
EDUARD TORROJA I CABALLÉ

(† EL 14 DE SETEMBRE DE 1918)

L'Il·lustríssim Sr. Dr. D. Eduard Torroja i Caballé va nèixer a Tarragona el 1.^{er} de febrer de l'any 1847, fill del Catedràtic de Geografia i Història de l'Institut de la mateixa, D. Joan Torroja i Monlleó i de D.^a Josefa Caballé i Plana. Fins a l'any 1861, en què amb molt bon resultat i qualificació de «Sobresaliente» va ésser graduat de Batxiller en Arts en l'Institut de la seva ciutat natal, no es va moure de la mateixa i del costat de la seva família. L'any següent va passar a Barcelona, on es va graduar de Pèrit agrònom, i des de llavors fins a la seva mort, la seva vida va ésser quasi tota a Madrid, fora del curs 1875-1876, en què fou catedràtic a València i dels istius que venia a passar tot sovint a la seva terra.

A Madrid va ésser estudiant de la Facultat de Ciències i de l'Escola d'Arquitectura de 1862 fins a 1869, graduant-se de Batxiller en Ciències en 1864 i de Llicenciat en 1866; el títol d'Arquitecte el va adquirir en 1869 i el de Doctor en Ciències molt més tard, en 1873. De l'any 1869 fins al 1874 va exercir els càrrecs d'auxiliar de la Facultat de Ciències de la Universitat Central, substituït de l'assignatura de Geometria Descriptiva i ajudant, per oposició, de l'Observatori Astronòmic i Meteorològic; demés, jurat extraordinari a l'Escola d'Arquitectura. De tot aquest temps no hem pogut obtenir cap escrit; fóra interessant poder estudiar en els seus apunts d'estudiant i cartes íntimes la gènesi de la seva vocació a la Geometria de posició o sintètica.

De l'any i mig en què fou catedràtic a València de Complements d'Àlgebra, Geometria i Trigonometria i Geometria Analítica, hem pogut llegir el discurs de començament del curs 1875-1876, fet al final de la seva estada a la ciutat del Túria. Està redactat amb el foc dels vint-i-vuit anys i l'entusiasme de l'enamorat de la Ciència pura i exacta, la qual cosa prova que la multitud d'estudis, oposicions i treballs els més diferents havien influït molt poc en la direcció recta, enlairada, amb els seus matisos romàntics, de la

seva existència; si fins llavors havia estat arquitecte i astrònom, en endavant no serà més que matemàtic.

El 29 de gener de 1876 fou nomenat, per tercera oposició, catedràtic de Geometria Descriptiva de la Universitat de Madrid, de què havia estat abans auxiliar i substitut. Aqueix càrrec el va ocupar prop de quaranta anys, i en ell, més que en altra cosa, és on va adquirir més mèrits. Al crear-se, l'any 1900, en virtut de la reformació de la Facultat de Ciències pel ministre d'Instrucció Pública, Sr. Garcia Alix (1), la càtedra d'Estudis superiors de Geometria, va ésser acumulada al Dr. Torroja; i al mateix temps la classe alterna de Geometria Descriptiva va admetre cinc classes setmanals, amb la qual cosa va poder ampliar les seves explicacions. En els articles necrològics que vaig publicar a *Ibérica* (2) he descrit la seva manera de donar la classe, i no hi ha necessitat de repetir-ho en el present lloc; sols faré constar la necessitat que sentia el seu esperit en qualsevulga demostració de veure la raó de totes les proposicions i raonaments intermedis. Aquesta necessitat era conseqüència i origen alhora de la seva claredat d'idees i, per això, la seva acció de professor ha estat més sòlida, ordenada i profunda que la d'altres, que havent tocat problemes més difícils i escrit i donat conferències sobre els mateixos, no han influït tant en l'avenç de la Ciència matemàtica a Espanya.

* * *

El primer escrit tècnic que hem pogut obtenir no pertany a la Geometria: és un article publicat en la *Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias*, de Madrid, a 20 d'abril de 1876. És curt i s'intitula: «Demostración de las relaciones más importantes entre los elementos de un triángulo esférico». Conté la demostració, pel mètode general de les projeccions, de les cinc fórmules fonamentals de la trigonometria esfèrica. Actualment aquesta demostració es troba en tots els textos de Trigonometria; mes llavors s'usava solament el pesat procediment de provar-les primer pels triangles acutangles, i per medi d'ells s'estenien als triangles generals. El Dr. Torroja tenia molt afecte a aquest procediment, *per la raó formal d'ésser general*; això feia que quan en unes oposicions, de les quals ell fos jutge, algun opositor la donava, si després volia provar que les fórmules es podien *estendre* al cas de triangles obtusangles, somrigués lleugerament per

(1) Aquesta reformació ha estat molt lloada per uns i molt vituperada per altres; lleugerament modificada dura fins ara. Com totes les lleis fetes més per raons particulars que per l'interès general, té quelcom de bo amb molt de dolent; l'inspirador tècnic d'aquest pla va ésser el catedràtic de Geodèsia, Sr. D. Eduard León i Ortiz, molt poc afecte al Sr. Torroja. Aquest, per tant, no va tenir gaire influència en tal reformació; i positivament ens consta, per conversa amb el mateix, que distava molt, al seus ulls, d'ésser l'ideal de l'ensenyança de les matemàtiques; ell concebia com a convenient l'acció d'un o dos professors (i no de vuit o deu sense coordinació) eminents amb absoluta independència de programa.

(2) V. els números 246 i 254 de l'esmentada publicació.

la feina, no sols inútil, sinó perjudicial de l'opositor, car era senyal evident que no l'havia entès. No coneixem altre escrit en castellà que precedeixi el del Dr. Torroja en aquesta matèria; si no fou, doncs, l'introductor, certament va ésser dels que més contribuïren a la difusió del procediment de les projeccions per la demostració de les fórmules trigonomètriques.

* * *

Després d'aquest curt escrit, publicat poc després de la seva arribada de València a Madrid, tal volta explicat en les lliçons de Trigonometria a València, tal volta inspirat (1) per la lectura dels notables «Estudios trigonométricos», publicats pel que va ésser ministre català, D. Albert Bosch i Fustegueras a la *Revista de la Universidad de Madrid*, apareix una sèrie d'obres que formen el nucli de les publicacions del mateix i de les quals consecutivament donarem ara compte, així perquè formen un conjunt gradual, com perquè les altres publicacions intercalades cronològicament, fora d'una sobre les determinants, s'entenen i expliquen fàcilment quan es coneix aquest nucli.

Es compon de cinc textos, resum d'explicacions de classe:

Axonometría o Perspectiva Axonométrica. Sección primera, Madrid, año 1879.

Resumen de algunas lecciones de Geometría Descriptiva explicadas en la Universidad Central en el curso de 1879-1880. (Manuscrito.) Madrid, 1880.

Programa y Resumen de las lecciones de Geometría Descriptiva explicadas en la Universidad Central. Tomo I. Madrid, 1884. (Manuscrito.)

Tratado de Geometría de la Posición y sus aplicaciones a la Geometría de la Medida. Madrid, 1899.

Teoría geométrica de las Líneas alabeadas y Superficies desarrollables. Madrid, 1904.

* * *

La *Axonometría o perspectiva axonométrica* ofereix una circumstància que no hem vist en cap altra publicació de Torroja: porta al final una bibliografia, modesta, però que revela les fonts d'on ell va treure el seu esperit geomètric. La *Darstellende Geometrie*, del Dr. W. Fiedler, 1875; el *Traité de Géométrie descriptive*, de J. de la Gournerie, 1860; la *Darstellende Geometrie*, de K. Pohlke, 1875; *Polar und Parallel Perspective*, de G. De-

(1) Així ho insinua el seu deixeble i actual successor en la càtedra de Geometria Descriptiva, D. Josep Gabriel Álvarez Ude, en l'article amb què s'ha inaugurat aquest any la *Revista Matemática Hispano-Americana*, tom I, núms. 1 i 2. Madrid, gener i febrer de 1919. Aquest article, així per l'autoritat de l'autor, com per la íntima i llarga coneixença i tracte que aquest va tenir amb el Dr. Torroja, queda recomanat per si mateix.

labar, 1870, i *Corso teorico-pratico di Disegno Axonometrico*, de C. Agostino, 1861. ¿Coneixia en aquest temps la *Geometrie der Lage* i els *Beiträge*, de Staudt? No és fàcil deduir-ho; el que és cert és que al cap de cinc anys, no sols la coneixia, sinó que se l'havia perfectament assimilat i l'exposava, i després tots els seus treballs estan impregnats de l'esperit del geòmetre d'Erlangen, fins el punt que ell es pot dir l'introductor a Espanya dels mètodes de la Geometria sintètica, especialment dels de Staudt.

En el pròleg dóna compte Torroja de la raó d'ésser del llibre: uns quants articles publicats en els *Anales de la construcción y de la industria*, estaven dedicats a donar a conèixer a Espanya aquest mètode de representació en el pla de les figures de l'espai, usat quasi exclusivament en els textos de Geometria elemental i de Cristal·lografia, i molt freqüentment en els tractats de Construcció, Màquines i Física experimental. En aquells articles exposava el mètode de Projeccions axonomètriques des del punt de vista de les aplicacions, com ho feia La Gournerie; en canvi, en el llibre d'Axonometria, sense oblidar-se de les aplicacions, cerca sobretot una exposició científica, breu i clara, però força completa, del sistema axonomètric de representació, com a cas particular de la perspectiva-relleu (1), per fer veure les relacions d'aquell amb els altres sistemes de representació. El llibre té 120 planes i havia d'ésser completat per un altre, sense dubte molt més extens, en el qual s'exposaria tota la Geometria Descriptiva per medi de la perspectiva axonomètrica: els canvis de plans i els rebatiments, i les regles per a trobar els eixos més adequats per resoldre els problemes proposats, i llurs aplicacions, foren la confirmació més eloqüent de la fecunditat del mètode. Però malgrat dir en el pròleg que aquesta segona part estava en caixa, el cert és que no va aparèixer, tal volta perquè l'autor va creure convenient ampliar altres parts de la seva assignatura.

El llibre conté tres capítols: el primer, intitulat *Nociones preliminares*, conté dos paràgrafs: § 1. *De las figuras homológicas y de la perspectiva-relieve*, on dóna compte d'aquest sistema general de representació; defineix els elements dobles, els límits i els d'esvaniment, les distincions dels quals dóna lloc als distints sistemes de representació usats en la pràctica: en l'escultura els plans doble, límit i d'esvaniment es confonen amb el de l'infinit; en la pintura el pla doble i el límit es confonen, i el d'esvaniment passa pel centre de perspectiva. El § 2. *Sistemas de representación por medio de las figuras planas*, explica com a fonament d'ells la perspectiva plana: cònica, si el centre està a distància finita, i d'ací el sistema cònic; cilíndrica, si és a l'infinit: d'aquesta es deriven, com a casos particulars, el sistema de representació de plans acotats, usat en Topografia, i mapes terrestres i marítims; dièdric o de Monge, i l'axonomètric, que fuig l'inconvenient de les figures de perfil, en què els dos primers claudiquen.

(1) Aqueixa idea és de Fiedler

El capítol II, intitulat *Problema fundamental de la axonometria. Elementos que en él intervienen*, té cinc paràgrafs: El § 1. *Manera de determinar un punto en este sistema*, explica els dos sistemes, ortogonal i clino-gonal, i les escales de reducció de les longituds lineals; § 2. *Estudio de los ejes y planos coordenados*, és un capítol de trigonometria esfèrica; § 3. *Posición de los ejes coordenados respecto al plano de proyección*, conté una porció molt original d'exercicis de resolució de trièdres i tetràedres amb determinats elements; § 4. *Dirección de los rayos proyectantes*, considera l'últim element de la perspectiva axonomètrica i els exercicis que posa són també molt originals i instructius; § 5. *Proyección de los ejes y coeficientes de reducción*, completa la teoria. El contingut d'aquest capítol, més o menys dilatat o escurçat i lleugerament modificat, ha passat a tots els tractats de Geometria descriptiva escrits en castellà, que han tractat del mètode axonomètric de representació.

El capítol III està dedicat a resoldre el problema de l'axonometria en distints casos, o sia amb diferents dades que es poden proposar. Sempre suposa conegut el trièdre dels eixos: si es fixa la posició d'aquest respecte del pla de projecció, sols falta donar o la direcció dels raigs projectants, o la projecció dels eixos en el pla de projecció, o les escales de reducció segons els eixos, per a tenir els altres dos d'aquests elements; si es dóna la projecció dels eixos i la direcció dels raigs projectants, sia respecte d'aquests, sia respecte el pla de projecció, es poden també determinar els restants elements; si, per fi, es donen les escales axonomètriques o de reducció respecte als mateixos, amb la projecció dels eixos, o la direcció dels raigs projectants respecte d'aquests, o respecte del pla de projecció, també es poden determinar els restants elements. A propòsit d'aquest últim cas dóna Torroja la demostració del teorema de Schlömilch (1), molt conegut ara en perspectiva axonomètrica ortogonal. Aquest capítol termina amb un paràgraf sobre els casos més corrents en Cristal·lografia i Dibuix, i amb una taula numèrica per a determinar amb eixos rectangulars i axonometria ortogonal, donades les escales axonomètriques, els restants elements.

* * *

(1) Actualment, de Schlömilch - Weisbach. Torroja, sense despreciar l'erudició, no en feia gaire cas; més estudiós i amant de la meditació que de l'ostentació i la publicitat, rares vegades inclou en els seus escrits noms propis i cites bibliogràfiques, si no és en els casos clàssics, com en el teorema de Pascal, etc. Que ell era més amic d'estudiar un llibre que de fullejar-ne vint ens consta perfectament; quan després es posava a escriure havia remogut massa dintre del seu cap les idees per no donar-los, almenys, una forma nova de presentació, per la qual ell no les distingia d'aquelles que eren pròpiament i exclusivament originals. Això fa molt difícil la determinació d'aquestes, sobretot en els seus tractats; sense negar que fóra interessant tal determinació, és el cert que la seva principal glòria estaria en haver importat a Espanya la Geometria de Posició de Staudt, i així haver creat una escola de geomètres espanyols.

El *Resumen de algunas lecciones de Geometría Descriptiva*, de 1880, és el primer germen, l'embrió de la *Geometría de la Posición*. Al començament de l'*Axonometría* havia dit: «El objeto inmediato de la Geometría Descriptiva es la determinación de las figuras por medio de otras más sencillas o más apropiadas a las cuestiones que estudia.» Ara comença: «La Geometría Descriptiva tiene por objeto el estudio de las propiedades de las figuras o formas geométricas y la resolución de problemas sobre las mismas, valiéndose de otras figuras más sencillas íntimamente relacionadas con ellas.» Aquest petit canvi de definició prova el petit canvi que en el seu esperit ha tingut respecte de la posició de la seva càtedra: no és de dibuix, ni de mera representació, sinó d'estudi de les formes geomètriques, no isolades, sinó íntimament relacionades amb altres més senzilles, representació de les primeres, i que es dibuixen i representen per si mateixes. Per això era convenient donar una introducció sobre les formes relacionades, i entre les relacions escull, com més natural i a propòsit per a la Geometria Descriptiva, la homografia, tal com era exposada per Chasles (1), per medi de la raó anarmònica, o sia de propietats mètriques.

En el pròleg defineix clarament totes les categories i espècies de figures geomètriques, respecte dels elements fonamentals, punt, recta i pla. En la primera part estudia les figures de primera categoria: primer, determinant els seus elements per medi de la raó anarmònica; després, estudiant la relació projectiva, en les figures de diferent o de comú base. En la segona part estudia les figures de segona categoria, primer determinant-les per dues de primera categoria (Staudt), després relacionant-les projectivament considerant els elements notables, i, per fi, estudia les figures homològiques de bases diferents i les de base comú. En aquesta segona part posa molt de relleu la llei de correlació, i, per això, estén a les figures radiades les propietats de les figures planes (2).

* * *

En el pròleg de la tercera obra, *Programa y Resumen de las lecciones de Geometría Descriptiva*, dóna compte de la modificació que ell ha fet de

(1) ¿Coneixia en aquest temps les obres de Steiner i Staudt? De les segones podem dir que sí, però no havien estat penetrades com amb el temps ho foren, perquè les idees de Staudt, ara diluïdes i quasi ofegades en les de Chasles, han de predominar quasi exclusivament en les últimes publicacions. Més difícil és la resposta respecte de Steiner: les lliçons se deturen en les formes de primera i segona categoria, com en la *Syntetische Geometrie*, i el pròleg qualsevol diria que s'escriu sota la impressió de la lectura de la *Systematische Entwicklung*; demés ens consta que vint-i-cinc anys més tard, ell coneixia perfectament l'obra geomètrica de Steiner, molt semblant, però més profunda que la de Chasles; aquest conjunt ens indueix a creure que realment ell coneixia Steiner, almenys sense diferenciar-lo gaire de Chasles.

(2) El Sr. Álvarez Ude, en l'article ja citat, creu que En Torroja va ésser el primer de fer aquesta extensió.

la Geometria Descriptiva, per fer-la enterament independent de l'Analítica. L'obra està tota ella informada per la lectura de Staudt, i en ella es veu enterament dibuixada la futura *Geometria de la Posició*, incompletament delineada i amb procediments mètrics en l'obra anterior. Tots els que han estudiat matemàtiques a Espanya després que la iniciativa de Torroja s'ha fet universal, s'estranyaran que hom lloï uns apunts en què es conté l'estudi de les formes projectives, perspectives i en involució de primera categoria, de les homogràfiques, homològiques, en involució, correlatives i polars de segona i tercera categoria, de les còniques i cons de segon ordre, i de les formes simples contingudes en unes i altres, amb petites indicacions, relativament, a la resta de l'obra, dels mètodes de representació i operacions, que s'anomenen de Geometria Descriptiva: canvis de plans, girs, rebatiments, mesura de segments i d'angles, etc. Però si es comparen amb els que van estudiar fa més de vint anys, ensenyats per altres que no haguessin estat deixebles de Torroja, ja veurien la gran diferència. Aquest curs representa l'esforç gegant d'un home treballador i constant, que aconseguia uniformar tot un conjunt d'elements geomètrics dispersos en obres estrangeres desconegudes en nostra pàtria, a la qual ell els va emmotllar, malgrat la resistència dels retrògrads científics.

En aquest resum dóna compte de les formes correlatives polars en l'espai, focals i ordinàries, l'exposició de les quals va ometre en la *Geometria de la Posició*, tal volta pel gran desenrotllament que havia adquirit la primera part d'aqueixa. Això dóna idea d'un dels inconvenients amb què va tenir de lluitar Torroja en els seus llibres, el qual no trobava a la càtedra, i és la qüestió econòmica; com que aquells eren força elevats per la cultura actual de les matemàtiques a Espanya, ell es veia forçat a restringer la seva publicació. Sabem que abans de morir tenia redactada tota la *Geometria Descriptiva*, conforme al sistema iniciat en aquests apunts de fa trenta anys, però amb tot el desenrotllament convenient a un llibre. ¿Quedarà inèdita aquesta darrera obra, de la qual no podem donar compte per haver-li faltat la publicitat? Pot ésser que no i aquest serà el major homenatge pòstum que es podrà donar a la memòria del savi catedràtic de la Central.

Cal tenir present que aquests apunts no representen sinó una part exigua de la seva explicació, la qual era la que formà, com ja hem dit, la incipient escola de geomètres espanyols. En ells es veu, amb tot allò que li era característic i que ha fet que la seva acció fos eficaç: claredat d'idees, rigor de discurs, ordre progressiu en l'exposició. Durant l'explicació mai no podia sorgir una dificultat sobre algun punt ja vist que immediatament no fos resolta, encara que s'hagués de repetir vint vegades la mateixa demostració. Aital obsessió per a veure sempre lligades les últimes conseqüències de la darrera lliçó amb els primers principis enunciats al començament del curs i no perdre de cap manera el fil del raonament per llarg i complicat que fos, és el que dóna facilitat i claredat a les seves

obres (malgrat l'abstrús argument de les mateixes), ai que les llegeix seguidament.

* * *

El tractat de *Geometría de la Posición y sus aplicaciones a la Geometría de la Medida*, és el més voluminós dels que va publicar, gràcies a la col·laboració que va prestar-li el seu *antic deixeble i estimat amic el distingit company de càtedra en la Facultad de Ciències D. Miquel Vegas*, el qual va redactar quasi tot el referent a la Geometria de la Mesura, a les transformacions de segon ordre, a la Geometria del triangle, del trièdre i del tetràedre, als principis fonamentals de les superfícies de segon ordre, considerades com a intersecció dels elements homòlegs de dues radiacions correlatives i altres addicions. En aquesta obra es veuen, demés d'altres punts més concrets, certs capítols generals que per primera vegada eren introduïts sistemàticament a Espanya: la dels elements imaginaris i transformacions projectives no-reals, la de les relacions entre dues figures planes o radiades de segon ordre, i la dels feixos o sèries de còniques i cons de segon ordre. En els altres capítols es veien ordenats i ampliats els punts continguts en la obra anterior. Com que aquesta obra figura en totes les biblioteques i és el més complet tractat que sobre la mateixa s'ha publicat en castellà (1), no és necessari que en fem recensió especial.

* * *

Segueix al de la *Geometría de la Posición* el llibre de *Teoría geométrica de las líneas alabeadas y de las superficies desarrollables*, la darrera de les obres extenses del Dr. Torroja i potser també la més original i elevada. Suposa el lector versat en la Geometria de Posició, i en el context desenrotlla temes nous o imperfectament iniciats en les seves publicacions anteriors: tangents i plans osculadors de les corbes en l'espai; plans tangents, corbes contingudes en les superfícies i desenrotllables tangents al llarg d'una corba d'una superfície (en especial, la desenrotllable asimptòtica), elements singulars, contactes, evolutes i evolvents de les corbes alabeades, involutes i envolvents de les superfícies en l'espai, desenrotllament de les superfícies i estudi de les geodèsiques, línies i superfícies d'igual pendent amb l'estudi de les figures derivades per projecció ortogonal (sinusoide) i clinogonal (cicloide), o per secció (evolvent de cercle) i determinació dels elements asimptòtics. Dedicava un bon espai a l'estudi de les cúbiques i quàr-

(1) En la seva obra, *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior*, el Sr. Rey Pastor dóna compte més complet i exacte d'alguns punts de la Geometria de Posició. Aquesta obra, amb tot, no és un text, sinó un llibre de crítica especial, de caràcter més elevat i modern, com escrita de quasi vint anys més tard, després d'un viatge per Alemanya.

tiques alabeades de primera espècie, a les congruències de rectes secants de les mateixes, als feixos i sèries de quàdriques que les darreres determinen (seguint i ampliant a Staudt), a les cúbiques planes considerades com a projecció de les quàrtiques alabeades d'un punt d'aquestes com a centre de projecció, i com a aplicació estudia els sistemes simples homofocals de quàdriques en l'espai i el problema de la determinació dels eixos d'un con d'una quàdrica general.

L'últim capítol d'aquesta obra original està dedicat a l'estudi de la curvatura de les superfícies, estudiada amb elements de la Geometria pura. Aquesta innovació havia ja estat indicada, mes no desenrotllada amb l'extensió que té en la obra de què tractem, en tres articles del *Progreso Matemático*, la primera Revista de Matemàtiques pures amb alts ideals publicada en castellà, gràcies a l'entusiasme del catedràtic de Càlculs de la Universitat de Saragossa, D. Zoel G. de Galdeano. El primer article es troba en el tom IV, corresponent a l'any 1894, pàgs. 177-181, i s'intitula *Curvatura de las líneas en sus puntos del infinito*; és introductori i dóna la noció general de curvatura que es troba en la *Geometría de la Posición* (pàg. 694), § 900: «admitiremos como definición que

dos curvas tienen en dos puntos cualesquiera *iguales curvaturas* cuando pueden colocarse una sobre otra de modo que se confundan en uno dichos dos puntos y tengan en este punto común un contacto de segundo orden.

dos superficies cónicas o cilíndricas tienen *iguales curvaturas* en dos generatrices cuando pueden superponerse de tal modo que dichas generatrices se confundan en una, a lo largo de la cual tengan un contacto de segundo orden.

Y puesto que todo lo que antecede es indistintamente aplicable a los puntos propiamente tales de las curvas, a los puntos del infinito de las mismas, a las generatrices ordinarias de las superficies cónicas o cilíndricas y a las del infinito de estas últimas, no habrá inconveniente grave en extender a estos casos la definición anterior, por más que el concepto ordinario de curvatura sólo sea aplicable a las curvas en sus puntos propiamente tales.

Se llama *radio de curvatura* de una línea relativo a uno de sus puntos propiamente tales, el radio del círculo osculador correspondiente al mismo, y el centro de este círculo se llama *centro de curvatura*, y, llevados del deseo de generalizar y abreviar la exposición, llamaremos *parámetro de curvatura* de una línea en el punto del infinito de una de sus ramas parabólica o hiperbólica, respectivamente, al parámetro de una parábola o al eje de una hipérbola equilátera que tengan con la curva propuesta en dicho punto un contacto de segundo orden; y parámetro de curvatura de una superficie cilíndrica relativo a una generatriz del infinito el de una de sus secciones rectas en el punto correspondiente a dicha generatriz.»

L'assumpte de l'article es veu en els paràgrafs 905, 906 i 907 de la mateixa *Geometría de la Posición*.

Els altres dos articles se veuen en el tom V, corresponent a l'any 1895 (pàgines 89-93 y 110-115); s'intitulen: *Relación entre los elementos de segundo orden de las secciones producidas en una superficie por planos que pasan por uno de sus puntos del infinito*. En ells demostra els teoremes de Meusnier i d'Euler per procediments purament geomètrics i els generalitza pels punts a l'infinit. El contingut està ordenat, ampliat i disposat en forma de teoria completa en l'últim capítol de l'obra de què acabem de donar compte.

* * *

Un opuscle litografiat, amb el títol *Breves nociones sobre los determinantes y su aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado*, publicat a Madrid en febrer del 1884, és una altra prova de l'esperit d'introducció de les idees i procediments moderns d'exposició i estudi en la nostra pàtria. El seu contingut es troba ara en tots els llibres d'Àlgebra superior i encara en alguns més elementals, d'ús entre batxillers, gràcies a l'esforç d'alguns professors que l'han difòs entre nosaltres. D'ells va ésser En Torroja un dels primers amb aquest opuscle.

El contingut d'un article que va publicar *El Progreso Matemático*, tom II, corresponent a l'any 1892 (pàgs. 108-110), intitulat: *Nota relativa a la perpendicularidad de rectas y planos*, es troba incorporat en la *Geometría de la Posición* al capítol III, «Relaciones métricas entre segmentos y ángulos. Perpendicularidad», on es troba més detallada i sistemàtica l'exposició.

Els dos últims treballs del mestre, fets quan ja passava dels seixanta anys, que han tingut la sort de veure's publicats (com hem dit, roman una bona part d'obra inèdita), són dues monografies: la primera s'intitula: *Aplicación de la homografía y la correlación al estudio de las superficies*, i forma part dels treballs presentats al Congrés de Saragossa (1908), el Ier de la «Asociación Española para el Progreso de las Ciencias». En el pròleg diu que es cenyirà a les superfícies de revolució i al *pas oblic*, comunment designat *Banya de Vaca*. Les transformades de les primeres per homografia són les engendrades per còniques amb dos punts comuns i tangents en ells a dos plans fixos, cadascun dels quals passa per un d'aquells i no pels dos alhora; la intersecció d'aquests dos plans és l'homòleg de l'eix i les seccions planes que per aquest passen són homòlogues dels meridians. Les propietats del con i de l'esfera tangents al llarg d'un paral·lel, o del cilindre tangent al llarg d'un meridià, es dedueixen immediatament; igualment les dels cons o esferes que passen per dues paral·leles o dels cilindres que passen per dos meridians. La determinació de les seccions planes i cons circumscrits a tals superfícies, de les interseccions amb una recta, de les envolvents desenrotllables comuns a dues d'elles s'estenen fàcilment, i el mateix *mutatis mutandis* cal dir de les correlatives. Més interessant és encara l'estudi de les

figures homogràfiques i correlatives amb la *Banya de Vaca*, de les quals representa la que té per directrius una perpendicular al pla vertical i dues còniques simètriques respecte d'un mateix pla horitzontal, seccions d'un mateix con, el centre del qual es trobi en la primera directriu, essent cercles llurs projeccions verticals. Fàcilment s'estén la propietat de la *Banya de Vaca* de tenir còniques les seccions verticals passant per les generatrius rectilínies.

L'altre treball, *Superficies helicoidales*, es troba en la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, corresponent als anys 1912-1913. És una extensió original i metòdica d'allò que té exposat en el capítol VI i en el VIII, article 2.^{on}, del tractat *Líneas alabeadas y Superficies desarrollables*, i aplicant els conceptes generals que té en el capítol últim, tan original, d'aquest tractat de què hem donat compte.

Altres escrits de Torroja no han pogut arribar a les meves mans i per això em veig obligat a ometre'n la valoració.

* * *

El 23 de març de 1891 fou designat el Dr. Torroja acadèmic de nombre de la Reial Acadèmia de Ciències Exactes, Físiques i Naturals, per a ocupar la vacant que en dita corporació va deixar el general Carles Ibáñez i González de Ibero, Marquès de Mulhacén, Director de l'Institut Geogràfic i Estadístic i fundador de la Geodèsia espanyola. El 29 de juny de 1893 prengué possessió d'aquest nomenament, i en el discurs de recepció reglamentari va fer una *Reseña de los medios empleados por la Geometría Pura actual para alcanzar el grado de generalidad y de simplificación que la distingue de la Geometría antigua*. En el primer apartat tracta de la introducció del signe en Geometria Pura pel procediment de Möbius; en el segon, de la generalització dels conceptes de punt, recta i pla als elements impropis, ja sia dintre de la Geometria euclidiana, ja sia prescindint del postulat d'Euclides; en el tercer, tracta de la distinció de les propietats geomètriques en descriptives o de posició i mètriques, junt amb el principi de correlació que s'estén a totes les primeres; parla en el quart de la xarxa de Möbius i del càlcul baricèntric i les raons anarmòniques de Steiner i Chasles com a insuficients per a la fonamentació de la Geometria Pura per son caràcter mètric, i, en canvi, el teorema de Staudt (la demostració rigorosa del qual ha trigat molts anys en ésser trobada i potser que encara no sia definitiva) (1), posa un veritable punt de partida geomètric a la Geometria; en l'apartat quint exposa la involució, i en especial la correlativa absoluta que s'obté quan, prescindint del postulat d'Euclides, a cada pla correspon el punt impropri

(1) V. la segona part de l'obra citada, de Rey Pastor: *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior*.

centre de la radiació de les perpendiculars i a cada recta, la impròpia eix del feix de plans perpendiculars; i en l'apartat sisè, el més extens, interessant i nou per nosaltres, exposa magistralment la introducció d'elements imaginaris en Geometria Pura com a dobles d'una involució en què cada parell d'elements corresponents és separat pels altres parells; termina amb l'explicació de la corresponència projectiva no real. L'últim apartat és una senzilla recapitulació i peroració. La contestació de l'Excm. Sr. D. Francisco de Paula Arrillaga conté, com de costum, l'exhibició dels mèrits del recipiendari, poques vegades tan evidents.

El 13 de juny de 1909 contestava ell al discurs de recepció del seu deixeble predilecte el Dr. D. Miquel Vegas, «Interpretación geométrica del imaginarismo». El seu discurs no era més que una síntesi de la seva vida de geòmetra, professor i amic; rebutja l'afirmació absoluta i incondicional que l'imaginarisme, en especial la unitat imaginària, és símbol propi de la perpendicularitat, i dóna després la doctrina, sota una nova forma que havia exposat en el seu discurs de recepció, en la *Geometría de la Posición* i en totes les seves obres i explicacions de càtedra. El seu deixeble ha honrat la seva memòria amb sentit article necrològic en la *Revista de la Academia* (tomo XVIII [2.^{on} de la 2.^a sèrie], núms. 4, 5 i 6, corresponents a octubre, novembre i desembre de 1918, pàgs. 136-141), on dóna a conèixer la valor del seu plorat mestre.

* * *

Demés d'acadèmic, fou nomenat Torroja Cap superior d'Administració en 1901, Comendador de nombre de l'Ordre Civil d'Alfons XII en 1902, Conseller d'Instrucció pública en 1911 i Vice-president primer des de les seves respectives fundacions de la Societat Espanyola per l'Avenç de les Ciències i de la Societat Matemàtica Espanyola, sense que cap d'aquests càrrecs o distincions fossin per ell sol·licitats en el més mínim. Era enterament refractari a la política, a les diversions folles i estrepitoses, a tota exhibició i ostentació; la seva vida era ordenada i tranquil·la, empleada en el compliment dels seus deures religiosos, domèstics, de professor i d'amic, i el que de tot això li sobrava ho empleava en l'estudi retirat. Era just i delicat alhora en totes ocasions, atent o sever segons els casos, sempre senyor de sí en tal forma, que la seva modèstia mai no degenerava en debilitat ni la seva integritat en duresa. Uns per raó de la seva rectitud i altres per l'afició al progrés, altres per les seves conviccions religioses i polítiques (que a ningú imposava, mes tampoc se les deixava imposar), no li van faltar adversaris i fins enemics; cap d'ells el va treure del seu posat ordinari i sense afectació. Davant d'ell veiérem un deixeble cometre una de les més grosses grolleries que es poden fer a un professor de la seva autoritat; i no sols no es va immutar ni va fer el més petit moviment d'irritació, sinó que després no va donar la més petita prova de ressentiment, ni es va venjar en el

més mínim, no havent-li faltat ni ocasió ni just motiu per fer-ho, independentment de tal grolleria. Mai en la càtedra no el van veure ni enutjat, ni desentonat, ni parlant de coses fora de l'assignatura; però, això sí, després donava a cadascú allò que en consciència creia que es mereixia i no més, fos qui fos. Honra de la nostra terra en tots sentits, just era que aquesta honrés el seu fill en aquesta ocasió i en aquests ARXIUS, fruit de la seva mentalitat catalana; tant de bo el seu exemple animi molts joves (i fins de més edat) perquè es dediquin a l'estudi seriós de les distintes branques del saber humà amb l'esperança de rebre, damunt d'altres millors recompenses, l'agraïment de la pàtria.

ENRIC DE RAFAEL VERHULST, S. J.

Col·legi del Salvador de Saragossa, 27 ag. 1919
