del contacte de l'esfera i cilindre amb el pla; i segona, perquè realment en aquella opinió, que no admet sinó superfícies purament limitants, la secció les crea i la unió les desfà, i, no havent-hi línies de separació entre les antigues i noves superfícies, no es conclou res en contra d'aital opinió, malgrat aquesta intuïció, la menys real, en el sentit d'acomodació a la Geometria ordinària. No com a pròpia, sinó com dels nominalistes contra aquesta mateixa opinió de les superfícies purament terminants, proposa Suárez aquesta objecció contra la dels indivisibles en la superfície externa; la té per bona, i proposa, per a explicar-la, l'exemple d'un foc que va consumint la massa total, i per això avança paulatinament per successives superfícies terminants, que *no hi ha cap raó per a admetre no existents abans del foc*, puix són entitats permanents. Es veu, doncs, que, ja dintre aquella opinió, veia la força de l'argument, que desenrotlla més científicament contra la darrera; però li feia més força la del contacte, i la proposa amb detenció. En canvi, en els nostres temps, l'argument del contacte ens sembla, i és en realitat, més fluix que el de la divisibilitat, que importa l'existència primordial dels indivisibles continuants en l'interior del cos. Això podria ésser indici de quanta veneració i confiança inspiraven en temps de Suárez les matemàtiques i com s'hi cercaven els arguments apodíctics per resoldre qüestions de filosofia natural. Al contrari dels nostres temps, en què els matemàtics, en revisar filosòficament els principis en què es basaven, han descobert que aquests estaven mancats de base objectiva real pròpia, i han hagut de manllevar-los de la filosofia natural. Tal és la idea de Poincaré que vos he citat abans i que sembla que agrada a Enriques, no sé si amb entusiasme gens ni mica justificat, puix que es tracta sols d'un canvi d'intuïcions. El pas que s'ha donat és important, perquè el saber la veritat, encara que aqueixa sigui coent, ha d'ésser el primordial desig del científic, i més del matemàtic. Convé, no obstant, revisar l'antic i comparar-lo amb el modern, ja que, ultra veure's l'evolució progressiva del pensament humà, és més fàcil valorar el present veient com valorem i tractem el passat. Les matemàtiques, velles ara i desenganyades de llur objectivitat, potser es desenganyaran d'aquest desengany enganyós.

§ 6. — L'OPINIÓ DE SUÁREZ

Vegem ara quins arguments proposa Suárez per a declarar la seva opinió i desfer més o menys les objeccions de la dels nominalistes. Comença amb

(γ) «Ποσὸν λέγεται τὸ διαιρετὸν εἰς ἐνυπάρχοντα, ὧν ἑκάτερον ἢ ἕκαστον ἕν τι καὶ τόδε τι πέφυκεν εἶναι» (Arist., Metaph. IV, cap. 13).

aquestes paraules: «*Per tant, entre les anomenades opinions, les intermèdies, o sia que en part neguen i en part afirmen, realment em semblen menys probables, puix no poden parlar amb suficient constància i conseqüència, així en les assercions que proposen, com en les raons amb què les confirmen. I això, segons em sembla, proven les raons i discursos fets. Les dues opinions extremes estan plenes de dificultats; no obstant, no em sembla dubtós que la posterior sentència sigui aristotèlica i acceptada pel consentiment dels filòsofs més seriosos. Demés, és més conforme als principis, així de la Geometria com de la Filosofia, i més apta per a donar raó de molts efectes i per a parlar de moltes coses filosòfiques. La contrària, en canvi, sols es funda en algunes il·lacions que semblen o difícils de creure o encloent inconvenients, a les quals es pot satisfer en forma probable. Per tant, la sentència comú que afirma existir aquests indivisibles, així terminants com continuants, en la quantitat, la jutgem preferible, i no és necessari confirmar-la amb noves raons, puix les donades ens semblen suficients.*» Adverteixi's la modèstia del llenguatge, sempre dubitatiu i temerós, fruit d'una discussió seriosa sobre un tema fosc i del qual no es creu poder donar contestació categòrica. Poc hem canviat en els nostres temps en això. La valor de les raons ha minvat molt, segons hem vist; però és perquè ha minvat la dels principis en què es basaven.

§ 7. — L'INFINIT ACTUAL D'INDIVISIBLES EN EL CONTINU

Després declara una qüestió que en el seu temps era d'actual importància, però ara la té molt reduïda: *Els indivisibles ¿existeixen actualment en el continu?* Els mestres de Suárez (Aristòtil i Sant Tomàs) diuen sempre que sols en potència; «*en canvi, nosaltres* — diu Suárez — *semblem ensenyar que existeixen actualment*». Dues són les formes, amb què els indivisibles poden dir-se existir *en potència:* o excloent l'actual existència o excloent l'actual divisió. La primera correspon als que afirmen que no hi ha sinó indivisibles terminants actualment o que no existeix més indivisible que la superfície exterior; però com que Suárez rebutja aquestes opinions que suposen que la divisió crea els indivisibles, es decideix per la segona, i amb això dóna per provada l'existència dels indivisibles.

«*De la qual cosa es dedueix* — diu Suárez, — *no solament que tots aquests indivisibles existeixen en la realitat, sinó encara que són distints entre si. Per a declarar i provar això, suposo que encara que aquests indivisibles existeixen en la magnitud, però la magnitud no es compon de sols ells, com prova el filòsof* (Aristòtil)». I dóna aquesta raó: els indivisibles, si es toquen, es toquen en tota llur extensió indivisible, i, per tant, no creix l'extensió magnitudinal, o sia de volum; no poden, doncs, constituir ells sols la quantitat. Però, per altra banda, suposta l'opinió que segueix Suárez, no es pot negar que els indivisibles, intrínsecament pertanyen a la constitució de la quantitat contínua. Llavors aquesta consta no de soles parts, ni de sols indivisibles, sinó de totes dues coses alhora; puix com que dues són les propietats essencials de la quantitat contínua, o sia el que sigui estesa i que sigui contínua, la primera li ve de les parts, la segona dels indivisibles.

I, abans d'exposar ço que segueix, he de recordar la concepció dels nombres de Dedekind, que es pot trobar originalment en els seus opuscles *Stetigkeit und irrationale Zählen*, i *Was sind und was sollen die Zählen?* dels quals s'ha derivat a tots els tractats que exposen la teoria moderna dels nombres irracionals. Segons Dedekind un nombre és l'element de separació de dues sèries de nombres que, juntes, formen el conjunt de tots els nombres reals, i on qualsevol nombre d'una sèrie és més gran que qualsevol de l'altra. Aquesta idea, amb algunes modificacions, s'ha estès al problema geomètric de la continuïtat de les línies. Suárez va veure perfectament la materialitat d'aquesta concepció quan diu aquestes paraules: «*Si un punt es compara amb la línia contínua terminada i finita, en ella és inclòs, i el mateix es pot dir dels altres; mentre si precisament es compara el punt continuant o terminant amb les parts que continua o termina, o un punt amb un altre, cap d'ells l'inclou. Per això vaig dir que el punt i la línia es distingeixen realment en alguna manera; puix si es consideren com a component i compost, es distingeixen com inclòs i incloent o part i tot; si es comparen separats es distingeixen com a dues parts o dos components, car, encara que els punts no siguin parts, són components. I llavors la conclusió em sembla evident, suposta la sentència que seguim, car una part de la línia es distingeix realment de les altres parts, i molt més el punt terminant.*» I de la mateixa forma el continuant, que, com ja vàrem dir en la primera objecció dels nominalistes, i no ho nega Suárez, es distingeix de les dues parts que continua. Hem d'afegir que tot això no és més que acceptar la concepció euclideana, no sols en principi, com quasi tots els contemporanis de Suárez, sinó en les conseqüències. Aquesta diferència real la confirma amb el contacte real de dos cossos que tenen un punt comú i res més, ço que es veu ésser raó necessària i suficient de diferenciació; i persisteix en altres explicacions per fer veure més la seva concepció, que ara anomenem euclideana-arquimèdica de l'espai i dels cossos.

§ 8. — Solucions als arguments contra l'existència dels indivisibles

I ara, exposada la teoria de Suárez, li toca resoldre les vuit dificultats dels nominalistes. La primera era que no hi havia punts purament terminants, i, per tant, ni línies ni superfícies. Suárez respon segons els principis euclideans, o sia que no hi ha sinó una superfície en cada cos que sigui purament extrema, i que els punts i línies mai poden ésser tals. Nega, doncs, que, perquè no hi pugui haver punts purament terminants, no pugui haver-hi superfície purament terminant; i implícitament afirma que, si no pogués existir aquesta superfície purament terminant, no podria existir cap indivisible, segons volia provar l'argument. A la pregunta de quin és l'efecte de l'indivisible terminant, i, per tant, si es prescindeix d'ell, com queda la magnitud, nega que es pugui fer realment tal precisió, i diu que sols idealment es pot prescindir del límit, i llavors queda la quantitat negativament limitada, però sols en l'enteniment i de cap manera en la realitat.

Però llavors es fa la pregunta de com, essent el cos i la superfície límit entitats realment distintes, com havia dit abans, amb tot i això no es pot fer aquella separació real. Ell no s'atreveix a negar en absolut la possibilitat metafísica d'aquesta separació; però llavors havia de recórrer als miracles i comparacions amb misteris i altres coses fora de la nostra investigació científica ordinària.

La segona dificultat era que el punt continuatiu no era necessari per a unir les parts, perquè per si mateixes poden unir-se, tal com ho farien amb el punt. Suárez respon que les parts no es poden unir immediatament en un terme divisible perquè no pot ésser que dues parts enterament distinctes tinguin una part finita comú. En canvi, com que els indivisibles es toquen en tota llur extensió, poden les dues parts contigües tocar-se segons un indivisible terminant comú, com les dues sèries de Dedekind, que serveixen per a definir un nombre real, tenen a aquest i sols a aquest comú de tal manera que *per ell* (segons el tecnicisme de Suárez) s'uneixen les dues parts que per definició són immediatament unides al dit nombre. En el cas de Suárez el nombre és l'indivisible.

La tercera dificultat, que és la més forta, és la de la infinitat actual d'indivisibles en el continu. Suárez concedeix que realment i simplement és infinita, i que d'això no se'n segueix cap inconvenient, ja que no componen una magnitud infinita, sinó sols finita, i encara mitjançant les parts del continu. Al pensament euclideà, la solució és sencera i completa; en canvi, al pensament metafísic, això resulta un misteri, i, no obstant i això, Suárez, en aquesta qüestió matemàtica, més s'estima seguir els matemàtics del seu temps, guiat per la intuïció del sentit comú, que no la dels metafísics. Ell diu que una infinitat actual d'elements discrets és molt distinta de la infinitat actual dels punts d'una línia, puix en aquella pot posar-se ordre i successió, i no en aquests. I diu una cosa que demostra quan originalment veia la qüestió sense haver-se dedicat a estudis més especials en ella. «*En la multitud dels punts,* diu, *designat qualsevol no es pot designar-li l'immediat en el dit continu; i com en la línia es pot designar el primer, no el segon, i com hi hagi darrer i no penúltim, tot això demostra de quan diversa raó sia aquesta infinitat de la* (actual) *de quantitats discretes, puix indica que aquella és imperfecta i potencial i, per tant, no inclou cap repugnància.*»

En aquestes paraules Suárez revela que va veure o pressentir més del que va compendre i expressar, i és la diferència entre els conjunts numerables infinits ben ordenats i mal ordenats, els continus i els hipercontinus; però els va classificar a l'inrevés del que es fa ara. Els primers, que són els més senzills, eren els més increïbles als filòsofs d'aquell temps; després segueixen els segons, i llur connexió era dubtosa, i vénen, per fi, els tercers i els quarts, que són les potències dels punts d'un continu i de les funcions respectivament; i, com que llur existència s'ofereix com a necessària a la Geometria, li semblaven més tolerables. I, a propòsit dels últims conjunts, he d'advertir una cosa: que, pràcticament, el càlcul, i explícitament les noves investigacions, han donat del continu euclideà-arquimèdic una declaració que en el tractat de Suárez, si existeix, és molt fosca. Em refereixo a la indiferència de secció d'aquell per superfícies i línies en un nombre infinit continu, sense alterar son volum ni altres propietats. El coneixement pràctic prové del canvi de coordenades rectilínies, després l'ús de curvilínies i l'evaluació amb elles de les superfícies i volums i altres integrals de corba, que, si són representades per mitjà de funcions contínues, no tenen potència superior al continu; però si es consideren totes les funcions imaginables discontínues, llavors supera la potència a la del continu segons dos coneguts teoremes de Cantor. Aquesta representació de funcions discontínues era quasi desconeguda a les matemàtiques fa menys de quaranta anys, i molt poc familiar fa menys de vint. Actualment s'ha imposat en el terreny teòric, del qual es derivarà, per natural conseqüència, al pràctic, i llavors totes les concepcions actuals restaran antigues i reduïdes a les matemàtiques del continu contínuament considerat, límit de les del continu discontínuament considerat, com la geometria euclideana de la no euclideana; i tot no serà més que una petita part de la matemàtica del discret.

La quarta dificultat provenia de la possibilitat de separar els punts de la línia, les línies de la superfície, i les superfícies del cos, si aquests elements són entre si diferents, com hem explicat al final de l'exposició. Aquesta dificultat és la que resulta més fosca per a Suárez. Ell proposa dos problemes diferents inclosos en aquest de la separació: si les parts poden subsistir sense els punts continuatius, o si els punts continuatius poden subsistir sense les parts. El primer li sembla impossible, puix els punts continuatius no són eficients de les parts, sinó formals de la unió d'aquestes, segons la intuïció; i, així com no podem forjar-nos cos sense superfície límit, així tampoc parts contínues d'un continu permanent, prèviament compost de punts, segons l'opinió de Suárez, sense els dits punts. El segon problema de la subsistència dels punts sense parts, el divideix en dos: la subsistència d'alguns punts en nombre finit o la subsistència de tots. El primer, segons la seva opinió, és evident que és possible sense cap dificultat; el segon nosaltres el subdividiríem en dos: la subsistència d'un conjunt numerable o la subsistència d'un conjunt continu. Però Suárez s'ho posa en forma única i declara més probable que és impossible aquesta separació, puix implicaria una multitud infinita actual que, segons ell, és més probable que no pot subsistir. En els nostres dies, aquesta qüestió de la subsistència de l'infinit actual és encara un enigma per als matemàtics; més de la solució de Suárez a la tercera dificultat que ja hem declarada, i de la forma en què es posa ell el problema de si poden subsistir *tots* els punts d'una línia separats entre si (no diu un infinit numerable d'elements discrets o un infinit continu en la potència), sembla com si, enunciant el seu problema amb llenguatge modern, es demanés si un conjunt actualment continu pot fer-se actualment discret. Això, segons el teorema de Cantor, és impossible. Suárez es va trobar amb un problema dels més subtils, del qual hauria donat una solució intuïtiva veritable, però solament com a més probable, puix no en veia clara la raó. Però com que per altra banda es podria considerar per separat un infinit numerable de punts d'una línia, i llavors la seva solució negativa no pot emmotllar-se al modern enunciat, resulta fosca la seva idea, degut a la fosquedat que prové de la confusió de les dues classes de conjunts nombrables i continus. Que no sols els punts, sinó també les parts componen la línia per a donar-li extensió (com ja havia dit en la declaració) es fa més patent pel fet, ja conegut de Suárez, que el nombre (infinit continu) de punts d'una línia era enterament independent de la seva llargària. Estudiant la història de l'ambient que rodejava a Suárez, i, per altra banda, el seu caràcter, ni sistemàtic rebutjador ni fanàtic seguidor de les opinions tradicionals o contemporànies, crec que ell s'inclinava amb convicció a la teoria euclideana-arquimèdica com a més evident, i per conseqüència, més lògica, apartant-se dels seus contemporanis i antecessors, i acceptant l'infinit actual dels punts en les línies, on l'evidència i la teoria els exhibia; però quan l'evidència o la teoria res deien, llavors el respecte a l'opinió general en la seva època l'inclinava a donar com a probable aquesta opinió.

La quinta dificultat era a propòsit de les línies de longitud infinita que es podrien trobar en un cos. En dóna una solució equivalent a les dues anteriors, puix accepta que aquelles línies són infinites en alguna manera *en què es troben o tracen en el continu;* però no es pot dir que ho siguin en absolut. Sempre es veu que vol negar la possibilitat del desdoblament de ço que en el continu es troba conjunt, la qual cosa en els nostres dies no és més que el teorema de Cantor sense demostració, sinó sols intuïtivament considerat. Una altra dificultat es posa, a la qual tampoc acaba de trobar una solució completa, i és que línies de distinta llargària tinguin el mateix nombre de punts. Aquest problema, que és el de les potències iguals de dos conjunts numerables o continus, i que actualment es resol per l'afirmativa, en temps de Suárez eren molt pocs els que ho afirmaven, més intuïtivament pels radis de dos cercles concèntrics (que és una gràfica descripció de la demostració

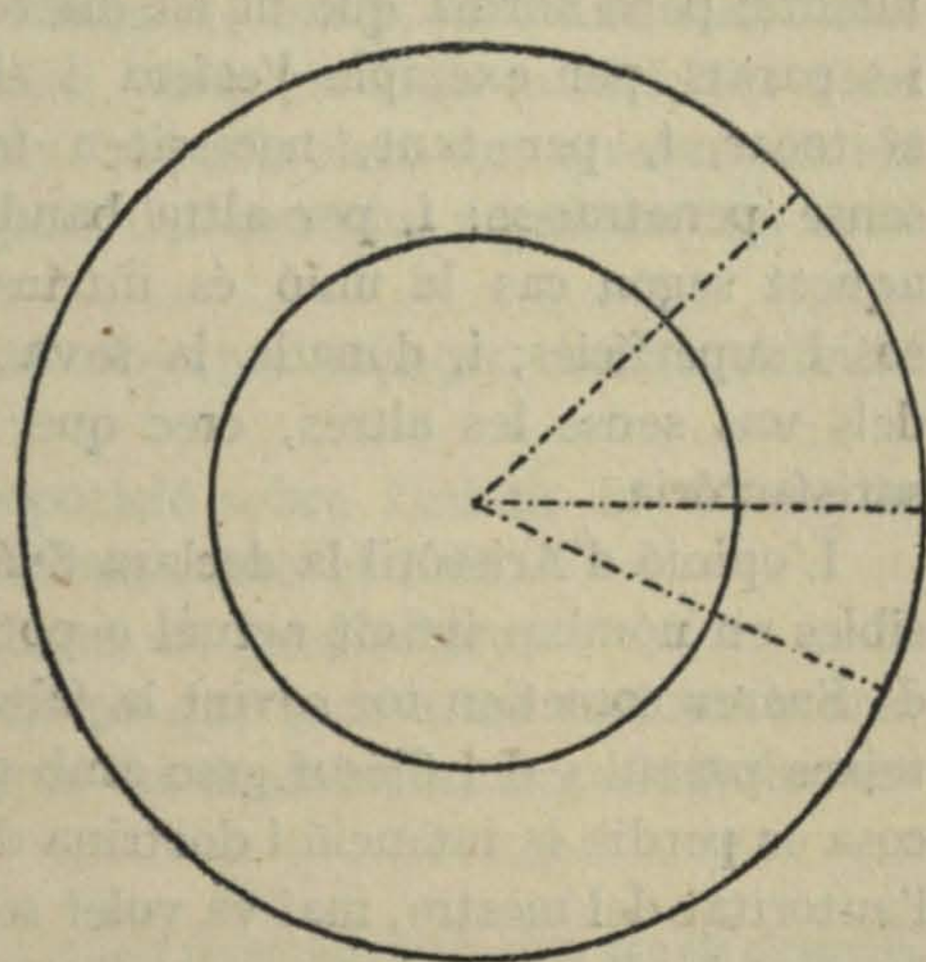

Fig. 2

actual) que per raons. Suárez concedeix probabilitat a la solució, però s'estima més la d'admetre la distinció d'infinits perquè les parts no siguin equivalents als tots. Considera, doncs, conjunts ben ordenats en el sentit més restringit de la paraula, i llavors els nombres trasfinits són diferents. Va veure, doncs, el mateix problema amb el mateix enunciat, però amb dues fases diferents, que són els dos problemes diversos de la potència i l'ordenació dels agregats. Les dues solucions diferents dels dos problemes diferents les dóna com a dues solucions probables d'un sol problema aparent.

La sisena dificultat naixia de la impossibilitat de no poder assignar subjecte substancial al punt matemàtic. La discussió i solució de Suárez ens portaria a tractar d'altres punts que he considerat millor ometre, puix es refereixen a qüestions molt llunyanes de la connexió euclideana-arquimèdica. La resposta la resumeix Suárez en aquests termes: tota quantitat té subjecte proporcional amb ella; per tant, a les parts quantitatives corresponen subjectes substancials proporcionals, i als termes indivisibles d'aquelles, termes indivisibles dels subjectes substancials que els corresponen. D'això es deriven dificultats que porten a Suàrez, i ens portarien a nosaltres, molt lluny de la qüestió. Deixem, doncs, aquesta dificultat, més pròpia per a altres ocasions. Ja es veu que no toca per res el problema matemàtic, si no és en quant aquest s'arrela en una experiència per a objectivar-se.

La setena dificultat tracta de com s'uneixen les parts amb els indivisibles. Respon Suárez que s'uneixen no per contacte, sinó intrínsecament, ni existeix part d'una línia o d'un cos que s'identifiqui amb un punt o un indivisible; car llavors fóra igualment indivisible que l'element, i no fóra part; o l'element fóra divisible almenys en un sentit en què no pot ser-ho. Està, doncs, el punt unint i unit per tot ell a les dues parts que continua. Confessa Suárez que aquesta dificultat li minva no poc la força de l'argument Aquil·les del contacte d'esfera i pla per a provar l'existència d'indivisibles terminants i continuants; però afirma que hi ha diferència entre el cas de dos cossos distints i separats, per exemple l'esfera i el pla, que no es poden penetrar, però sí tocar, i, per tant, necessiten tenir indivisibles per a poder tocar-se sense penetrar-se; i, per altra banda, el d'un cos i la seva superfície. En aquest segon cas la unió és intrínseca, portada pel mateix ésser de cossos i superfícies; i, donada la seva explicació de la impossibilitat natural dels uns sense les altres, crec que la seva diferenciació és completament satisfactòria.

L'opinió d'Aristòtil la declara Suárez segons la seva sentència dels indivisibles en nombre infinit actual o potencial en el continu. Els contemporanis de Suárez cometien tot sovint la falta de voler dissecar les opinions i les mateixes paraules del filòsof grec amb gran precisió, una per una; amb la qual cosa es perdia la intenció i doctrina de qui les va proferir. Suárez, respectant l'autoritat del mestre, mai va voler seguir aital tendència, més depriment que laudatòria d'ell. Però com que no són les idees d'Aristòtil, sinó les de Suárez, les que hem volgut discutir, deixem aquesta qüestió a altres, després de donada aquella advertència; poc fa al cas que siguin o no conformes unes amb altres.

§ 9. — El pensament modern

Els matemàtics moderns, en estudiar el continu, han vist que està constituït per un nombre infinit d'elements *d'una potència c*. Aquesta potència expressa el conjunt de punts en una línia tan finita com infinita, en una superfície, en un cos i en tot l'espai imaginari de tres dimensions, de quatre i de mil, i fins d'un nombre infinit n numerable de dimensions. De manera que, si representem per c la potència dels punts d'un continu lineal de longitud finita, tindrem

$$c = 2c = 3c = \ldots\ldots = nc = n^2c = \ldots\ldots = c^2 = c^3 = \ldots\ldots = c^n$$

El conjunt d'indivisibles segons una o dues dimensions és el conjunt de funcions contínues amb dues o una variable independent que també té la potència c. No estan d'acord els matemàtics en si és actual o potencial tan sols l'infinit representat per aquesta potència c (δ). Es curiós ço que ha deixat consignat Enric Poincaré, a propòsit d'aquesta discussió, en el seu escrit pòstum *Dernières pensées*, en el capítol V, *Les matemàtiques i la lògica*. «*Fa alguns anys* — diu, — *que he tingut ocasió d'exposar certes idees sobre la lògica de l'infinit, sobre l'ús de l'infinit a matemàtiques, sobre el que se n'ha fet després de Cantor; he explicat perquè no veig legítimes certes maneres de raonar, de les quals alguns matemàtics eminents han cregut poder-se servir*». Hi ha, doncs, dues escoles: la pragmatista i la realista, cada una amb les seves ramificacions. La primera conté tots els idealistes: Poincaré, doncs, és el capità dels pragmatistes estètics, que atribueixen a la bellesa l'origen de les hipòtesis físiques, encara que també té de vegades mires utilitaristes fent-se pragmatista utilitari, perquè la comoditat és una font de bellesa en ço que té d'unitat i d'harmonia. Per a Poincaré, doncs, el continu no solament no es pot dir que existeixi en realitat, sinó que amb prou feines si es pot dir que pot existir ni concebre's, puix que estableix com a resum de ses idees sobre l'infinit, que porta la concepció del continu, aquestes tres conclusions:

1.ª No s'han mai de considerar sinó objectes capaços d'ésser definits en un nombre finit de mots.

2.ª Mai perdre de vista que tota proposició sobre l'infinit ha d'ésser la traducció, l'enunciat abreujat de proposicions sobre el finit.

3.ª Evitar les classificacions i definicions no predicatives.

Cantor, al contrari, és realista, fins en ço que toca a les entitats matemàtiques: el geòmetra no les crea, sinó que les descobreix. Per això els rea-

(δ) Els arguments són propis de la discussió de l'infinit potencial; però, com que els elements se suposen existir precedentment, d'aquí el dubte i la discussió.

listes són infinitistes, puix la intuïció revela en el continu un conjunt infinit de punts matemàtics realment existents.

Amb això queda clar com els antics nominalistes tenen seguidors en el segle XX, i també els conservadors. Les idees de Poincaré són molt més radicals que les d'aquells, i les de Cantor també molt més que les de Suárez. Tres segles d'intens treball matemàtic han separat més els camps. No obstant, així com els antics dubtaven esperonats per les objeccions dels contraris, així els moderns dubten: ni Poincaré va consentir ésser anomenat nominalista pur, ni Cantor voldria ésser tingut per pur intuïtivista.

Més realista que Cantor, segons Poincaré, és Hermite. Ell repetia: «*Sóc anticantorista perquè sóc realista*», i deia que Cantor creava els objectes en lloc d'acontentar-se amb descobrir-los. «*Sens dubte* — diu Poincaré — *a causa de les seves conviccions religioses, considerava com una espècie d'impietat voler penetrar de cop i volta en el domini* (el de l'infinit) *que Déu sol pot estrènyer, i no esperar que ens reveli un a un els misteris. Comparava les ciències matemàtiques a les naturals. Un naturalista que cerqués el misteri de Déu en lloc de consultar l'experiència, li hauria semblat no solament presumptuós, sinó irrespectuós amb la majestat divina. Els cantoristes li semblaven fer el mateix en matemàtiques. I és per això que* (Hermite) *realista en teoria, era idealista en la pràctica. Existeix una realitat per conèixer, i és exterior a nosaltres i independent de nosaltres; però tot ço que nosaltres podem conèixer depèn de nosaltres, i no és més que un esdevenir* (una futurició), *una espècie d'estratificació de successives conquestes. Ço que resta és real, però eternament incognoscible.*»

Entre Cantor i Hermite, més prop del primer que del segon, es pot col·locar l'esperit de Suárez i el seu anàlisi.

En el seu opuscle sobre la Ciència moderna resumeix Picard en molt poques paraules la idea actual del continu entre els matemàtics quan prescindeixen alhora de la intuïció i de la metafísica: *el continu és un conjunt o agregat perfecte i dens* (altres diuen *perfecte i connex*). *Conjunt* o *agregat* expressa una munió d'elements, sia de la classe que es vulgui, col·lectivament considerada, o sia relacionats els elements entre si; *perfecte* importa que aquesta munió tingui un nombre infinit (pròpiament parlant, no-finit) d'elements, i, demés, que no hi hagi element o entitat no pertanyent al conjunt, que sigui element del conjunt derivat del donat (que es troba cercant els elements tals que sempre puguin trobar-se en el conjunt elements tan semblants com es vulgui a ells segons la raó col·lectiva del conjunt) i així mateix que no hi hagi element del conjunt que no ho sigui també del derivat, en forma que el conjunt i el derivat s'identifiquin; *dens* o *connex*, finalment, vol dir que sempre es pugui trobar en el conjunt una cadena d'elements entre dos qualssevol d'ells, tal que entre dos elements consecutius de la cadena hi hagi una major semblança segons la raó col·lectiva del conjunt que una prefixada. Aquesta noció del continu suposa els elements com a indivisibles constituents, i, encara que aquestes idees volen prescindir de la intuïció, qualsevol que coneix la seva història la veu al primer cop d'ull. No obstant, molt profitós és l'ús d'un llenguatge que prescindeixi de la intuïció, ja que no s'en pugui sempre prescindir amb els conceptes que sota tal llenguatge s'amaguen; perquè així altres enginys troben mitjà de concebre-ho de diferent manera i anar depurant amb això la veritat de les falses suposicions. Compari's la manera de parlar d'ara a la de fa tres segles, i es veurà la influència de l'ús de les fórmules abstractes potser tant com la del progrés de la ciència.

TRADUCCIÓ LITERAL DEL LLOC COMENTAT (*DISP. XL, SECT. V*)

1. Les coses dites fins ara de la quantitat contínua, principalment convenen al cos, que, sense cap controvèrsia, és la primera i principal espècie de quantitat. Ara, de les altres espècies que se solen assignar sota la quantitat contínua i de llur primer principi, que és el punt, hi ha especial i major dificultat. I per això cal tractar de cada una en particular.

RAONS PER LES QUALS ELS PUNTS SEMBLEN NO RES

2. *Primer argument contra els punts terminatius. — Segon.* — Sembla que el punt no és res real ni positiu en la naturalesa de les coses; i, si el punt no és, tampoc no serà la línia, i, treta la línia, cal que sigui treta la superfície, ja perquè, tret el principi, també es treu el principiat, ja també perquè tret allò que és indivisible simplement, consegüentment queden trets els altres indivisibles segons una o altra dimensió; car la raó de tots és la mateixa, com fàcilment serà clar de ço que ens caldrà dir. El primer antecedent es prova, doncs, primer perquè es pot entendre un punt doblement, això és, terminatiu i continuatiu; per tant, o tan sols és un d'ells o tots dos; cap d'aquestes coses es pot dir; doncs cap d'ells és. La menor quant a la primera part es prova perquè de fet cap punt és terminatiu solament, que cap se'n pot fingir que no estigui entre parts de línia, ja sia que tals parts constitueixin una línia recta, ja oblíqua, ja també facin angle en aquell punt; de qualsevol manera que en un punt s'uneixin, són contínues; com la superfície d'un cos quadrangular, encara que s'uneixin en una línia angular, són contínues; doncs no existeix cap punt terminatiu. En segon lloc, perquè no hi ha cap raó o necessitat de fingir tal punt terminatiu; car ¿quin efecte té en la naturalesa de les coses? Direu de finir i terminar la línia. Però, al contrari, perquè, si amb la ment separeu tal punt, la línia quedarà igualment finida, més i tot, ni major ni menor que d'abans era entesa, car l'indivisible afegit no fa major, i conseqüentment ni tret fa menor; doncs tal punt és superflu en la naturalesa de les coses.

3. *Primer i segon argument contra els punts continuatius.*—I d'aquí, demés, se'n conclou l'altra part, això és, no existir punts continuatius, i menys encara

uns i altres, perquè el punt, que és continuatiu de dues parts, és terminatiu de cada una; doncs, si per terminar tota la línia no és necessari el punt, doncs ni per terminar-ne les parts; doncs tampoc per continuar-les. En segon lloc, perquè, si el punt continuant era necessari, fóra principalment per a la unió de les parts; però les parts poden unir-se immediatament per si mateixes sense intervenció del punt, com les altres coses immediatament s'uneixen per si mateixes. Car, si aquelles parts s'uneixen en el punt com en una tercera cosa, doncs amb ell s'hi uneixen immediatament i per si mateixes, altrament n'eixiria un procés infinit; doncs molt millor s'uniran immediatament entre si.

4. *Terç.* — *Quart.* — Tercerament, perquè, si aitals punts existeixen, existeixen infinits punts en el continu realment entre si distints; car, si hi eren finits, o la línia constaria solament d'ells o tindria un número finit de parts, en les quals soles podria dividir-se. Però ambdues coses són impossibles. I no és menys impossible que en el continu hi siguin infinits punts, car d'aquí pla se segueix poder dar-se l'infinit actualment com a multitud, que no es poden deduir més inconvenients de la multitud infinita actual de coses qualsevulla, que de la infinita multitud de punts en el continu; perquè, per bé que aquella multitud de punts sigui conjunta a les altres parts contínues, però verament és actualment en la naturalesa de les coses. En quart lloc, perquè existeix el punt continuant, cal que es distingeixi realment de les parts que continua, car no hi ha major raó per a ésser el mateix amb l'una que amb l'altra; ni pot ésser el mateix amb les dues, essent elles distintes entre si; doncs Déu podrà separar els punts de les parts de la línia, car no repugna que res realment distint de les altres coses se separi d'elles; doncs per la mateixa raó podria Déu tots els punts de la línia col·lectivament presos separar-los de la línia conservant les parts de la línia. Però d'aquí segueixen dos impossibles: un, que quedaria el continu dividit en tota part seva; altre, que quedaria en les coses infinita multitud de punts totalment discontínua.

5. *Cinquenament,* aquesta mateixa dificultat tocada en els punts té lloc en les línies existents en magnitud finita; i el mateix és de les superfícies. I a més a més, ocorre una especial dificultat, que se segueix, en un cos d'un peu, per exemple, haver-hi línia d'infinita longitud simplement, i tancada entre dos punts extrems, la qual és clarament repugnant. Que tal cosa se'n segueixi en quant a la primera part és patent, car és infinit simplement de fet, ço que de fet té infinites parts iguals, i no comunicants; però en tal magnitud hi ha infinites parts de línia iguals i no comunicants entre si, i unides; doncs la componen infinita actualment. La menor es prova, car en la magnitud d'un peu es poden assenyalar dues línies d'igual longitud entre si, distants entre si per un poquet d'amplada; doncs entre elles són infinites línies iguals continents parts d'aquella amplada, les quals línies totes són parts d'una; car s'uneixen en els punts extrems d'aquella longitud. I semblant argument vulgar és de la línia giratòria que circueix totes les parts del con-

tinu, proporcionals certament en longitud, però iguals en amplada, segons la qual totes les parts d'aquella línia tenen igualitat respecte de certa longitud; i, amb tot, són infinites, així com les parts proporcionals.

6. *Sisenament*, perquè no hi ha cap subjecte en què tal punt pugui ésser; doncs tampoc pot dar-se aital punt. Es prova la menor [*sic*] perquè o bé aquell subjecte és divisible, i això no, car és subjecte improporcionat ni pot ésser adequat subjecte al punt indivisible, i ací cerquem el subjecte adequat. O bé aquell subjecte és indivisible, i d'ell preguntaré si és substància o accident; si accident, novament en cercarem el subjecte, i de més a més se'n seguirà aquell inconvenient filosòfic, que un indivisible quantitatiu serà immediat a l'altre en el continu. Altrament, que sigui substància sembla impossible; si no, en la mateixa matèria es darien punts (per dir-ho així) i línies, i superfícies substancials, que és cosa inoïda. Un *setè argument*, semblant al precedent, pot fer-se, perquè el punt no pot tocar les parts de la línia, per continuar-les entre si; puix ¿en què toca cada una d'elles? O bé en un altre indivisible, i així tota la línia constarà de punts, o bé en part divisible, però no pot fer-se que l'indivisible toqui el divisible. I, si dieu no tocar-lo en res determinat, i d'aquesta manera no repugnar que l'indivisible toqui el divisible, contra això hi ha, primer, que d'aquesta manera es trenca el raonament amb què Aristòtil (6.è *Phys.*) prova no poder-se moure l'indivisible de manera contínua. En segon lloc i principalment, perquè aquesta resposta fa tombar la capitalíssima raó matemàtica amb què se sol provar dar-se el punt, això és, que l'esfera perfecta toca perfectament al pla perfet en un punt. El *vuitè argument* pot pendre's de diversos llocs d'Aristòtil en els quals significa no trobar-se aquests indivisibles actualment en les coses, sinó sols en potència. Car el llib. 1 *Metaph.*, text 42 i 43, i més clarament llib. 3, c. 5, text 17, diuen: «Així com el mercuri no és en la grollera pedra actualment, sinó potencialment, així talment és la superfície entremig de les parts del cos.» I en el 8.è *Phys.*, c. 8, text 65, en el llibre *De Communi animal. mot.*, c. 2, diu no haver-hi cap substància dels indivisibles. I en el 2.n *De Anima*, c. 6, text 25, diu conèixer-se el punt per negació.

RELACIÓ DE DIFERENTS OPINIONS

7. És cosa, aquesta, que a tots els filòsofs ha semblat molt difícil, i per això se són dividits en moltes opinions discrepants que cal fer referents i examinar una a una, per poder indagar ço que sigui més versemblant. Doncs les sentències extremes són dues: una nega absolutament el punt, la línia i la superfície ésser coses positives; l'altra simplement afirma ésser aquestes coses vertaderes, i realment distintes entre si i del cos, i existents no sols en les extremitats dels cossos, sinó també íntimament en tot el cos, i entre totes les seves parts. Les altres opinions són intermèdies, que de diferents maneres en part afirmen, en part neguen.

PRIMERA OPINIÓ EXTREMA I ABSOLUTAMENT NEGATIVA

8. Tenen la primera opinió Durand., *In* 2, *dist.* 2, *q.* 4; Ockam, en sa *Dialect.*, *cap. De Quantitate;* i Gregor., *In* 2, *dist* 2, *q.* 2, *art.* 1. La qual opinió no nega que en el cos quantificat hi hagi vertadera longitud i latitud real; que això és tan evident, que per ningú pot negar-se, com consti ésser el cos divisible d'aquelles tres maneres, i ho afirmi Aristòtil, i en la Geometria sigui demostrat, com ho tocarem en ço que segueix. Però aitals autors citats neguen donar-se en el cos quantificat cap cosa diferent de les altres que tingui longitud sense latitud, o latitud sense profunditat. I afirmen que el mateix cos, per si, té totes aquestes dimensions, i, segons és considerat de nosaltres, en quant precisament té longitud s'anomena línia; però en quant és considerat de nosaltres amb longitud i latitud, anomena's precisament superfície. Però el punt diuen en realitat ésser solament quelcom privatiu, concebut de nosaltres a manera de positiu sense gens d'extensió. Els fonaments d'aquesta sentència així exposada són tocats en les raons que hem fetes, i es proposaran més en tractar les opinions dels altres.

SEGONA OPINIÓ EXTREMAMENT CONTRÀRIA I ABSOLUTAMENT AFIRMANT

9. La segona opinió extremament contrària a aquesta, sembla ésser de Sant Tomàs, com és patent de l'*Opusc.* 39, *c.* 2, i *De Verit.*, *q.* 28, *art.* 2, *ad* 10, i *Quodl.* 7, *art.* 9, *ad* 2, i és comú en la seva escola, com pot veure's en Capreol., *In* 2, *dist.* 2, *q.* 2, *a.* 3, i en la *dist.* 18, *q.* 1, *a.* 3; Sonc., 5 *Metaph.*, *q.* 20; Hispal., *In* 2, *dist.* 2, *q.* 2, *a.* 4; Soto *In Prædicam.*, *cap. De Quantitate;* i el mateix suposa Cajet., *In Logic.*, *cap. De Quant.*, i 3 *p.*, *q.* 4, *art.* 2. En la mateixa opinió està Escot, *In* 2, *dist.* 1, *q.* 3, i més clarament *dist.* 2, *q.* 9. També es pren d'Alex. Alens., *lib.* 3 *Metaph.*, *c.* 5; i aquesta opinió la defensa amplament Burlaeus, 1 *Phys.*, text 15.

10. Aquesta sentència es funda, primerament, en Aristòtil, qui, a tot arreu on tracta de quantitat, suposa dar-se punts, i les altres coses que se segueixen d'aquí. D'on allò defineix per continu, les parts del qual s'uneixen per terme comú; però aquells cossos són contigus, les últimes parts dels quals són ensems, com és patent del cap. *De Quantitate*, i del 5 *Phys.*, c. 3. Altrament aquestes locucions suposen ésser aquests termes indivisibles i positius; car, si eren divisibles, ni podrien ésser ensems, ni un terme segons tot ell mateix podria ésser comú a les dues parts, puix en ell hi hauria parts, i així, segons les diverses parts pròpies, tocaria les altres. D'on en ell també hi hauria continuïtat, i caldria cercar un altre terme comú a ses parts. Finalment, qui diu terme o extrem, diu indivisible, car altrament no podria ésser extrem. Semblantment ésser terme o extrem no pot dir-se de la privació, si parlem pròpiament. Principalment perquè Aristòtil diu fer-se el tacte en

aquests termes extrems; i el tacte no es fa pas en una privació, sinó en quelcom positiu. I la mateixa força té ço que *de loco et locato* diu, 4 *Phys.*, c. 4, tenir igualitat en aquests extrems; ço que no pot ésser vertader si no es prenen els extrems indivisibles segons la profunditat; i per això allí mateix diu que la superfície és lloc. De més a més, d'altra manera no es podria salvar la diferència que ell constitueix entre contigu i continu; car, si els extrems, per raó dels quals es diuen ésser ensems les coses contigües, solament són privacions d'ulterior extensió, de la mateixa manera en dues parts contínues són dues privacions d'ulterior extensió, puix cap d'entre elles passa més avant; doncs no hi ha cap diferència; parla, doncs, Aristòtil de termes positius. D'on en el 1r *De Anima*, c. 4, text. 70, diu tenir els punts posició en el continu, ço que de la sola privació no es diria pas dretament. Finalment, onsevulla que ell enraona de quantitat, posa aquestes tres espècies de quantitat com reals i positives, cos, superfície i línia. I sempre indica que tots els filòsofs d'abans d'ell havien reconegut aquestes mateixes espècies de quantitat; dels quals, sobretot dels pitagòrics, discrepa ell en què no les posa separades, sinó en els cossos físics i naturals, com consta del llibre 3 *Metaphys.*, c. 5, i més amplament del llib. 13, c. 2. I així els antics expositors d'Aristòtil estan tots en aquesta sentència. Demés, tota la ciència geomètrica sembla suposar donar-se línies i superfícies, de les quals demostra moltes coses, com és de veure en Euclides.

11. Les raons per a aquesta sentència es prenen principalment de certs efectes o indicis, part matemàtics, part físics. I, certament, del punt hi ha un argument vulgar; puix, un cos perfectament esfèric, solament toca en un punt un cos perfectament pla; ço que afirma Aristòtil, 1 *De Anima*, c. 1, i demostra Euclides, *lib.* 3, *propos.* 16. I la raó és que, sinó, en el cos esfèric, hauria alguna superfície plana; car els cossos, que es toquen, s'adeqüen en allò en què es toquen, i amb un cos pla sols un altre de pla pot adequar-s'hi; si, doncs, l'esfera en alguna extensió toqués al pla, per necessitat hauria en si extensió plana, i així no fóra cos perfectament esfèric, ja perquè pla i esfèric inclouen repugnància en les figures, ja també perquè en aquella extensió plana les parts extremes distaran més del centre de l'esfera que no pas les del mig, ço que repugna a una figura perfectament esfèrica. Alguns responen que no pot haver-hi contacte real entre aquests dos cossos. Mes això és, de si, tan increïble, que cap refutació hi cal; car ¿què pot impedir aquell contacte real? Igualment, encara que el cos esfèric fos pesant, pel pla fóra impedit de baixar, o bé, si son pes vencia, se'n duria el pla i tot; i ¿còm poden fer-se aquestes coses sense contacte real? Prou n'hi ha d'altres a dir, que aitals dos cossos es toquen, però no pas en res que sigui determinat, sinó en una part indeterminada, i d'això en diuen *tocar indivisiblement en cosa divisible.* Però aital resposta, de primer, diu quelcom molt difícil de creure, puix aquell tacte no es fa successivament, o en un temps indeterminat, sinó tot ensems en un moment, com suposem; doncs necessàriament dèu ésser tacte determinatiu, i conseqüentment en alguna cosa determinada. Un àngel, i molt més Déu, veu

clarament en què es toquen aquells dos cossos, i en què no es toquen; doncs, si allò en què es toquen és extens, en veu tota l'extensió, designant-ne el terme, ja intrínsec, de manera que fins a ell es faci el contacte i no més enllà, ja extrínsec, això és, que el tacte no hi arriba, fent-se en tot el restant. Després, es desfà la raó feta, perqué, si el tacte no es fa en res indivisible, doncs es fa en alguna extensió, sia determinada, sia indeterminada; doncs en una extensió plana; i aquesta repugna a la perfecta figura esfèrica, tant se val que es digui determinada com indeterminada.

12. Un argument semblant a aquest es fa quant a les línies en una columna perfectament rodona o cilindre, puix, escaient-se sobre un pla perfet, no el pot tocar sinó en una línia, per la mateixa raó. I el mateix és d'un dau perfecte, puix, si per un angle toca un cos pla, no el pot tocar sinó en una línia. Semblantment dos plans sòlids i perfets no poden tocar-se sinó en quelcom indivisible quant a la profunditat. I en això evidentíssimament, al meu judici, es refuta la resposta del tacte indeterminat, car aquells cossos no poden penetrar-se en alguna part, o bé en determinada profunditat, o bé en indeterminada; i, per una altra banda, no poden tocar-se segons alguna profunditat si no es penetren. Semblant raó pot fer-se de la superfície blanca, en quant és objecte de la vista, que no termina la visió segons alguna profunditat ni que sigui indeterminada; doncs segons la sola superfície. El mateix argument és que la claror no és rebuda d'un cos dens i perfectament opac, sinó en l'última superfície; puix, si en penetrava algunes parts, quant a elles ja fóra diàfan: doncs existeix una última superfície indivisible, on es rep la claror.

LA TERCERA OPINIÓ INTERMÈDIA, QUE ADMET INDIVISIBLES TERMINANTS, NO CONTINUANTS

13. A aquestes i semblants experiències (per tocar ja la primera opinió intermèdia) diuen alguns que elles convencen certament l'existència dels indivisibles terminant parts de quantitat, i, per tant, que cal admetre'ls en les extremitats dels cossos, però que dins dels cossos no hi ha pas aitals indivisibles continuants; puix els primers són bastants a salvar tot ço que Aristòtil ensenya dels punts, línies i superfícies, i totes les demostracions geomètriques, i finalment totes les experiències que d'aquests indivisibles hem referides. Però els darrers ens aporten innumerables dificultats, principalment aquelles que toquen la matèria de l'infinit, i d'altra part cap raó suficient ens en convenç. N'hi ha que atribueixen aquesta opinió a Aristòtil, perquè ell mai no afirma que en la línia, per exemple, hi ha infinits punts actualment, sinó potencialment; doncs els dos punts extrems amb què termina hi són actualment; els altres, però, es diu ésser potencialment infinits, perquè, de qualsevol part que es divideixi la línia, resultaran dos punts, i, així com infinitament es pot dividir, així resultaran infinitament; ço que així sembla

exposar Sant Tomàs, *Opusc.* 36, dient: «En la línia hi ha dos punts actuals, els seus termes, que entren en sa definició; i infinits altres en potència, en quant ella és potencialment divisible en infinit.»

DESAPROVACIÓ DE LA TERCERA OPINIÓ

14. Però contra aquesta sentència hi ha la raó que al principi vàrem objectar: que vertaderament no hi ha cap mena de punts terminants, que no siguin també continuants, puix, encara que no sempre continuïn les parts d'una línia recta, però sempre continuen una línia: o recta, o corba, o circular; o almenys línies terminant en angle. I, si això ja és prou per a dir-se punt terminant, serà també en mig d'un cos, com en el centre d'una esfera, un punt en què s'uneixen totes les línies, que es fan partir de la circumferència a ell; i en els cels (segons volen els filòsofs) hi haurà dos punts immòbils, que en diuen pols, per bé que a ells conflueixi infinita multitud de línies. I semblants arguments es fan de la línia, puix no n'hi ha cap, en les coses, que no s'escaigui entre algunes parts de superfície, ja sia en superfície plana, ja còncava, ja almenys en superfícies que fan angle, com el cos piramidal; doncs repugna de dir, que es donen línies i punts terminants, i no continuants.

QUARTA OPINIÓ MITJANA ADMETENT UNA ÚLTIMA SUPERFÍCIE, I NEGANT ALTRES INDIVISIBLES

15. Per raó d'aquests arguments hi ha una altra opinió mitjana, que nega donar-se de fet punts o línies en acte, puix amb la sentència pròximament citada judiquen els autors d'aquesta opinió no dar-se línies en acte, o punts continuants; i d'altra part els arguments fets convencen no dar-se en les coses cap mena de punts que no siguin continuants. Però de la superfície diuen donar-se'n una en cada cos, que sigui terminant, i no continuant, i aquesta concedeixen ésser en acte, i fora d'ella cap altre indivisible ésser en acte en qualsevulla dimensió. La primera part és patent. Puix en qualsevol cos, per exemple, esfèric, hi ha una última superfície indivisible quant a la profunditat, com incloent tot el cos, i per la part de dins (per dir-ho així) terminant totes les parts del cos, i per la part exterior no terminant ni continuant res; doncs es dóna en els cossos una certa superfície terminant i no continuant, encara que en el punt i en la línia mai no es trobi tal cosa.

16. I, quant a aquesta part, és sens dubte vertadera aquesta sentència. I se'n pot dar la raó, perquè tal és la diferència entre la superfície, i el punt o là línia, que la superfície solament de dues cares o parts pot continuar les parts del cos quantificat, puix solament és indivisible segons la profunditat, i així solament per aquelles dues parts poden concórrer en ella les parts del cos; però, com que els cossos són finits i terminats, és necessari que en

alguna superfície s'aturi, d'una part, l'extensió de profunditat del cos, i d'altra part que no hi hagi cap profunditat del mateix cos, que es continuï amb altra; i, per tant, es dóna superfície terminant i no continuant. Mes emperò les línies i punts, no solament per dues vies, sinó per infinites, poden terminar les parts de superfícies o línies que hi concorren; a una sola línia s'entén concórrer-hi al voltant infinites superfícies; més, a un punt de totes parts inferiors, superiors, laterals de totes bandes; en la qual cosa el punt fins excedeix la línia; puix, com més indivisible és el terme, per tantes més vies poden confluir a ell les parts d'aquella dimensió, que poden continuar-se amb tal terme. D'aquí ve, doncs, que mai no es donin línies o punts que per alguna via no siguin continuatius; car, com mai són fora dels cossos físics, sempre concorren en aquests termes diverses parts per a unir-s'hi, encara que això no sigui sempre igual en tots, puix en el mig del cos entenem haver-hi confluïment, i continuació de tota part; però en aquells punts o línies que es conceben en l'extrema superfície del cos, solament d'algun costat, o de la part inferior o superior, s'entén haver-hi concurs de parts que es continuen, però no pas de tots costats.

17. Quant a això, doncs, és vertadera la diferència entre la superfície i la línia amb el punt; d'aquí, però, en dedueix aquesta opinió l'altra diferència damunt esmentada, que així es declara. Puix que la superfície terminant sigui actualment en les coses, ultra els indicis que n'hem posat més amunt, dels quals aquesta opinió també se serveix, sembla convèncer-ho aquella raó, que tots els cossos són finits en acte, i terminats intrínsecament; i no són finits ni terminats sinó per alguna superfície, de tal manera pròpia d'ells, que no sigui comú als altres; de la qual té un cos que no sigui continu a un altre i que pugui ésser-hi contigu, i tocar-ne un altre, i contenir en lloc i ser-hi contingut, i rebre alguns accidents extrems, principalment la figura, que Aristòtil digué ésser rebuda en la superfície, 3 *Metaph.*, c. 5, text 17. Però aquesta raó no té lloc en la línia; perquè com ella amb certa continuada extensió, i retorn o reflexió, pugui acabar en si mateixa, no necessita de cap terme extrem amb què termini; ni en ella es pot trobar cap terme ni amb la ment, que així sigui últim terme de les parts d'una línia, que més enllà d'ell per alguna via o posició no s'estengui la mateixa línia. Per tant, la línia no necessita aital terme amb què sigui terminada, sinó tota és finida per si mateixa, com la línia circular per si mateixa intrínsecament és finita; puix tota línia, que es considera en qualsevol cos, encara que no sigui circular, és amb tot una per sa interna continuació, en la qual concorda amb la circular, encara que en difereixi en descripció d'angles, i en altres figures, segons nostra manera de concebre. Per aquesta raó la línia no necessita de punts actuals, i la mateixa raó té lloc en la superfície, que també és una i finida en si mateixa per continuació i retorn a si mateixa, ni en cap part d'ella es de trobar un terme, fora del qual no s'estenguin les parts de la mateixa superfície; i per això no és finita per terminació pura, sinó continuada amb les

altres parts a manera de cercle; per la mateixa causa, doncs, no es donen en la superfície línies en acte. I el cos en quant a extensió de la profunditat, encara que referent a les parts internes no necessiti de superfícies actuals (puix quant a elles la mateixa raó, feta de la superfície i de la línia, té lloc en el cos, car és un per una certa integritat, i les parts entre si comparades no necessiten terme amb què s'acabin, que cada una relativament a l'altra és acabada), mes emperò tot el cos per ésser finit en si, i separat dels altres, que el toquen, o el poden tocar, és necessari que en acte tingui alguna superfície última per la qual sigui terminat.

Es refuta la quarta opinió

18. Altrament aquesta sentència no sembla pas ésser conseqüent en afirmar de la superfície última ço que nega universalment dels punts i de les línies. Car, si els arguments fets per efectes i indicis proven eficaçment dar-se en acte la superfície última, no proven menys les altres coses semblants, que vàrem adduir, que es donen en acte en la mateixa superfície última línies i punts. Car, si del tacte indivisible de cossos plans o de lloc i localitzat se'n treuen suficientment les extremes superfícies terminants, ¿per què de l'indivisible contacte de l'esfera o cilindre amb un pla no se'n treuen línies i punts existents en acte en les superfícies extremes? Responen ser-ne la raó, que un cos esfèric no toca un punt, que sigui un vertader ésser real, sinó que es redueix a acte per designació. També ho diuen altrament: que el cos esfèric toca el pla en un punt, no existent formalment, sinó eminentment en mig de l'extensió. Fins d'una altra manera ho diuen: que el cos esfèric i el pla tenen contacte negatiu, no positiu; en quant no disten, es diu que es toquen negativament, car en res de positiu no es toquen. Però de primer totes aquestes coses no assenyalen cap raó de la diferència, puix de la mateixa manera diré que dos plans es toquen, no en una superfície indivisible que en acte sigui un vertader ésser real, sinó que ho sigui només en potència, i es redueixi a l'acte per designació; o bé que es toquen en superfícies que ells no contenen formalment, sinó virtualment, o bé que es toquen negativament, i no positivament.

19. Després, absolutament, la resposta no m'és pas intel·ligible: puix el contacte real es fa en alguna entitat, que vertaderament i formalment sigui en les coses, car el mateix contacte real és i es fa pròpiament i formalment en la realitat de la cosa; doncs es fa en una vertadera entitat, que formalment sigui en la cosa, i, amb tot, es fa en cosa indivisible; doncs aital entitat indivisible és formalment en la mateixa cosa. Sinó que tal volta fos dit que aquella entitat hi és en potència, i no formalment, perquè de si no hi és separada, sinó unida a les parts; puix així hi haurà només diferència en l'ús dels noms; però igualment en serà de la última superfície, puix ella també no és de si separada, sinó unida. I les parts divisibles mateixes no són pas

d'aquell mode actualment en el tot, això és, dividides en acte, sinó en potència. Tampoc falta qui vingui a dir que les parts no són actualment en el continu, sinó per designació. Però debades usen aquella expressió singular, car ni serveix per a explicar la cosa, ni és vertadera en rigor. Puix, qui diu que les parts són en acte en el continu, no diu pas ser-hi dividides en acte, que el contrari s'inclou en la pròpia raó de part, però diu que en acte el componen per la seva entitat parcial, que no és fingida sinó vertadera; d'on ésser per designació, si la designació és vertadera, no exclou ésser en la realitat de la cosa, sinó que ho suposa més aviat; si no, la designació cauria sobre l'imaginari o fingit. I, si això és ver de la designació que es fa amb la intel·ligència, molt més d'aquella que es fa per aital contacte. Doncs, la raó presa del contacte, així talment urgeix en els punts o en les línies com en les superfícies.

20. I es pot declarar més d'aquesta manera. Fingim haver-hi en el cos esfèric alguna cosa o accident que sigui adherit al pla per contacte (ço que si bé tal volta naturalment no pugui fer-se, però bé es pot de potència absoluta), i que deixi en el pla un vestigi del seu contacte, llavors allò que hi resta, sigui com se vulla, restarà en alguna entitat real verament i formalment existent en el pla. D'on, així com dels accidents, que entenem quedar-se en la sola superfície, se'n pren argument de dar-se en acte la superfície terminant, així del predit contacte se'n pot pendre per a provar que es donen punts i línies en la superfície terminant. I d'aquí també és més improvada aquella resposta del contacte negatiu, ja perquè el mateix pot dir-se de qualssevulla cossos, com s'és mostrat; ja també perquè, si el contacte no fos positiu, una bola de coure caient sobre un vidre no el trencaria ni el mouria de lloc, ço que de si mateix és increïble. I aquella raó del terme intrínsec del cos finit a d'altres autors no els sembla eficaç, que pensen ésser finit suficientment en les seves parts per la negació d'ulterior extensió; però si aital raó s'admet, com de fet és probable, gairebé té la mateixa força en les línies i els punts, puix també la superfície mateixa és finita, i per tal deu haver un terme amb què es fineixi. I això es pot confirmar, car si, per exemple, el foc calant-se en l'estopa, i creixent contínuament, sempre té superfície terminant en qualsevol instant, en el qual l'abrandament arriba a un cert terme, doncs aquelles superfícies resten totes en el mateix foc augmentat i continu. La conseqüència és patent, ja perquè és major inconvenient que infinites superfícies apareguin i es fonguin successivament, que no pas que restin unides i continuades en el mateix foc, éssers permanents com són, i no repugnant-los el romandre ensems; ja també perquè, quan el foc avança més enllà de la superfície terminant, res hi ha destructiu de la superfície preexistent, puix la part de foc que se li agrega no li repugna, sinó que amb ella pot ésser terminada i unida.

QUINTA OPINIÓ QUE ADMET INDIVISIBLES EN LA SUPERFÍCIE EXTERNA, I NO EN MIG DELS COSSOS

21. Per tant, algú podria dir, o bé declarant la primera opinió mitjana, o bé pensant-ne una de nova, així com es dóna en acte la última superfície terminant, i no entre les parts del cos, dar-se així en aquella seva superfície línies i punts, encara que no se'n donin en mig dels cossos. Les quals línies i punts es diuen terminants, no pas perquè no continuïn parts algunes, sinó perquè són en l'últim terme del cos; i perquè, almenys per aquella part on l'extensió del cos no passa avant, aitals línies i punts no continuen, sinó que terminen.

DESAPROVACIÓ DE LA QUINTA OPINIÓ

22. Però aquesta sentència, fins explicada d'aquesta manera, no parla amb conseqüència. Puix, primerament, d'ella rebroten gairebé totes les dificultats que hi ha en la sentència comú; perquè, si hi ha punts en la superfície extrema, en ella sola seran infinits i infinitament infinits; i semblantment les línies, o, certament, hi haurà una línia tenint infinites parts de longitud determinada, com de la giratòria se sol dir. D'altra part aquella distinció no satisfà, perquè, si bé no són tan clares les experiències dels indivisibles interiorment existents en les parts del cos; però, un cop es manifesten en la última superfície, per paritat de raó entenem ésser en mig dels cossos; perquè, si són en la última superfície, no és sinó per determinar i continuar; però al mig dels cossos es troba la mateixa continuïtat; i la terminació, encara que no sigui senzillament i total, mes és parcial i per designació no fingida, sinó sota la qual correspon alguna vertadera realitat. Com el braç, si bé segons les parts interiors sigui continu amb la mà, mes en realitat és finit; doncs en la seva quantitat parcial deu ésser terminat, no pas de terme pur i propi a ell tot sol, sino comú a la mà, amb la qual es continua; i aquesta raó també prova, de les superfícies, que, si es dóna la última terminant, també es donen les intermèdies continuants.

23. I es declara més aquesta raó presa de la continuïtat. Suposem que es divideix una verga, que era contínua, de tal manera que cap quantitat se'n perdi i les parts fetes quedin totalment ensems i contigües, de tal manera que cap quantitat hi sigui interposada (i això no és dubtós poder-ho fer, almenys per virtut divina o angèlica). Aleshores pregunto: ¿per què, aqueixes parts, d'abans eren contínues, i ara no ho són? No pas per altra raó, sinó perquè perderen el terme comú que d'abans tenien; i aquell terme no és sinó una superfície existint al mig del cos. Els que solament admeten la superfície terminant, diran, tal volta, que aquelles parts ja no són contínues, no per haver perdut res, sinó per haver adquirit noves superfícies terminants. Però

de primer faig el mateix argument en les línies i punts, i prenc dos cossos perfectament esfèrics continus entre si, o dos cossos piramidals continus en un angle; que tals suposicions no impliquin gens de contradicció sembla com evident. Que se separin aquells dos cossos esfèrics, o les dues piràmides, i que tan sols es toquin, i pregunto: ¿Per què d'abans eren contínues, i ara no? Conseqüentment caldrà respondre que això s'és fet perquè per la disjunció varen adquirir dos termes que d'abans no tenien. Però aquests termes no són res, sinó punts en els cossos esfèrics, o línies en les piràmides. I, demés, de tots n'és la raó comú, perquè continuïtat és real unitat; doncs no pot consistir en la sola privació dels termes; doncs en quelcòm real positiu, amb què els extrems s'uneixin.

24. Però es pot dir intervenir-hi el mode real d'unió amb què les mateixes parts s'unien immediatament entre si, el qual és impedit pels termes resultants; però que aquest mode d'unió no és superfície o línia. Així com la matèria i la forma s'uneixen pel mode d'unió, que no és superfície ni res semblant. Però de primer diré, de la mateixa manera, resultar per la divisió un mode de terminació que no és superfície, sinó quasi mode d'ésser per si, o bé, tal com alguns diuen de la subsistència o existència per si, que consisteix en privació, així també al present més fàcilment es podria dir que les coses són discontínues per carència d'aquesta unió, sense altre terme positiu.

25. I, demés, en aquesta unió per continuació ocorre una raó particular, per la qual no sembla que les parts es puguin unir immediatament entre si pel sol mode d'unió, si no s'uneixen en algun terme indivisible; perquè aquelles parts són divisibles en infinit, ni s'uneixen per si immediatament en quelcom divisible, altrament minvaria la quantitat o extensió per motiu de la sola continuació, puix la part divisible gairebé es penetraria amb la part divisible, perquè, com dèiem damunt tractant de matèria i forma, dues coses no poden unir-se immediatament per si mateixes, si no són íntimament presents i gairebé penetrades en el mateix espai. Però aquesta unió, que és per continuació, tal es fa que les parts que s'uneixen, segons tot ço que en elles és divisible, restin fora les unes de les altres, i en diverses parts de l'espai. Doncs cal que s'uneixin per intervenció d'alguna cosa indivisible que per sa inextensió pugui tota unir-se íntimament a una part i altra, i així unir-les.

26. Demés, se sol fer aquesta raó física, presa d'aquell principi: que els agents naturals obren amb una diformitat uniforme per l'espai extens, i igualment dispost o contrari, com és patent en el sol il·luminant l'aire, puix il·lumina més les parts que li són més properes; i aquesta uniforme diformitat és contínua en tot el subjecte passiu; doncs no pot assenyalar-se alguna part intermèdia que sigui tota igualment clara; doncs hi ha algunes superfícies mitjanes indivisibles, en les quals la claror és rebuda en algun grau tot sencer. Però negaran aquesta última conseqüència els qui neguen les superfícies intermèdies, car per a l'acció uniformement diforme n'hi ha prou que qualsevol

part assenyalada del passiu, com més propera sigui a l'agent, tanta més de claror tingui. Però contra això obsten dues coses. Primerament, que si suposem no ésser el medi continu, sinó contigu, com l'aire i l'aigua, cal confessar necessàriament, en la última superfície de l'aire i en la superfície de l'aigua a ell contigua, haver-hi algun determinat grau de llum, puix en un subjecte determinat, i en distància intrínsecament determinada, no pot no ser-hi determinat l'efecte; doncs, per la mateixa raó, per bé que l'aire fos continu en aquella mateixa distància, que podem designar amb la ment, fóra el mateix determinat grau de claror; doncs n'hi hauria allà un subjecte capaç, que no pot ésser sinó la superfície; altrament, l'acció no fóra uniformement diforme. Segonament perquè, mentre el sol il·lumina l'aire, o el cel que li està de prop, és necessari que en la superfície convexa del cel contigu al sol s'hi rebi un determinat grau de claror que uniformement diformement minva en tot aquell cel fins a la superfície còncava del mateix cel, i en aquella última superfície còncava necessàriament hi serà la claror en un altre grau menor determinat per la mateixa raó feta damunt. Puix, sigui el primer grau de claror com a vuit, el darrer com a quatre, la raó conclou així: Aquella claror amb certa continua i uniforme diformitat minva del grau octau fins al quart; com que no pot passar contínuament d'un grau a un altre d'extrem, sinó pel mig, altrament la minva no fóra uniformement diforme, doncs és de necessitat que en algun subjecte intermedi hi hagi claror com sis i com cinc, etc. Però això no pot ésser sinó en un subjecte indivisible, que si no, l'acció no fóra uniformement diforme; doncs es dóna que en mig del cos hi hagi superfícies indivisibles, perquè el subjecte d'aquell grau no pot ésser altre, com és declarat.

27. De més a més, de la continuïtat del moviment, i de son començ i aturament, en treuen els filòsofs no lleus arguments per a provar que es donen els indivisibles, no solament en els extrems, sinó també en mig dels cossos. Però aquestes coses, com són tractades més llargament en els llibres dels físics, cal ara deixar-les; que depenen de molts principis que allí es donen; però algunes coses les tocarem més avall, tractant de la sucessió i continuïtat del moviment i del temps, i de la intensitat de les qualitats.

LA SEGONA OPINIÓ, QUE ADMET SIMPLEMENT AQUESTS INDIVISIBLES, ES PREFEREIX A LES ALTRES, I LA QÜESTIÓ ES RESOL

28. Entre les sentències esmentades, aquelles que són intermèdies, afirmant i negant en partida, a mi, francament, em semblen menys probables, perquè no poden parlar amb prou constància i conseqüència, ni en les assercions que proposen, ni en les raons amb què les confirmen. I això, al meu parer, ho convencen les raons i els discursos fets. Però les altres dues opinions extremes una i altra són plenes de dificultats; no gens menys, no sembla pas

dubtós que la sentència posterior és d'Aristòtil i rebuda pel consentiment dels filòsofs de pes. També és més conforme als principis tant de Geometria com de Filosofia, i més apta per a donar raó de molts efectes i per a tractar de moltes coses filosòfiques. Mentre que la sentència contrària solament es funda en algunes il·lacions de certes coses que semblen o difícils de creure o incloure inconvenients; a les quals pot satisfer-se de probable manera. I, per tal, jutgem preferible la sentència comú, que afirma donar-se aquests indivisibles, ja terminants, ja continuants, en la quantitat. Aital sentència no ens cal confirmar-la amb noves raons, puix les adduïdes ja ens semblen bastar.

29. *Si cal dir que els indivisibles són en acte, en el continu.* — Mes emperò, per declarar més això, es pot preguntar, en dir nosaltres que aitals indivisibles són en el continu, si cal entendre que són en acte o bé en potència. Puix Aristòtil, Sant Tomàs i d'altres, quan diuen que aquests indivisibles són en el continu, sovint declaren ser-hi en potència; i nosaltres semblem ensenyar que hi són en acte. En aquestes mateixes paraules hi pot haver una gran equivocació, i per això cal explicar-les. De dues maneres es pot entendre allò, *en potència*, com ja moltes vegades ho he tocat més amunt: d'una manera, en quant inclou negació d'actual existència; d'una altra manera, en quant diu negació de divisió actual. De la primena manera entenen Aristòtil els que neguen senzillament que aitals indivisibles es donin en acte; però resta preguntar-los, a aquests, si aquesta potència pot ésser d'alguna manera reduïda a acte real; car si no pot, ¿com és vertader haver-hi en el continu indivisibles, per bé que siguin en potència? Però, si pot, ¿quan o de quina manera aquella potència serà reduïda en acte? Respondran, segons opino, que aquella potència no pot ésser real, car dels mateixos indivisibles judiquen que no són éssers reals, sinó meres privacions; però, com que són concebudes de nosaltres a manera d'éssers positius, per tal, fins el mateix continu és concebut com existent en potència respecte dels indivisibles que en poden resultar infinitament. Però, si s'ha de parlar obertament, això no és res més sinó dir: Aquests indivisibles són éssers mentals, i en el continu hi ha algun fonament per a poder-se concebre o fingir. Això és fora de la ment dels filòsofs que així parlen, com és prou evident per si mateix.

30. Altrament, aquells qui admeten que almenys els indivisibles terminants són en acte en el continu, declaren que en mig del cos aquests indivisibles són en potència, puix per qualsevol banda que es divideixi el continu resultaran en acte. I, com que això infinites vegades pot fer-se, per això també es diu que són infinits en potència. Però, tocant als punts i línies, això no pot efectuar-se; puix, per molt que el continu es divideixi, mai resultaran línies o punts de tal manera terminants, que no siguin continuants, com damunt s'és provat; doncs, si no n'hi ha, de línies o punts en acte que siguin continuants, de la divisió del continu mai resultaran línies o punts en acte; doncs tampoc hi són en potència. Per tal, els que admeten la última superfície en acte, responen, d'ella òptimament i absolutament efectuar-se de la manera

dita, havent-hi en mig del cos infinites superfícies en potència. Però de la línia i del punt diuen que físicament sols s'efectua per designació; matemàticament, o bé per designació, o bé per la conformació de la figura; i lògicament, i per la potència de Déu, efectuar-se també segons l'existència real.

31. *Explicació de cada cosa:* puix, parlant físicament, la raó feta convenç que els punts o línies no poden reduir-se a l'acte d'existència per aquella divisió, o acció física; però per la designació es diu que són reduïts a l'acte, puix la ment concep les superfícies dividides, com terminades pels propis termes. Però per la mateixa exposició consta que aquesta reducció a l'acte no és vertadera, sinó imaginària. Car pregunto si per aquesta designació la ment concep verament aquell terme, com alguna cosa real positiva, i així és necessari que sigui de fet; o si solament concep una privació *a manera* de cosa positiva, i això és concebre o fingir un ésser mental. I així retornem al que abans deduíem: que aital ésser en potència no és res més que l'haver-hi en aquella magnitud fonament per a fingir aitals éssers mentals. I, semblantment, aquella reducció en acte per designació no és res, fora de concebre en acte un ésser mental, havent pres algun fonament de la cosa. La qual cosa es pot pendre, no solament de la divisió del continu, sinó també de la mateixa unió de les parts del continu.

32. Ni tampoc la reducció matemàtica, tal com aquests autors la declaren, és d'altra mena que la precedent. Puix diuen que els matemàtics en la línia recta, o en la superfície plana, amb la ment o amb el bastonet designen punts, no pas els que existeixen, sinó com si existissin, per a declarar amb aquest, a manera de signe, la continuïtat o terminació del continu. I aquest mode l'anomenen per designació, el qual no és divers del precedent, com consta de la cosa en si. Altrament, es diu que les figures fan això per conformació quan d'una línia o superfície recta en fan una de triangular o quadrangular; puix aleshores diuen resultar en els angles indivisibles terminants, o ajustadors de línies i superfícies; resultar (dic), no en realitat, sinó per designació de la ment; puix en realitat no hi ha sinó privació de tendència ulterior, o privació de divisió. I així es fa que també aquesta reducció en acte sigui solament en quant a l'actual ficció d'un cert ésser mental. I tot lo més hi ha de diferència que en aquelles figures sembla haver-hi major fonament per a fingir aquells indivisibles terminants, que no pas en les figures planes i rectes.

33. Endemés, segons la potència lògica es diuen ésser les línies i punts en potència perquè, si Déu (com pot fer-ho) conservés la superfície separada, aleshores, vertaderament, hi hauria en aquella superfície línies en potència; car, si aital superfície fos dividida, realment resultarien línies existents en acte i terminants, puix aleshores la superfície dividida, per aquella part en què fóra dividida, no es continuaria amb una altra, i, per tal, necessàriament hi hauria allí línia terminant, i no continuant, que fóra línia en acte; i el mateix proporcionalment cal dir dels punts en línia separada. Però de primer aquesta declaració és tan fora de la ment d'Aristòtil com fou fora de sa creença

o també de son pensament, de poder-se dar la línia o la superfície separada. Després aquesta sentència ajunta dues coses que, preses ensems, em semblen increïbles. La una és que la línia en acte quant a si mateixa és un vertader ésser real en l'ésser d'essència, i una vertadera espècie de quantitat, que, si tal no era, no podria ésser separada ni pel poder absolut de Déu; puix Déu no pot fer que existeixi res que sigui segons si mateix fora de l àmbit de la realitat. Altra cosa és que no res menys la línia vertadera no pot ésser en les coses per mode natural, sinó miraculós i mai realitzat abans d'ara, i del qual molts dubten que sigui possible, això és, que la línia sigui separada per si mateixa o en una superfície separada del cos quantitatiu. Car, si la línia és un ésser real possible, també és un ésser natural a sa manera; doncs és possible naturalment; o, més pròpiament parlant, és un accident segons la naturalesa d'alguna substància; que no és pas un accident d'ordre diví i sobrenatural; doncs pot ésser en alguna substància de manera natural; doncs o és senzillament impossible o no pot ésser solament en aquella abstracció. Finalment, fins admès aquell cas, es diu, sense suficient fonament, que per la divisió de la superfície separada resultarien línies terminants, perquè, així com ells diuen que aquelles parts foren d'abans contínues a si mateixes, així podrien i deurien dir, després de la divisió, ésser també terminades per elles mateixes, o per la negació d'unió o d'ulterior extensió. Sobretot que, dels punts, ells mateixos dubten si foren tanmateix éssers positius en la línia separada, recta i finida. I així entenen ells aquella línia terminada, sense res positiu terminant. ¿Per què, doncs, no entenen així la superfície? I, si hi entenen la superfície, ¿per què no també el cos? Mes tornem ja als arguments fets més amunt.

Com s'ha d'entendre que els indivisibles són en potència en el continu

34. En dir, doncs, que aquests indivisibles són en potència en el continu, no opino que s'hagi d'entendre aquella dicció *en potència* en quant exclou l'existència real, sinó en quant exclou la real divisió. La primera part la proven les raons fetes, i la posterior segueix de la primera. Amb això resulta, si *ésser en acte* es pren com oposat a ésser en potència de la primera manera, que així els punts són en acte en el continu, encara que hi siguin en potència en un altre sentit. I ésser aquesta la ment d'Aristòtil és patent pels llocs damunt adduïts, en els quals igualment de totes aquestes entitats matemàtiques ensenya ésser realment en els cossos físics encara que amb la ment se'n faci abstracció; i en la *Física*, per aquesta raó, diu que l'indivisible per si no es pot moure, però per accident pot fer-ho, és a dir, segons el moviment del continu on verament existeix. D'on també diu que el punt té posició en el continu. Finalment, de la mateixa manera parla d'aquestes entitats que de les parts del continu que ell diu ser-hi en potència. Així també Sant Tomàs, en el dit *Opusc.*, primerament diu així: «En la línia hi ha diversos punts, i

realment dividits mútuament *(això és, distints)*, així com els seus dos termes, i semblantment en sa continuació.» I, amb tot, més avall diu que en la línia hi ha dos punts en acte, i infinits en potència, cosa que cal entendre d'altra manera. Puix, de punts terminants com a tals, solament n'hi ha dos respecte d'una línia (s'anomenen *punts terminants* els que són en les superfícies extremes respecte de la línia recta, que s'entén ésser en la profunditat del cos); però els punts terminants es diu ésser infinits en potència, fins en ordre a l'existència real, puix aquells que són en acte continuant la línia mai no es fan terminants; però per la divisió del continu es treu el punt continuant, i en resulten dos terminants. I, com que aital resultància pot fer-se en infinit segons la divisió del continu, per això es diu que els punts terminatius són infinits en la potència real i física a sa manera, puix aquella resultància sempre es fa per alguna potència física, així com també el continu per alguna potència física és divisible en parts sempre divisibles. Per totes aquestes coses sembla prou declarada i confirmada la sentència comú, això és, que els punts, les línies i les superfícies són veres entitats reals existents en les magnituds o en els cossos, no solament en les superfícies externes, o termes, sinó també internament entre totes les parts de la mateixa magnitud i entre totes ses dimensions.

QUE EL PUNT, LA LÍNIA I LA SUPERFÍCIE ES DISTINGEIXEN REALMENT ENTRE SI, I TAMBÉ DEL COS

35. De la qual cosa tanmateix es conclou que totes aquestes coses no solament existeixen en realitat, sinó també que són, d'alguna manera, realment distintes entre elles. Per declarar i provar això, suposo que, si bé aitals indivisibles són en la magnitud, ella mateixa no es compon pas d'ells tots sols, ço que amplament prova el Filòsof, 6 *Phys.* I aquella raó demostra prou que, com els indivisibles, en quant tals, si són immediats, es toquin segons llur totalitat, i totalment siguin en el mateix espai indivisible, d'ells tots sols no es formaria extensió de magnitud. I he dit que no es componia d'ells tots sols, car, suposada la sentència que seguim, no ha de negar-se que aquests indivisibles intrínsecament entrin en la constitució de la quantitat contínua; puix l'íntegra entitat seva ni de soles parts ni de sols indivisibles prové, sinó de tots ensems. Com siguin dos els seus constitutius, això és, l'ésser extensa i l'ésser contínua, allò ho té de les seves parts, això dels indivisibles. I per això, si el punt es compara, per exemple, amb la línia contínua terminada i finita, hi és inclòs, i el mateix és proporcionalment dels elements restants; per bé que, si precisament es compara el punt continuant, o terminant, amb les parts que continua o termina, o bé un punt amb un altre, així cap d'aquestes coses inclou l'altra. Per aquesta causa, doncs, he dit en l'asserció distingir-se aquestes coses realment d'alguna manera; puix si es consideren com a component i compost, llavors es distingeixen com incloent i inclòs, o a manera

de part i de tot; però, si es comparen precisament, llavors es condistingeixen realment com dues parts, o dos components; car, si bé els punts no són parts, mes són d'alguna manera components, com és dit.

36. Doncs, així declarada, la conclusió em sembla evident, suposada la sentència que seguim. Puix una part de la línia es distingeix realment de les altres parts; per exemple, signant vers la fi de la línia alguna petita part, aquesta és realment distinta de la restant magnitud de tota la ratlla; doncs molt més el punt últim i terminant, suposat que realment es doni, serà realment distint de tota la restant entitat de la línia. I per la mateixa raó el punt que continua les parts serà realment distint d'elles, ja perquè per a cada part fa de terminant, ja també perquè no pot ésser realment una mateixa cosa amb ambdues parts ensems, com les mateixes parts es distingeixin realment entre si. Ni tampoc pot ésser la mateixa cosa sols amb una de les parts, per no haver-hi major raó per a la una que per a l'altra.

37. I es confirma primerament, puix dos cossos, per exemple, continent i contingut, en alguna cosa es toquen, i en alguna altra no es toquen; i en una tenen igualitat real, en les altres no en tenen; doncs aquelles coses en les quals es toquen i tenen igualitat es distingeixen realment de les altres en les quals no es toquen ni tenen igualitat; puix aquelles dues, en les quals es toquen, són gairebé penetratives i totalment ensems; però tota la resta de la quantitat que és en un cos és totalment impenetrable amb allò que és en l'altre. Es, doncs, cosa distinta la última superfície de la resta del cos, i la mateixa raó proporcional hi ha de qualsevol altre indivisible respecte a la quantitat que termina.

38. I segonament es confirma, puix aquí no pot entendre's prou que el punt o qualsevol indivisible terminant sigui solament un mode per la naturalesa de la cosa distint, i realment identificat amb la quantitat que termina. Perquè aquell terme, segons aquell mode d'entitat que té, és quelcom indivisible, com se suposa; doncs no pot ésser identificat realment amb res divisible. La conseqüència és patent, ja per la improporció, ja perquè pregunto: ¿A quina part divisible s'identifica? puix no se'n pot assenyalar cap determinadament, per no haver-hi major raó d'una que d'una altra; d'on per igual raó s'identificarà a tota la quantitat; i és cosa inintel·ligible que el mode indivisible terminant la línia en una de ses extremitats sigui identificat realment amb tota la línia. ¿Com pot ésser identificat amb tota, sense ésser coexistent a tota? O, si així és aquell mode en tota la línia ¿com la termina més aviat en una part que en una altra? La qual raó prova que el punt indivisible no es pot identificar amb qualsevol part divisible de la línia, ja es prengui determinadament, ja indeterminadament.

39. Finalment, d'aquestes coses també fàcilment es conclou que els mateixos indivisibles, com els punts, per exemple, comparats entre si, són realment distints, puix així es condistingeixen, que l'un de cap manera compongui l'altre. Demés, en realitat també disten de lloc, com és patent dels

dos punts extrems que terminen la línia, i el mateix és de qualsevulla punts de la mateixa línia, puix entre dos punts qualsevulla hi ha de mig una línia. I les mateixes raons es poden aplicar amb proporció a les línies i superfícies.

RESPOSTA ALS ARGUMENTS CONTRA ELS INDIVISIBLES TERMINANTS

40. *De punts o línies purament terminants cap se'n dóna. — De la superfície n'és altrament.* — Resta el fer resposta alsa rguments fets al principi. Al primer es respon que es donen indivisibles en magnitud, ja per la terminació, ja també per la continuació. I quant als arguments contra la primera part, concedim que el punt o la línia mai no es troba naturalment purament terminant; ço que no prové pas que, per terminar intrínsecament la quantitat, no sigui necessari un terme positiu, sinó que no es troben en les coses línies i superfícies separades dels cossos; i en el mateix cos no hi ha cap part de línia o de superfície que no sigui conjunta a les altres parts d'ambdós extrems; altrament, entre les superfícies se'n dóna alguna de purament terminant, com hem dit damunt. I a la rèplica que, llevat aquest terme, la quantitat quedaria tan finida i limitada com d'abans, es respon: Si aquesta separació es fa solament per precisió mental, així queda certament en l'enteniment la línia finita negativament, però no s'entén així positivament terminada, com cal en realitat. Però, si la separació suposa fer-se en la mateixa cosa, neguem que tal separació pugui fer-se, perquè en la realitat no pot ésser la quantitat finita negativament, això és, sense ulterior tendència, si no és també positivament terminada, i tancada en sos termes.

41. *La línia, el punt i la superfície ¿es poden separar entre si i del cos?* — Però instarà algú: Si aquella superfície extrema és cosa realment distinta, almenys de potència absoluta Déu la podrà separar, i conservar sense ella tota la magnitud restant; que damunt és estat dit que les coses realment distintes poden separar-se la una de l'altra, i separades conservar-se. Molts responen negant la il·lació, puix aquella regla no és tan general i certa que alguna vegada no hi pugui intervenir repugnància, com en el cas present n'hi ha, que la quantitat resti finita en realitat, i no terminada. O també es pot dir seguir-se molt bé de la distinció que Déu pot separar mútuament l'un de l'altre, i també conservar l'un sense l'altre, però no en estat que impliqui contradicció. I així Déu podrà separar la superfície externa del cos, i conservar-la separada, llevada la unió amb el cos, i dant-li un altre mode d'existir. I, a l'inrevés, podrà conservar el cos sense tal superfície, perquè d'aquesta es distingeix; però no podrà conservar-lo totalment interminal, o sense cap altra superfície, perquè això implica contradicció. Però últimament, afegeixo, no veure's tan clara aquesta repugnància que no es pugui dir probablement poder conservar Déu la línia sense el punt terminant, i la superfície sense la línia, i el cos sense superfície; però, en aquest cas, aquella quantitat és finita per negació d'ulterior extensió, i no per la terminació intrínseca i positiva

que requereix segons la connatural manera de ser. Així com, els qui opinen poder Déu conservar la naturalesa creada sense subsistència pròpia o forastera, diuen no res menys que aital naturalesa demana un terme positiu de subsistència per la connatural manera d'existir. I, aquesta necessitat natural, al present pot declarar-se *a posteriori*, perquè el cos careixent de terme intrínsec no fóra apte per al contacte físic amb els altres cossos, ni per la figura, ni altres semblants accidents. D'on no fóra tampoc perfectament íntegre, i consumat segons la seva extensió. Bé es pot entendre, doncs, ésser aital terme necessari per la naturalesa de la cosa, encara que per potència absoluta pugui separar-se. Fins de vegades és probable que es pugui impedir naturalment, com després veurem.

ES RESPON ALS ARGUMENTS CONTRA ELS INDIVISIBLES CONTINUANTS

42. *Al primer. Al segon.* — Quant a l'altra part dels arguments, diem que també són necessaris aquests indivisibles per a la continuació de les parts de la quantitat. Però a la primera impugnació ja és estat respost requerir-se aquests indivisibles també per a la terminació. I per això per aquesta raó no s'exclou que també es requereixin per a la continuació, per bé que, continuant les parts, les terminin en les seves quantitats parcials. Més aviat això confirma la raó de la necessitat. Respecte a la segona impugnació ja s'és mostrat, també, que les parts divisibles i extenses no poden unir-se entre si immediatament segons l'extensió, perquè no poden, segons alguna part divisible, ja determinada, ja indeterminada, ésser ensems en el mateix espai; del terme indivisible n'és altrament; puix ells poden unir-se immediatament per si, i així mitjançant ell poden juntar-se i unir-se entre si. Si, però, fora de l'entitat del punt i de les parts de la línia, sia necessari el mode d'unió entre ambdues coses, ho diré més avall.

43. *Al terç.* — Quant a la tercera impugnació, cal concedir haver-hi en el continu, i en qualsevulla part d'ell, infinita multitud de punts, ni això és cap inconvenient, perquè tota aquella multitud de punts és no més segons com, boi component tota ella ensems amb les parts de la línia una línia finita. Per tal, no se segueix que es pugui dar una multitud infinita d'éssers distints en acte, ja quantitativa, ja transcendental, perquè aquella fóra infinitat en acte i senzillament, ni fóra closa per cap terme, com vertaderament és closa la infinitat de punts; puix entre dos punts d'una línia hi ha altres punts infinits. Ni entre coses actualment discretes pot entendre's que, designada una qualsevulla, no se'n pugui designar la immediata, o bé en ordre de situació si són cossos, o bé en ordre de perfecció si són esperits. Mes emperò en aquesta multitud de punts, després de designat un qualsevol, no se'n pot designar cap altre a ell immediat en el mateix continu. I, com en la línia es pugui designar el primer, però no el segon, i com es doni l'últim, però no el penúltim, coses són totes que demostren ésser aquesta infinitat d'una cons-

titució molt diferent de la infinitat de la quantitat discreta; i al mateix temps indiquen que aquesta és una infinitat imperfecta en partida i potencial, i que, per tant, d'ací no es pren argument suficient per a demostrar que la multitud infinita és possible, ni per la potència de Déu absoluta. D'això cal tractar-ne altra part.

44. *Al quart. — Si tots els punts es poden separar de la línia.* — Quant al quart de la separació de tots els punts de totes les parts de la línia, doblement es pot entendre que es fa aital separació. Primerament, conservant ambdós extrems; segonament, destruint-ne un, i conservant l'altre; car, si ambdós ensems es treien de la naturalesa de les coses, no hi hauria separació, sinó absoluta destrucció, que gens de força donaria a l'argument. Altrament, quant a la primera manera, es pot judicar que això no repugna de part de cap dels dos extrems; puig de les parts del continu es pot dir que aleshores no quedarien totes dividides en acte, car, si bé naturalment s'uneixen pels seus continuatius, però Déu les podria unir d'una altra manera sobrenatural, així com Soto i d'altres que admeten unir-se les parts formalment per la quantitat diuen que Déu pot conservar-les unides sense quantitat unint-les per una altra manera preternatural. O bé així com dèiem, ara de poc, que Déu pot conservar la quantitat sense la superfície terminant, encara que naturalment es termini per ella.

45. Però, amb tot i això, quant a aquesta part, penso ésser impossible aital separació, de manera que Déu conservi la línia sense indivisibles continuants, car no es pot conservar la línia sense l'extensió quantitativa, com aquesta li sigui essencial; i (segons proven els arguments damunt fets) aquella extensió no pot consistir en la immediata unió de les parts quantitatives entre si, i per això és necessari, i per això cal que es faci en algun indivisible continuant les parts, el qual, per tant, respecte d'ambdues parts és com la causa formal de llur unió; però respecte de cada part, fa com d'altre extrem, en el qual es fa la unió. Així com Déu no pot conservar l'efecte formal sense la causa formal, ni la unió sense els seus extrems, així no pot conservar les parts de la quantitat unides sense els indivisibles que uneixen. I tampoc es poden conservar aquelles parts sense cap unió, puix això inclou repugnància, com sigui de l'essència d'aitals parts que tinguin alguna divisibilitat o extensió dimensiva, que sense continuació no pot pas existir. Si, però, es podria pensar o imaginar que Déu conservés les parts de la línia unides per altres indivisibles, que no siguin punts, sinó éssers d'una altra constitució, ho deixo disputar a d'altres; puix és una ficció inútil, i a mi em sembla impossible, car ni aitals indivisibles tindrien una altra manera d'entitat, ni altre efecte formal; ni la línia és d'altra continuació fora d'aquesta, que li és connatural i gairebé essencial.

46. Però de l'altra mena de separació es veu menor repugnància de part de l'altre extrem; puix, com els punts no tinguin cap extensió, no s'hi veu cap inconvenient que restin tots dividits en acte, destruïdes totes les

parts de la línia. Però, amb tot, sobre això podem parlar de cada un dels punts, o de tota la col·lecció. De cada punt, i de qualsevulla multitud finita d'ells, gairebé tots els que judiquen tenir aquests indivisibles pròpia entitat, concedeixen poder-se d'aquesta manera conservar separats els indivisibles, així la superfície sense el cos com la línia sense la superfície, i, conseqüentment, també el punt sense la línia; i és prou versemblant, puix cap oberta repugnància no s'hi veu. Segons la qual sentència cal dir que el punt no s'uneix a la línia sinó mitjançant algun mode d'unió per la naturalesa de la cosa distint del punt; puix, si pot l'entitat del punt quedar en la naturalesa de les coses, i no unida, doncs l'ésser unida afegeix quelcom a l'entitat del punt, en realitat separable d'ella; doncs afegeix el mode d'unió, car per ell es diu unida formalment; i aquest mode, parlant amb conseqüència, més probablement es posarà en si mateix extensivament indivisible, i identificat almenys amb el sol punt, mes terminat en les parts de la línia, com en extrems d'unió. Altrament, en les mateixes parts no convé fingir altres modes d'unió, perquè ni són necessaris, ni fàcilment es poden entendre identificats amb les parts divisibles. Però podia dir algú, no totalment sense probabilitat, que el punt és una entitat tan diminuta, que per la seva existència real requereix essencialment la conjunció amb la línia, i que, per tal, no s'hi uneix per un altre mode d'unió, distint de si mateix per la naturalesa de la cosa, sinó per si mateix. D'on es fa conseqüentment que el punt de cap manera es pugui conservar separat de la línia; i el mateix caldrà dir de la línia respecte a la superfície, i de la superfície respecte del cos. Però, per bé que això que he dit sigui probable, amb tot, suposant que aquestes són vertaderes realitats, és més conseqüent i versemblant la primera manera de dir.

47. Mes emperò, parlant de tota la col·lecció de punts existents en la línia, la dificultat és major. Puix de ço que s'és dit sembla seguir-se que tampoc en això no hi ha repugnància; car, si es pot conservar el punt separat, i, com se'n conserva un, així poden conservar-se'n més i més en infinit, ¿per què no podrà conservar-se tota una col·lecció de punts existents en una línia? No res menys és més probable que això no pot fer-se. I se'n pot dar la raó per l'opinió comú, que repugna dar-se multitud infinita en acte, i pels inconvenients i absurds que se solen deduir d'aquella posició, que ara ometo. Altrament la raó que a mi de present em sembla més probable és perquè els punts no es poden separar de la línia sinó destruint les parts de la línia; i no es poden destruir parts de la línia sense destruir-se també els punts, de què consta intrínsecament; puix, si bé (com vaig dir) la línia o una part de línia no consta de sols punts, però ella els inclou tan intrínsecament que no és possible concebre part d'una línia en què no siguin inclosos punts. Es, doncs, impossible destruir les parts d'una línia sense destruir els punts; així com, al contrari, és impossible que resti part d'una línia si no resten els punts. Doncs per aquesta raó és impossible, destruïdes les parts d'una línia, que es conservi separada tota la col·lecció dels punts.

48. *Al cinquè. — Si els indivisibles existents en el continu són infinits en acte.* — Quant al cinquè de la línia infinitament extensa existent en el continu finit, es respon que, per la raó feta allí, es prova rectament que en un continu no hi ha multitud de línies (proporcionalment és el mateix de les superfícies), perquè totes les línies, que a manera de multitud en aquell continu són de nosaltres considerades, són parts d'una mateixa línia que d'infinites maneres circueix i volta el mateix continu; puix totes entre si es continuen per alguns punts. I, per tal, com damunt deia, no es pot trobar en tota la línia algun punt terminant-la de manera que també no la continuï. I d'aquí responem a l'altra dificultat concedint haver-hi en aquella línia infinites parts iguals, i actualment unides en algun o alguns punts, com l'argument convenç; no res menys per això no componen una línia senzillament infinita en acte, perquè de tal manera s'uneixen entre si que es clouen dins d'una magnitud finita i entre termes definits, i de certa manera confusa s'uneixen entre si per a circumscriure i compondre una magnitud finita. I per aquesta raó ja no és convenient el dar-se una línia infinita closa per punts extrems, perquè aquella infinitat no ho és senzillament, sinó en partida, i aquells punts no són senzillament terminants, sinó continuants, segons aquella faisó en què es troben tots els punts en una línia circular.

49. I si instes per què se segueix tenir aquella línia tantes parts iguales en la columna d'un peu com en la de dos peus, per què tants cercles iguals té en les parts proporcionals de longitud pedal com bipedal; puix tantes parts proporcionals té la columna pedal com la bipedal, les quals totes són iguals entre si quant a la gruixària: a això molts responen concedint la seqüela, perquè entre els infinits no pensen que se'n pugui donar un de major o menor que l'altre; puix aquestes són propietats de la quantitat finita com ho diuen amplament Gregor., *In* 4, *dist.* 44. *quaest.* 4; i Escot, *In* 2, *dist.* 1, *quaest.* 3, i d'altres. I per aquesta raó diuen haver-hi tants punts en el cercle menor com en el major; car, si l'un és inclús en l'altre, totes les línies que poden fer-se partir del centre tallen cada circumferència en algun punt, i amb tot, són aquelles línies simplement infinites. Però, encara que sigui cert que un d'aquests infinits no pot ésser major que l'altre en alguna certa proporció, però no puc absolutament capir que no hi hagi més en el tot que en les parts preses separadament i d'una a una, puix el tot conté tot ço que hi ha en alguna part, i quelcom més. Per tal, d'aquella manera que un infinit pot ésser part d'un altre, no hi ha per què repugni l'haver-hi més punts en el tot que en la part, o més parts de línia en una columna de dos peus que no pas en una altra d'un peu. Però d'això ja n'hi ha prou.

SECCIÓ V, § 67

COM LES PARTS S'UNEIXEN EN EL PUNT

67. Al setè argument es respon que aquests indivisibles que uneixen no tenen pròpiament contacte a les parts que continuen, ans se'ls uneixen intrínsecament. Ni en la línia pot designar-se part adequada a la qual el punt s'uneixi, puix cap de les parts segons sa totalitat és immediatament en el punt; altrament o ella fóra així indivisible com el punt, o el punt fóra quasi extens o present a un espai o línia divisible. Doncs el punt uneix les parts de la línia unint-se tot indivisiblement a cada una, no adherint-se a tota alguna part divisible determinadament, sinó quasi íntimament assistint a ambdues parts. I això tan forçosament cal dir-ho si solament se suposen en les coses els indivisibles terminants com si també s'hi volen els terminants. Altrament confesso que aquest argument no debilita poc la raó feta més amunt del contacte de l'esfera en un punt, o del pla en una superfície. Però, amb tot, com que aquell contacte és entre coses no unides, i no pot ésser amb alguna penetració, sembla necessari que sigui en els termes indivisibles; però aquí, com que es fa intrínseca unió entre la superfície i el cos, o la línia i el punt, es pot entendre millor que la superfície s'uneix immediatament per si mateixa a l'entitat del cos, si bé en aquella entitat no pugui assignar-se tota alguna part a la qual s'uneixi. I el mateix és del punt respecte a les parts de la línia. Ara, quina eficàcia tingui (que això també es toca en aquell argument) el discurs amb què Aristòtil, en el 6.è *Phys.*, prova que l'indivisible, de si, no pot moure's, cal remetre-ho a aquell lloc. Car, tant se val que es donin els punts en acte com no, el discurs d'Aristòtil té la mateixa dificultat, que ell no suposa pas dar-se el punt separat, però inquireix, en la suposició de que es donés, si podria de si moure's. I semblant qüestió hi haurà, si es dóna en l'esfera, de si podria moure's per accident, es donés o no en acte.

E. DE RAFAEL VERHULST, S. I.