

ainsi faits nouveaux qui nous paraissent présenter un certain intérêt et que nous serions à même de développer une théorie générale des involutions à laquelle nous travaillons actuellement.

Nous terminons cet avant-propos par une liste des principaux travaux relatifs aux involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence.

I. ENRIQUES et F. SEVERI — Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (Acta Mathematica, 1900).

II. ENRIQUES — Sur les transformations rationnelles d'une surface de genre trois (Ann. Inst. Fourier, 1914).

III. GODAUX — Mémoire sur les involutions appartenant à une surface algébrique (Ann. Inst. Fourier, 1914).

IV. GODAUX — Mémoire sur les surfaces algébriques douées d'un nombre fini de points de diramation (Ann. Inst. Fourier, 1914).

V. GODAUX — Mémoire sur les surfaces algébriques de genre trois (Ann. Inst. Fourier, 1914).

VI. GODAUX — Mémoire sur les surfaces algébriques de genre trois (Ann. Inst. Fourier, 1914).

VII. GODAUX — Mémoire sur les surfaces algébriques de genre trois (Ann. Inst. Fourier, 1914).

VIII. GODAUX — Mémoire sur les surfaces algébriques de genre trois (Ann. Inst. Fourier, 1914).

IX. GODAUX — Mémoire sur les surfaces algébriques de genre trois (Ann. Inst. Fourier, 1914).

La considération des surfaces de Kümmer et, plus tard, celles des surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, ont conduit à l'étude des involutions doublement infinies, douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique. MM. Enriques et Severi ont tout d'abord démontré qu'une pareille involution, appartenant à la surface de Jacobi (qui représente les couples de points d'une courbe de genre deux) était cyclique ou engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. M. Enriques a ensuite démontré le même théorème pour une surface de genres un ( $p_a = P_4 = 1$ ). Enfin, généralisant ces deux résultats, nous avons démontré que toute involution  $I_n$  d'ordre  $n$ , douée d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique  $F$ , était engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même.

C'était un premier pas vers la théorie complète des involutions considérées; un second consistait à déterminer une surface normale  $\Phi$ , image de l'involution  $I_n$  et à étudier les singularités de cette surface aux points de diramation. Ce problème était relativement simple dans le cas où  $F$  a le genre  $P_{12} = 1$  (cas où les courbes canonique ou pluricanoniques existantes ont l'ordre zéro), car alors la surface  $\Phi$  a également le genre  $P_{12} = 1$  et elle ne peut posséder que des points au plus doubles. Cela entraîne une conséquence importante sur la façon dont l'involution  $I_n$  se comporte dans le voisinage de ses points de coïncidence. La considération d'involutions appartenant à des surfaces  $F$  pour lesquelles on a  $P_{12} > 1$  pouvait donc nous conduire à des résultats nouveaux. C'est ce qui nous a amené à étudier les involutions appartenant à la surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois, non hyperelliptique. Nous avons ainsi rencontré cer-

tains faits nouveaux qui nous paraissent présenter un certain intérêt et qui nous serviront à étayer une théorie générale des involutions à laquelle nous travaillons actuellement.

Nous terminerons cet avant-propos par une liste des principaux travaux relatifs aux involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence.

F. ENRIQUES et F. SEVERI. — *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*. (Acta Mathematica, 1909.)

F. ENRIQUES. — *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno*. (Rend. Accad. Bologna, 1909-1910.)

L. GODEAUX. — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique*. (Rend. R. Accad. Lincei, 1914.)

L. GODEAUX. — *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genre un*. (Annales de l'École Normale Supérieure, 1914.)

L. GODEAUX. — *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation*. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914.)

L. GODEAUX. — *Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un*. (Bull. de la Soc. Mathématique de France, 1915.)

## CHAPITRE I

LA SURFACE REPRÉSENTANT LES COUPLES DE POINTS, NON ORDONNÉS, D'UNE COURBE DE GENRE TROIS, ET L'INVOLUTION D'ORDRE DEUX APPARTENANT À CETTE SURFACE.

i. Soit  $A$  une courbe algébrique de genre trois, non hyperelliptique. Nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que cette courbe est une courbe plane du quatrième ordre. Soit  $F$  une surface algébrique, dépourvue de courbes exceptionnelles, qui représente les couples de points, non ordonnés, de la courbe  $A$ .

La surface  $F$  a été rencontrée d'abord par M. Humbert <sup>(1)</sup>, ensuite par MM. F. Severi <sup>(2)</sup> et M. De Franchis <sup>(3)</sup>, enfin par M. L. Remy <sup>(4)</sup> qui lui a consacré une étude analytique. Nous supposerons connus les travaux de ces géomètres.

<sup>(1)</sup> *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois*. Journal de Liouville, 1896, (5), II.

<sup>(2)</sup> *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica*. Atti della R. Accad. di Torino, 1903, XXXVIII. — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*. Mem. della R. Accad. di Torino, 1903, (2), LIV.

<sup>(3)</sup> *Sulle varietà delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica*. Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 1903, XVII.

<sup>(4)</sup> *Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois*. Annales de l'École Normale Sup., 1909, (3), XXVI. — *Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois*. Journal de Liouville, 1908, (6), IV.

La surface  $F$  a les genres

$$p_g = 3, p_a = 0, p^{(1)} = 7, I = 2.$$

Une courbe canonique  $C$  de  $F$  est l'image d'une  $g^1_n$  canonique de  $A$ . En rapportant projectivement les courbes canoniques  $C$  du réseau  $|C|$  aux droites d'un plan, on obtient un modèle projectif de  $F$  sous forme d'un plan sextuple dont la courbe de diramation (à compter deux fois) est du douzième ordre.

Le système canonique  $|C|$  est dépourvue de points-base. Le système bicanonique  $|2C|$  est, par définition, adjoint à  $|C|$ . Il est par suite régulier <sup>(1)</sup>, et, d'après le théorème de Riemann-Roch, on a donc  $P_2 = 7$ . De même, on a  $P_3 = 19$ ,  $P_4 = 37$ , et, en général, pour  $i \geq 2$ ,

$$P_i = 3i(i-1) + 1.$$

La surface  $F$  possède un système continu  $\Sigma$ , de degré un et d'indice deux, de courbes  $H$ , de genre trois, birationnellement identiques à  $A$ . Une courbe  $H$  provient des couples de points de  $A$  dont un point est fixe. Le système  $\Sigma$  a pour enveloppe la courbe  $K$  lieu des points de  $F$  images des couples de points de  $A$  formés de deux points coïncidents.

2. À une  $g^1_n$  de  $A$  correspond une courbe  $T$  de  $F$ . Si nous désignons par  $x$  le nombre d'intersections d'une courbe  $T$ , de genre  $\pi$  et de degré  $v$ , avec une courbe  $H$  du système  $\Sigma$ , par  $u$  le nombre d'intersections de  $T$  et de  $K$ , on a (Severi, De Franchis)

$$8x + 2v = 4(\pi - 1) + u.$$

Actuellement,  $x$  est égal à  $n - 1$  et  $u$  est égal au nombre de points doubles de la  $g^1_n$ , c'est-à-dire à  $2(n - 2)$ . On a donc

$$3(n - 2) + v = 2(\pi - 1).$$

Supposons  $n > 4$ , la série  $g^1_n$  est alors non spéciale et appartient à une  $g^{n-3}_{n-3}$  complète.

Rapportons projectivement les groupes de cette  $g^{n-3}_{n-3}$  aux hyperplans d'un  $S_{n-3}$ . Nous obtenons une courbe d'ordre  $n$ , que nous supposons simple, birationnellement identique à  $A$ . Une  $g^1_n$  est découpée sur cette courbe, que nous désignerons par  $A^*$ , par les hyperplans d'un faisceau. Le degré  $v$  est donc égal au nombre de bisécantes de la courbe  $A^*$  s'appuyant sur deux  $S_{n-5}$ . Pour obtenir ce nombre, nous supposons que ces deux  $S_{n-5}$  sont dans un même hyperplan. Les bisécantes cherchées sont alors

<sup>(1)</sup> PICARD: *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions de deux variables indépendantes*. Journal de Crelle, 1905, CXXIX, ou PICARD ET SIMART, t. II, p. 437. — SEVERI: *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*. Rend. R. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1908, (5), XVII.

les  $\frac{1}{2} n (n - 1)$  droites joignant les couples de points de  $A^*$  situés dans cet hyperplan et les  $\frac{1}{2} (n - 1) (n - 2) - 3$  bisécantes de  $A^*$  s'appuyant sur le  $S_{n-6}$  communs aux deux  $S_{n-5}$  choisis. On a donc

$$v = (n - 1)^2 - 3.$$

On trouve alors

$$\pi = \frac{1}{2} n (n + 1) - 3.$$

Observons que le système complet  $|T|$  a la dimension au moins égale à  $\frac{1}{2} (n - 1) (n - 4)$ , d'après le théorème de Riemann-Roch.

Les courbes qui correspondent aux séries  $g_n^1$  contenues dans une série complète non spéciale et simple, ont le genre  $\frac{1}{2} n (n + 1) - 3$ , le degré  $(n - 1)^2 - 3$  et elles forment un système complet de dimension au moins égale à  $\frac{1}{2} (n - 1) (n - 4)$ .

3. Soient  $P_1$  un point quelconque de  $F$ ;  $P_{11}, P_{12}$  les points de  $A$  correspondant à  $P_1$ . Les deux points  $P_{11}, P_{12}$  déterminent un groupe canonique de  $A$ ; soient  $P_{21}, P_{22}$  les points qui, avec  $P_{11}, P_{12}$ , forment ce groupe canonique,  $P_2$  le point de  $F$  image du couple  $P_{21}, P_{22}$ . Le point  $P_2$  ainsi défini dépend rationnellement de  $P_1$  et inversement. Nous avons ainsi construit une transformation birationnelle  $T$  de  $F$  en elle-même. Cette transformation est involutive; nous désignerons à la fois par  $\Phi$  l'involution (d'ordre deux) qu'elle engendre ou une surface représentative de cette involution.

D'après la définition même de l'involution  $\Phi$ , il est clair que le système canonique  $|C|$  de  $F$  est composé avec cette involution. À une courbe  $C$  correspond sur la surface  $\Phi$  une courbe  $\Gamma$  variable dans un réseau  $|\Gamma|$ . Le genre géométrique de  $\Phi$  est donc  $p_g = 3$  et, par suite, l'involution  $\Phi$  ne possède, sur  $F$ , qu'un nombre fini de points de coïncidence. Les courbes  $\Gamma$  sont les courbes canoniques de  $\Phi$ , le réseau  $|\Gamma|$  est dépourvu de points-base et son degré est 3. On a donc, pour  $\Phi$ ,  $p^{(1)} = 4$ .

Supposons que  $P_1$  coïncide avec  $P_2$ ; alors, sur la courbe  $A$ , le point  $P_{11}$  coïncide, par exemple, avec  $P_{21}$  et  $P_{12}$  avec  $P_{22}$ . En d'autres termes, la droite  $P_{11} P_{12}$  est une bitangente de la courbe  $A$ . Inversement, à une bitangente de  $A$  correspond un point de coïncidence de  $\Phi$  sur  $F$ . On sait que  $A$  possède 28 bitangentes. Par suite, l'involution  $\Phi$  possède 28 points de coïncidence. Il en résulte que le genre arithmétique de  $\Phi$  est  $p_a = 3$  <sup>(1)</sup>.

Le théorème de Riemann-Roch nous fournit la valeur des plurigenres de la surface  $\Phi$ ; on a  $P_2 = 7, P_3 = 13$  et, en général,

$$P_i = \frac{1}{2} \cdot 3 i (i - 1) + 4,$$

pour  $i > 1$ .

(1) Voir L. GODREUX: *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914.

On voit, en particulier, qu'il n'existe pas de modèle projectif bicanonique simple de  $F$ , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de surface normale simple, birationnellement identique à  $F$ , dont les sections hyperplanes seraient des courbes bicanoniques.

4. On peut prendre, comme modèle projectif de la surface  $\Phi$ , soit le plan triple canonique dont la courbe de diramation est d'ordre 12 (Severi), soit une surface de sixième ordre de  $S_3$ , ayant un point triple, en relation avec la surface de Kümmer (Humbert).

Remarquons que le système bicanonique  $|2\Gamma|$  de  $\Phi$  est simple. S'il était composé, ce ne pourrait être, en effet, qu'au moyen de l'involution d'ordre 3 définie par  $|\Gamma|$ ; mais alors, sur le plan triple auquel cette involution donne naissance, les courbes  $2\Gamma$  seraient des coniques triples; cela est absurde, puisque  $|2\Gamma|$  a la dimension  $P_2 - 1 = 6$ . Rapportons projectivement les courbes de  $|2\Gamma|$  aux plans d'un  $S_6$ ; nous obtenons, dans cet espace, une surface normale, simple, d'ordre 12, à sections hyperplanes de genre 10, *modèle projectif bicanonique* de  $\Phi$ . Nous savons de plus <sup>(1)</sup> qu'à chaque point de coïncidence de l'involution  $\Phi$  sur  $F$  correspond un point double conique de ce modèle projectif. Désormais, lorsque nous parlerons de la surface  $\Phi$ , c'est de ce modèle projectif qu'il s'agira.

Appliquons, à la surface  $\Phi$  le théorème sur les surfaces doubles douées d'un nombre fini de points de diramation, sous la seconde forme que nous avons donnée <sup>(2)</sup>; on a

*Pour qu'une surface d'ordre 12, à sections hyperplanes de genre 10, de  $S_6$ , représente l'involution  $\Phi$  appartenant à  $F$ , il faut et il suffit que:*

- 1°) elle possède 28 points doubles coniques,
- 2°) parmi les hypersurfaces découpant le système  $2k$ -uple du système des sections hyperplanes, il y en ait qui passent par les 28 points de diramation et qui touchent la surface en chaque point d'intersection.

Pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut choisir  $k$  de telle manière que les courbes de  $F$  qui correspondent aux courbes  $2k\Gamma$  de  $\Phi$ , appartiennent à un système linéaire plus ample que  $|2k\Gamma|$ . Actuellement, il suffit de prendre  $k=2$ . En effet, le système  $|4\Gamma|$  a la dimension  $P_4 - 1 = 21$  et son transformé sur  $F$ ,  $|4C|$ , a la dimension 36.

Désignons par  $\Gamma_0$  les courbes de long desquelles les hypersurfaces du quatrième ordre de  $S_6$ , passant par les 28 points doubles de  $\Phi$ , touchent cette surface, dans les conditions de l'énoncé précédent. Le système  $|\Gamma_0|$  a le degré 34, le genre 24 et la dimension 14.

Si  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{28}$  sont les courbes rationnelles de degré  $-2$  auxquelles

<sup>(1)</sup> L. GODEAUX: loc. cit.

<sup>(2)</sup> L. GODEAUX: loc. cit., n° 6. — Les hypersurfaces, dont il est question dans l'énoncé sont d'ordre  $2k$ , car la surface  $\Phi$  est dépourvue de courbes multiples. En effet, une courbe d'ordre 12, de  $S_6$ , a au plus le genre 10; il en résulte qu'un hyperplan de  $S_6$  découpe  $\Phi$  en une courbe n'ayant aucun point double ou multiple. Cette remarque nous sera utile plus loin.

les sont équivalentes, au point de vue de la Géométrie Algébrique, les 28 points doubles de  $\Phi$ , on a

$$2\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_{28} \equiv 4\Gamma.$$

On a ce théorème:

*Pour qu'une surface d'ordre 12, à sections hyperplanes de genre 10, de  $S_6$ , représente l'involution  $\Phi$  appartenant à la surface  $F$ , il faut et il suffit qu'elle possède 28 points doubles coniques et qu'il existe, sur elle, un système linéaire de courbes d'ordre 24, de degré 34, de genre 24 et de dimension 14, chaque courbe de ce système ayant un seul point commun avec la courbe rationnelle, de degré  $-2$ , équivalente à l'un quelconque des 28 points doubles.*

5. On peut également introduire la surface  $\Phi$  par la considération de fonctions  $\Theta$ , comme l'a fait M. Remy dans son travail cité. Nous allons le montrer rapidement.

Soient  $f(x, y) = 0$  l'équation de la courbe  $A$ ,  $G_1(x)$ ,  $G_2(x)$ ,  $G_3(x)$  trois intégrales abéliennes de première espèce, distinctes, de cette courbe.

M. Remy considère les surfaces représentées par les équations paramétriques:

$$X = \Phi_1(u, v, w), \quad Y = \Phi_2(u, v, w), \quad Z = \Phi_3(u, v, w),$$

les  $\Phi$  étant des fonctions abéliennes à six systèmes de périodes et paires des trois paramètres

$$\begin{aligned} u &= G_1(x_1) + G_1(x_2), \\ v &= G_2(x_1) + G_2(x_2), \\ w &= G_3(x_1) + G_3(x_2), \end{aligned}$$

liés par une fonction thêta normale du premier ordre

$$\delta(u, v, w) = 0$$

égalée à zéro.

Considérons le tableau normal de périodes

$$\begin{array}{ccccccc} 2i\pi & 0 & 0 & a & b & c & \\ 0 & 2i\pi & 0 & b & d & e & \\ 0 & 0 & 2i\pi & c & e & h & \end{array}$$

et les fonctions  $\Theta(u, v, w)$  normales, de caractéristique nulle, du second ordre et paires. Elles sont au nombre de huit, linéairement indépendantes, mais l'une d'elles est  $\delta^2(u, v, w)$ . Soient  $\Theta_1(u, v, w) \dots, \Theta_7(u, v, w)$  sept fonctions non identiquement nulles, linéairement indépendantes. La surface  $\Phi^*$ , d'équations

$$\rho X_i = \Theta_i(u, v, w) \quad (i = 1, 2, \dots, 7)$$

est, d'après le théorème de Poincaré, d'ordre douze.

Aux 28 demi-périodes annulant  $\delta$  correspondent, sur la surface, 28 points doubles coniques.

M. Remy a considéré la surface que l'on obtient en projetant  $\Phi^*$  sur un  $S_3$  de trois de ses points doubles. Cette nouvelle surface passe doublement par les arêtes d'un trièdre et, par suite, ses sections planes sont des courbes bicanoniques. Il en résulte que les sections hyperplanes de  $\Phi^*$  sont des courbes bicanoniques de la surface. Comme d'autre part, à un point de  $\Phi^*$  correspondent deux couples de points de  $A$  situés en ligne droite,  $\Phi^*$  est bien identique à  $\Phi$ .

6. Désignons par  $H'$  les courbes de la surface  $F$  images des  $g_1^1$  spéciales de la courbe  $A$ . D'après la construction de la transformation  $T$ , cette dernière fait correspondre une courbe  $H'$  à une courbe  $H$ . Les courbes  $H'$  forment un système  $\Sigma'$ , de degré un et d'indice deux, et les courbes  $H'$  rencontrent les  $H$  en deux points.

Considérons un point de coïncidence  $P$  de l'involution  $\Phi$  et les deux courbes  $H$ , soient  $H_1, H_2$ , passant par ce point. Soient  $H'_1, H'_2$  les courbes de  $\Sigma'$  transformées respectivement de  $H_1, H_2$ . Il est facile de voir que  $H'_1$  touche  $H_1$  en  $P$  et que  $H'_2$  touche de même  $H_2$  au même point. Or, les courbes  $H_1 + H'_1, H_2 + H'_2$  sont des courbes canoniques  $C$ , donc les courbes canoniques de  $F$  passant par  $P$ , y acquièrent un point double à tangentes variables.

On sait (c'est un résultat obtenu par M. Severi et reproduit dans notre Mémoire déjà cité) que  $P$  est un point de coïncidence parfaite, donc les courbes  $\Gamma$  de  $\Phi$  passant par un point de diramation de cette surface, y acquièrent un point double.

7. Supposons actuellement que la courbe  $A$  ait des modules arbitraires. Alors, les courbes  $C, H$  constitueront, sur la surface  $F$ , une base de déterminant  $-3$ , donc une base-minima <sup>(1)</sup>. Or, à la courbe  $H$  correspond, sur la surface  $\Phi$ , une courbe canonique  $\Gamma$  et à la courbe  $C$ , sur la même surface, une courbe  $\Gamma$  également, comptée deux fois. Si donc nous considérons, sur la surface  $F$ , une courbe  $D$  ne passant par aucun des points de coïncidence de l'involution  $\Phi$  et qui soit donnée par l'égalité symbolique

$$D \equiv \lambda_1 C + \lambda_2 H,$$

il lui correspond, sur  $\Phi$ , une courbe  $D^*$  telle que

$$D^* \equiv (2\lambda_1 + \lambda_2) \Gamma.$$

Observons que si  $\lambda_2 = 0$ ,  $D$  est composée avec l'involution  $\Phi$  et il lui correspond, sur la surface  $\Phi$ , une courbe qui, comptée deux fois, est la courbe  $D^*$ .

Lorsque l'on considère une courbe  $D$  passant par quelques points de coïncidence de l'involution  $\Phi$ , il lui correspond, sur  $\Phi$ , une courbe

$$D^* + \mu_1 \Gamma_1 + \dots + \mu_{28} \Gamma_{28},$$

(1) SEVERI: *Corrispondenze...*, loc. cit.

les  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{28}$  étant des entiers convenablement choisis. On a alors

$$D^* + \mu_1 \Gamma + \dots + \mu_{28} \Gamma_{28} \equiv (\Gamma_2 \lambda_1 + \lambda_2) \Gamma.$$

Inversement, une courbe de la surface  $\Phi$  vérifie toujours une pareille égalité fonctionnelle. Par suite, les 29 courbes  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{28}$  constituent une base de  $\Phi$ .

Lorsque l'on part d'une courbe de genre trois à modules généraux, la surface  $\Phi$  a le nombre-base  $\rho = 29$ . Une base est constituée par une courbe canonique et par les 28 courbes rationnelles de degré  $-2$  équivalentes aux 28 points doubles coniques.

On conclut de là, au moyen de la formule bien connue de M. Picard, que la surface  $\Phi$  possède, en général,  $\rho_0 = 14$  intégrales doubles de seconde espèce, comme l'avait d'ailleurs trouvé M. Remy.

## CHAPITRE II

INVOLUTIONS, DOUÉES D'UN NOMBRE FINI DE POINTS DE COÏNCIDENCE, APPARTENANT AUX SURFACES  $F$  ET  $\Phi$ .

8. Supposons qu'il existe, sur la surface  $F$ , une involution  $I_n$ , d'ordre  $n (> 1)$ , douée d'un nombre fini de points de coïncidence. Il résulte d'un théorème que nous avons démontré récemment <sup>(1)</sup> que l'involution  $I_n$  est engendrée par un groupe de transformations birationnelles (cycliques) de la surface  $F$  en elle-même. Soit  $T_1$  une de ces transformations qui soit différente de l'identité et de la transformation  $T$  engendrant l'involution  $\Phi$ . Nous allons démontrer qu'il lui correspond une transformation birationnelle de la courbe  $A$  en elle-même.

On sait que si une surface admet une transformation birationnelle en elle-même, celle-ci transforme une courbe canonique de la surface en une courbe canonique. Par conséquent  $T_1$  transforme  $|C|$  en lui-même.

Une courbe  $H$  de  $\Sigma$  est transformée, par  $T_1$ , en une courbe  $\bar{H}$  de genre trois; de plus,  $H$  étant spéciale, il en est de même de  $\bar{H}$ . Soit  $P$  le point de la courbe plane  $A$  qui correspond à la courbe  $H$  envisagée. Les couples de points de  $A$  images des points de  $\bar{H}$  sont, puisque  $\bar{H}$  est spéciale, alignés sur un point  $P'$  du plan de  $A$ . Lorsque  $P$  parcourt  $A$ ,  $P'$  parcourt une certaine courbe du plan de  $A$ , algébrique, qui a certainement quelques points communs avec  $A$ . Par conséquent, pour certaines courbes  $H$ , il arrive que la courbe  $\bar{H}$  correspondante soit, soit une courbe de  $\Sigma$ , soit une courbe de  $\Sigma'$ .

Dans le premier cas, on voit que les courbes  $H$  et  $\bar{H}$  ont un seul point

<sup>(1)</sup> Sur les involutions, douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique. Rend. R. Accad. Lincei, 1914, (5), XXIII.

commun. Si toutes les courbes  $\overline{H}$  n'appartiennent pas à  $\Sigma$ , les couples de courbes de  $\Sigma$  ayant un point commun sur une courbe  $\overline{H}$  quelconque (n'appartenant pas à  $\Sigma$ ) déterminent, sur la courbe  $K$  (de genre trois) une involution  $\gamma_2^1$  de genre trois, ce qui est absurde.

On en conclut que  $T_1$  transforme en lui-même le système  $\Sigma$  (birationnellement identique à  $A$ ) et que, par suite, il existe une transformation birationnelle  $\tau$  de  $A$  en elle-même.

On ramène le second cas au premier en considérant la transformation  $TT_1$ . On conclut alors que  $TT_1$  transforme  $\Sigma$  en lui-même et qu'il existe par suite une transformation birationnelle de  $A$  en elle-même.

*Observation.* — On démontrerait de la même manière que si  $F$  admet une transformation birationnelle non périodique en elle-même, il lui correspond une transformation non périodique de  $A$  en elle-même, ce qui est absurde, donc :

*Toute transformation birationnelle de  $F$  en elle-même est périodique.*

9. Partons actuellement de la transformation  $\tau$  de  $A$  en elle-même et soient  $P$  un point de  $F$ ,  $P_{11}$ ,  $P_{12}$  les points du couple correspondant de  $A$ . À  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $\tau$  fait correspondre des points  $P_{21}$ ,  $P_{22}$ . Soit  $P_2$  le point de  $F$  représentant le couple  $P_{21}$ ,  $P_{22}$ . La transformation  $T'_1$  faisant passer de  $P_1$  à  $P_2$  ainsi définie a la même période que  $\tau$  et elle transforme  $\Sigma$  en lui-même.

Soient  $P'_{11}$ ,  $P'_{12}$  les points qui, avec  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ , forment un groupe canonique de  $A$ ;  $P'_{21}$ ,  $P'_{22}$  ceux qui forment un groupe canonique avec  $P_{21}$ ,  $P_{22}$ ;  $P'_1$ ,  $P'_2$  les points de  $F$  images des couples  $P'_{11}$ ,  $P'_{12}$ ;  $P'_{21}$ ,  $P'_{22}$ . La transformation  $\tau$  change un groupe canonique de  $A$  en un groupe canonique, donc elle transforme les points  $P'_{11}$ ,  $P'_{12}$  en  $P'_{21}$ ,  $P'_{22}$  (dans un certain ordre). Sur  $F$ , cela signifie que  $T'_1$  fait passer de  $P'_1$  à  $P'_2$ . Or,  $T$  fait passer de  $P_1$  à  $P'_1$  et de  $P_2$  à  $P'_2$ , donc on a  $TT'_1 = T'_1T$ , c'est-à-dire que  $T$  et  $T'_1$  sont permutables.

Reprenons la transformation  $T_1$  considérée plus haut.

Si  $T_1$  change  $\Sigma$  en lui-même, elle coïncide avec la transformation  $T'_1$  qui vient d'être définie.

Si au contraire,  $T_1$  change  $\Sigma$  en  $\Sigma'$ , c'est  $T_1T$  qui coïncide avec  $T'_1$ . On a alors  $T. T_1T = T_1T. T = T_1$ , ou encore  $TT_1 = T_1T$ . Les transformations  $T$ ,  $T_1$  sont donc toujours permutables. De plus  $T_1T$  ayant la même période que  $T_1$ ,  $T_1$  et  $\tau$  ont également la même période.

10. Considérons, sur la courbe  $A$ , une involution  $\gamma'_2$ , d'ordre 2. On sait que cette courbe  $A$  peut toujours être supposée avoir l'équation

$$y^4 + y^2 f_2(x) + f_4(x) = 0,$$

où  $f_2(x)$ ,  $f_4(x)$  sont des fonctions de  $x$  de degrés 2, 4 respectivement. La  $\gamma'_2$  est elliptique.

À cette involution  $\gamma'_2$  correspond, sur  $F$ , une involution  $I_2$ , d'ordre deux, construite suivant le procédé indiqué plus haut. Aux couples de points de  $A$  formant des groupes de la  $\gamma'_2$  correspondent des points de  $F$

situés sur une courbe  $L$ . Tout point de cette courbe est une coïncidence pour l'involution  $I_2$ .

Remarquons que la courbe  $L$  est transformée en elle-même par  $T$  et soit  $T'$  la transformation de  $F$  en elle-même engendrant  $I_2$ . La transformation  $TT'$  engendre une involution d'ordre 2 ayant également une courbe de coïncidence. Les points de celle-ci sont les images des couples de points de  $A$  ne formant pas des groupes de  $\gamma'_2$ , les points d'un couple ayant même abscisse.

Inversement, à une involution  $I_2$  d'ordre 2 donnée sur  $F$  correspond une involution  $\gamma_2$  d'ordre 2 sur  $A$ . Que la transformation génératrice de  $I_2$  change  $\Sigma$  en lui-même ou en  $\Sigma'$ , on voit qu'elle possède une infinité de points invariants sur  $F$ .

Si nous considérons, sur  $F$ , une transformation birationnelle  $T_1$  de période  $2\varepsilon$  ( $\varepsilon > 1$ ),  $T_1^\varepsilon$  sera de période 2 et différente de  $T$ . De plus  $T_1^\varepsilon$  aura une infinité de points invariants et par suite:

*Une involution douée d'un nombre fini de coïncidences, appartenant à  $F$  et non composée avec l'involution  $\Phi$ , est engendrée par un groupe de transformations birationnelles cycliques de périodes impaires de  $F$  en elle-même. A chacune de ces transformations correspond une transformation birationnelle de même période de la courbe  $A$  en elle-même. De plus, chacune de ces transformations est permutable avec  $A$ .*

Il est d'ailleurs bien clair que l'on peut se borner à l'étude des transformations laissant le système  $\Sigma$  invariant.

11. Considérons maintenant une involution  $I_n$ , d'ordre  $n$ , appartenant à la surface  $\Phi$  et douée d'un nombre fini de points de coïncidence. Elle est engendrée par un groupe fini de transformations birationnelles de la surface en elle-même, d'après le théorème que nous avons invoqué plus haut.

À l'involution  $I_n$  correspond, sur la surface  $F$ , une involution  $I'_{2n}$ , d'ordre  $2^n$ , composée avec l'involution  $\Phi$ , et dotée d'un nombre fini de points de coïncidence. Soient  $T_1, T_2, \dots, T_k, T$  les transformations birationnelles de  $F$  en elle-même engendrant  $I'_{2n}$ . Les transformations  $T_1, T_2, \dots, T_k$  engendrent une involution d'ordre  $n$ . On en conclut que:

*Une involution douée d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à  $\Phi$ , est d'ordre impair. Elle correspond à une involution de même ordre, appartenant à la courbe  $A$  et engendrée par des transformations birationnelles de cette courbe en elle-même.*

12. Nous avons vu que les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à  $F$ , et non composées avec l'involution  $\Phi$ , sont engendrées par les transformations birationnelles de  $F$  correspondant aux transformations birationnelles de périodes impaires de  $A$  en elle-même. Or, celles-ci sont connues; elles ont été déterminées par S. Kantor <sup>(1)</sup> et, d'une manière plus précise, par M. A. Wiman <sup>(2)</sup>. Ces trans-

<sup>(1)</sup> *Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene.* Acta Mathematica, 1895, XIX.

<sup>(2)</sup> *Ueber die hyperelliptischen Kurven und diejenigen von Geschlecht  $p = 3$ , welche*

formations ont les périodes 3, 7 ou 9. En se reportant aux résultats qui viennent d'être invoqués, on a le théorème suivant:

*Les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à la surface F et non composées avec l'involution  $\Phi$ , sont au nombre de quatre:*

I. *Une involution d'ordre trois sur la surface F représentant les couples de points de la courbe*

$$x_1^3 x_2 + f_4(x_2, x_3) = 0,$$

$f_4(x_2, x_3)$  étant un polynôme homogène de degré quatre.

II. *Une involution d'ordre trois sur la surface F image des couples de points de la courbe*

$$a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_3 x_1^3 + d x_3 x_2^3 + e x_1^2 x_2^e = 0.$$

III. *Une involution d'ordre 7 sur la surface F image des couples de points de la courbe (de Klein)*

$$x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_3 x_1^3 = 0.$$

IV. *Une involution d'ordre 9 sur la surface F représentant les couples de points de la quartique*

$$x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0.$$

Nous étudierons, dans les chapitres suivants, les quatre involutions précédentes, ainsi que les involutions auxquelles elles donnent naissance sur la surface  $\Phi$ . Nous construirons des modèles projectifs de surfaces représentant ces différentes involutions.

### CHAPITRE III

#### L'INVOLUTION D'ORDRE TROIS APPARTENANT À LA SURFACE REPRÉSENTANT LES COUPLES DE POINTS DE LA COURBE

$$x_1^3 x_2 + f_4(x_2, x_3) = 0.$$

13. La courbe d'ordre quatre et de genre trois

$$x_1^3 x_2 + f_4(x_2, x_3) = 0,$$

où  $f_4(x_2, x_3)$  est un polynôme homogène du quatrième degré, est invariante pour l'homologie

$$\tau = \begin{pmatrix} \varepsilon x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

*eindeutigen Transformationen in sich zulassen. Bihang till K. Svenska Akad. Handl. 1895, XXI. — Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene. Mathem. Annalen, 1897, XLVIII.*

$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  étant une racine primitive cubique de l'unité. La transformation  $\tau$  engendre une involution rationnelle d'ordre trois et laisse cinq points invariants, à savoir:  $Q_0$ , centre d'homologie et  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ , situés sur l'axe d'homologie  $x_1 = 0$ . Les quatre droites  $Q_1 Q_0, Q_2 Q_0, Q_3 Q_0, Q_4 Q_0$  sont des tangentes d'inflexion en  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ , et la tangente en  $Q_0$  a, avec  $A$ , un contact quartiponctuel (point d'ondulation).

On a d'ailleurs

$$|4Q_0| = |Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4|.$$

Considérons la surface  $F$  qui représente, sans exception, les couples de points (non ordonnés) de la courbe  $A$ . À  $\tau$  correspond une transformation birationnelle  $T_1$  de  $F$  en elle-même, engendrant une involution  $I_3$ , d'ordre trois.

Cette involution  $I_3$  possède quinze points de coïncidence, à savoir:

$P_{00}$  représentant le couple formé par le point  $Q_0$  compté deux fois:

$P_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) représentant le couple  $Q_0 Q_i$ ;

$P_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) représentant le couple  $Q_i Q_k$ .

Désignons par  $H_0, H_1, H_2, H_3, H_4$  les courbes de  $\Sigma$  passant respectivement par les points  $P_{00}, P_{11}, P_{22}, P_{33}, P_{44}$  (qui se trouvent sur  $K$ ). Le point  $P_{ik}$  ( $i \geq k$ ) se trouve à l'intersection des courbes  $H_i, H_k$  ( $i, k = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

14. La transformation  $T_1$  change en lui-même le système canonique  $|C|$  de  $F$ . En particulier, elle change en elles-mêmes les courbes  $C$  passant par les six points  $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}$  et la courbe  $C$  composée de  $H_0$  et de la courbe  $H'_0$  que la transformation  $T$  fait correspondre à  $H_0$ .

Soit  $F^*$  une surface image de l'involution  $I_3$ . À une courbe  $C$  correspond, sur  $F^*$ , une courbe  $C^*$  de genre 7, ayant 6 points doubles variables. La courbe  $C^*$  a donc le genre virtuel 7. Son degré virtuel est égal en degré effectif 6 augmenté du double du nombre de points doubles variables, donc à 18.

Le système linéaire  $|C^*|$  a la dimension  $r$  donnée par le théorème de Riemann-Roch,

$$r \geq \pi_a + 18 - 13 + 1 \geq 6,$$

$\pi_a$  étant le genre arithmétique de  $F^*$ .

Rapportons projectivement les courbes  $C^*$  aux hyperplans d'un  $S_r$ , nous obtenons une surface d'ordre 18, birationnellement, identique à  $F^*$ , que nous désignerons toujours par  $F^*$ .

À l'involution  $I_3$  correspond sur  $\Phi$  une involution  $I'_3$  dont nous désignerons par  $\Phi^*$  une surface image. Opérant sur  $|\Gamma|$  comme nous avons opéré sur  $|C|$ , nous formons, sur  $\Phi^*$ , un système linéaire  $|\Gamma^*|$ , de genre 7 et de degré 9. La surface  $\Phi$  étant régulière, il en est de même de  $\Phi^*$  et la dimension de  $|\Gamma^*|$  est donc (Riemann-Roch) égale à  $\pi'_a + 3$ . Or  $\pi'_a < 3$ , car  $|C|$  n'est pas composé avec  $I_3$ , donc la dimension de  $|\Gamma^*|$ , au plus égale à 5, est

inférieure à celle de  $|C^*|$ , qui est donc simple. La surface  $F^*$ , de  $S_r$ , est donc simple.

Au système  $|C^*|$  correspond, sur  $F$ , un système dont les courbes sont contenues totalement dans le système tricanonique  $|3C|$ .

15. Nous allons étudier les points de coïncidence  $P_{12}, P_{13}, \dots, P_{34}$ .

Remarquons que les courbes de  $|C|$  passant par un de ces points, passent également par les cinq autres. De plus, ces courbes, qui forment un faisceau, ne peuvent se toucher en ces points.

Une de ces courbes étant transformée en elle-même par  $T_1$ , il en résulte que les points en question sont des *points de coïncidence parfaits* pour  $I_3$ .

Trois courbes  $C$  passant par les six points considérés forment une courbe du système  $|3C|$ ; par conséquent les courbes de  $|3C|$  qui sont des transformées de courbes  $C^*$  de  $F^*$  et qui passent par  $P_{12}$ , par exemple, ont en ce point une multiplicité  $i$  au plus égale à 3. Considérons une de ces courbes et son homologue  $C^*$  sur  $F^*$ . Soit  $x$  le genre de cette courbe (qui passe par le point de diramation  $P_{12}^*$  correspondant à  $P_{12}$ ). La formule de Zeuthen donne

$$6(x - 1) + i(i + 1) = 72.$$

On en conclut que  $i(i + 1)$  est multiple de 3. Mais d'autre part, le degré effectif des courbes  $3C$  passant par  $P_{12}$  et transformées de courbes  $C^*$  est multiple de 3. Or, ce degré est  $36 - i^2$ , car ces courbes ne peuvent pas se toucher. On voit donc que  $i = 3$  et que, par suite,  $x = 11$ .

Par conséquent, la surface  $F^*$  possède en  $P_{12}^*$  une singularité qui abaisse de deux unités le genre d'une section hyperplane. La courbe  $C^*$  passant par  $P_{12}^*$  a pour transformée sur  $F$  une courbe  $3C$  ayant un point triple en  $P_{12}$  et sur chaque branche de cette courbe en ce point il y a un groupe de  $I_3$  infiniment voisin. Donc la courbe  $C^*$  a un point triple en  $P_{12}^*$  et ce point est un point conique triple à cône tangent rationnel de  $F^*$ .

La surface  $F^*$  possède six points de diramation  $P_{12}^*, P_{13}^*, \dots, P_{34}^*$ , qui sont des points triples coniques à cônes tangents rationnels.

16. Examinons maintenant les points  $P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}, P_{11}, P_{22}, P_{33}, P_{44}$ .

Considérons par exemple le couple  $P_{01}, P_{11}$ . Les courbes  $C$  passant par l'un de ces points s'osculent en chacun d'un en touchant la courbe  $H_1$  en  $P_{11}$ , la courbe  $H_0$  en  $P_{01}$ . Mais une de ces courbes  $C$  n'est pas, en général, invariante pour  $T_1$ . Parmi les courbes  $C$  passant par  $P_{01}$  et  $P_{11}$ , il y en a deux invariantes pour  $T_1$ , l'une est constituée par les courbes  $H_0, H'_0$ , l'autre par les courbes  $H_1, H'_1$ . Remarquons que la courbe  $H'_0$  touche  $H_1$  en  $P_{11}$  et que la courbe  $H'_1$  touche  $K$  en  $P_{11}$  et  $H_0$  en  $P_{01}$ . Nous connaissons donc, en chacun des points considérés, deux directions invariantes pour  $T_1$ , à savoir: en  $P_{11}$ , les directions tangentes respectivement à  $K$  et  $H_1$ ; en  $P_{01}$ , les directions tangentes à  $H_1$  et à  $H_0$ .

Supposons que  $P_{11}$  soit un point de coïncidence parfaite. Alors, le point

de diramation  $P_{11}^*$  correspondant sur  $F^*$  est un point triple conique, a cône tangent rationnel. Considérons une courbe  $C$  passant par  $P_{11}$  et non invariante pour  $T_1$ . Cette courbe, jointe a ces transformées par  $T_1$ , donne une courbe de  $|3C|$  à laquelle correspond, sur  $F^*$ , une courbe  $C^*$  ayant un point triple avec une seule tangente en  $P_{11}^*$ . Mais on peut former  $\infty^1$  courbes  $C^*$  analogues, la tangente en  $P_{11}^*$  restant la même. Le cône des tangentes en  $P_{11}^*$  devrait donc être dégénéré en trois plans concourants, la droite commune correspondant à la direction tangente à  $H_1$  en  $P_{11}$ . Considérons maintenant la courbe  $3(H_0 + H'_0) \equiv 3C$ . Il lui correspond, sur  $F^*$ , une courbe  $C^*$  située dans un hyperplan ne passant pas par la droite triple du cône tangent à  $F^*$  en  $P_{11}^*$ , mais dont la tangente en  $P_{11}^*$  est unique. Il faudrait donc que le cône tangent en  $P_{11}^*$  à  $F^*$  se réduise à un plan triple. Cela revient à admettre que les courbes de  $|3C|$ , invariantes pour  $T_1$ , passant par  $P_{11}$ , y ont un point triple a tangente unique, tout en formant un système linéaire. Cela est absurde, donc  $P_{11}$  n'est pas un point de coïncidence parfaite. Il est de même de  $P_{01}$ .

On arrive de la même manière à la même conclusion pour les points  $P_{22}, P_{02}, P_{33}, P_{03}, P_{44}, P_{04}$ . Pour  $P_{00}$ , la démonstration est un peu différente, mais repose sur les mêmes principes. Les courbes  $C$ , passant par  $P_{00}$ , y acquièrent un point double dont les branches touchent  $K$  en  $P_{00}$ . À trois de ces courbes transformées l'une dans l'autre par  $T_1$  correspond une courbe  $C^*$  ayant en  $P_{00}^*$  un point sextuple à deux tangentes triples. Si donc  $P_{00}$  était un point de coïncidence parfaite, le cône tangent à  $F^*$  en  $P_{00}^*$  devrait se réduire à trois plans confondus, ce qui est absurde.

On sait qu'à un point de coïncidence non parfaite correspond un point double biplanaire ordinaire de diramation, donc:

*La surface  $F^*$  possède neuf points de diramation  $P_{00}^*, P_{11}^*, \dots, P_{44}^*, P_{01}^*, P_{04}^*$  qui sont des points doubles biplanaires ordinaires.*

17. On sait que si une surface possède un point triple, ses adjointes passent par ce point; en d'autres termes, les courbes canoniques de  $F^*$  doivent rencontrer en un point les courbes auxquelles sont équivalents, au point de vue algébrique, les six points triples de  $F^*$ . D'autre part, une courbe canonique  $\bar{C}^*$  de  $F^*$  doit se transformer en une courbe canonique de  $F$ . On en conclut que les courbes canoniques de  $F^*$  correspondent aux courbes  $C$  passant par  $P_{12}, P_{13}, \dots, P_{34}$ . On a donc, sur  $F^*$ , un faisceau de courbes canoniques  $|\bar{C}^*|, p_g = 2$ .

On voit aisément que les courbes  $\bar{C}^*$  sont elliptiques et que, par suite, on a, pour  $F^*$ ,  $p^{(1)} = 1$ .

Soit  $\delta$  le nombre de courbes  $\bar{C}^*$  ayant un point double en dehors des points de diramation. Comme un point double biplanaire ordinaire abaisse la classe d'une surface de trois unités, l'invariant de Zeuthen-Segre  $I$  de  $F^*$ , calculé au moyen du faisceau  $|\bar{C}^*|$ , est

$$I = \delta + 23.$$

L'invariant de Zeuthen-Segre de  $F$  est d'une part égal à 2 et d'autre part, calculé au moyen du faisceau formé par les  $C$  passant par  $P_{12}, \dots, P_{34}$ , égal à  $3\delta - 25$ . On en conclut  $\delta = 9$  et  $I = 32$ .

Par la formule

$$I + p^{(1)} = 12 p_a + 9,$$

on trouve que le genre arithmétique de  $F^*$  est  $p_a = 2$ .  $F^*$  est donc régulière. Par suite, la dimension de  $|C^*|$  est, d'après le théorème de Riemann-Roch, égale à 8, donc:

*La surface  $F^*$ , image de l'involution  $I_3$ , est d'ordre 18, à sections hyperplanes de genre 13, dans un espace  $S_8$ . Elle possède six points triples à cônes tangents rationnels et neuf points doubles biplanaires ordinaires. Elle a les genres  $p^{(1)} = 1$ ,  $p_g = p_a = 2$ ,  $P_2 = 3$ ,  $P_3 = 4$ , ...*

18. Considérons l'involution d'ordre 6 engendrée sur  $F$  par les transformations (permutables)  $T$  et  $T_1$ . Nous avons déjà prouvé l'existence, sur la surface  $\Phi^*$  image de cette involution, d'un système linéaire  $|\Gamma^*|$ , de genre 7 et de degré 9, de dimension  $r$  au moins égale à 3 et au plus égale à 5. Rapportons projectivement les courbes  $\Gamma^*$  aux hyperplans d'un  $S_r$ . Nous obtenons, dans cet espace, une surface d'ordre 9 birationnellement identique à  $\Phi^*$ . C'est cette surface que nous désignerons dorénavant par  $\Phi^*$ .

L'involution d'ordre 6 considérée possède:

- a) Un point de coïncidence d'ordre 6,  $P_{00}$ , invariant à la fois pour  $T$  et  $T_1$ . Ce point est évidemment une coïncidence non parfaite.
- b) Six points de coïncidence parfaite triple  $P_{12}, \dots, P_{34}$ .
- c) Huit points de coïncidence triple non parfaite  $P_{11}, P_{22}, P_{33}, P_{44}, P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}$ .
- d) Vingt-sept points de coïncidence parfaite double (invariants pour  $T$ ).

Ainsi que nous l'avons fait dans des travaux antérieurs déjà cités plus haut, on établit qu'au point de coïncidence sextuple correspond, sur  $\Phi^*$ , un point de diramation qui est un point double biplanair formé d'une suite de trois points doubles infiniment voisins successifs dont le dernier est conique.

Aux six points de coïncidence triple  $P_{12}, \dots, P_{34}$  correspondent trois points de diramation qui sont des points triples coniques à cônes tangents rationnels de  $\Phi^*$ .

Aux huit autres points de coïncidence triple correspondent quatre points de diramation qui sont des points doubles biplanaires ordinaires de  $\Phi^*$ .

Enfin, aux vingt-sept points de coïncidence double correspondent neuf points de diramation qui sont des points doubles coniques de  $\Phi^*$ .

19. Le système  $|C|$  étant composé avec l'involution  $\Phi$ , il correspond sur  $\Phi$ , aux courbes  $\bar{C}^*$  de  $F^*$ ,  $\infty^1$  courbes  $\bar{\Gamma}^*$  qui sont nécessairement les courbes canoniques de  $\Phi^*$ . On a donc, pour cette dernière surface,  $p_g = 2$ ,  $p^{(1)} = 2$ . De plus, la surface étant nécessairement régulière, on a  $p_a = 2$ ,

$P_2 = 3, P_3 = 4, \dots$ . Par conséquent, on a (théorème de Riemann-Roch)  $r = 5$ , et

*L'involution d'ordre six engendrée sur  $F$  par les transformations  $T$  et  $T_1$ , a pour image une surface d'ordre 9, à sections hyperplanes de genre 7, de  $S_5$ , possédant:*

- un point double biplanaire formé d'une suite de trois points doubles infiniment voisins successifs dont le dernier est conique;*
- trois points triples coniques à cônes tangents rationnels;*
- quatre points doubles biplanaires ordinaires;*
- neuf points doubles coniques.*

*Cette surface a les genres  $p_a = p_g = 2, p^{(1)} = 1$ .*

#### CHAPITRE IV

L'INVOLUTION D'ORDRE TROIS APPARTENANT À LA SURFACE REPRÉSENTANT LES COUPLES DE POINTS DE LA QUARTIQUE:

$$a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_3 x_1^3 + d x_3 x_2^3 + e x_1^2 x_2^2 = 0.$$

20. La quartique  $A$ , d'équation

$$a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_3 x_1^3 + d x_3 x_2^3 + e x_1^2 x_2^2 = 0$$

est invariante pour l'homographie

$$\tau = \begin{pmatrix} \varepsilon x_1 & \varepsilon^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

où  $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  est une racine cubique primitive de l'unité.

La transformation  $\tau$  engendre, sur  $A$ , une involution  $\gamma_3$ , elliptique, d'ordre trois, possédant deux points unis  $Q_1$  ( $x_2 = x_3 = 0$ ) et  $Q_2$  ( $x_1 = x_3 = 0$ ). Le troisième point uni de l'homographie,  $Q$  ( $x_1 = x_2 = 0$ ) n'appartient pas à la courbe.

La surface  $F$ , image des couples de points (non-ordonnés) de la courbe  $A$  possède une involution  $I_3$  engendrée par une transformation birationnelle  $T_1$  de  $F$  en elle-même construite au moyen de  $\tau$  comme cela a été indiqué au chapitre II.

L'involution  $I_3$  possède, sur la surface  $F$ , trois points de coïncidence, qui sont:

- 1°) Le point  $P_{11}$ , image du couple de points  $Q_1, Q_1$ .
- 2°) Le point  $P_{12}$ , image du couple  $Q_1, Q_2$ .
- 3°) Le point  $P_{22}$ , image du couple  $Q_2, Q_2$ .

Soient  $H_1, H_2$  les courbes  $H$  passant par  $P_{11}, P_{22}$ ;  $H'_1, H'_2$  les courbes de  $\Sigma$  qui correspondent à  $H_1, H_2$  par la transformation  $T$ . Le point  $P_{12}$  est situé à l'intersection de  $H_1$  et  $H_2$ ;  $P_{11}, P_{22}$  sont sur  $K$ . Remarquons que la

droite  $Q_1 Q_2$  étant une bitangente de la quartique  $A$ , le point  $P_{12}$  est en même temps invariant pour  $T$ .

21. La transformation  $T_1$  laisse invariantes trois courbes canoniques de  $F$ , à savoir:

1°) La courbe  $C_0$  dont les points représentent les couples de points de  $A$  aliésés sur le point  $Q$ .

2°) La courbe  $C_1 \equiv H_1 + H'_1$ .

3°) La courbe  $C_2 \equiv H_2 + H'_2$ .

Les courbes canoniques  $C$  passant par un des points de coïncidence, passent nécessairement par les deux autres; elles ont un point double en  $P_{12}$  et des points simples en  $P_{11}, P_{22}$ . De plus, le faisceau formé par ces courbes est invariant pour  $T_1$ , mais une de ces courbes n'est pas, en général, invariante pour  $T_1$ .

Si les points de coïncidence  $P_{11}, P_{12}, P_{22}$  étaient des coïncidences parfaites, les courbes  $C$  passant par ces points devraient s'y toucher. Mais alors, ces courbes auraient plus de six points communs, ce qui est absurde, puisque  $|C|$  est de degré six. On en conclut que  $I_3$  possède trois points de coïncidence non parfaite.

22. À une courbe  $C$  correspond, sur une surface  $F^*$  image de l'involution  $I_3$ , une courbe  $C^*$  de genre et de degré effectifs 7 et 6, mais possédant six points doubles variables. Le système  $|C^*|$  a donc les genre et degré virtuels égaux à 13 et 18. Il lui correspond, sur  $F$ , le système tricanonique  $|3C|$ .

Considérons un faisceau de courbes  $C^*$ . Nous savons que celles qui passent par un point de diramation y acquièrent un point double et que, comme ce point double équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à deux courbes rationnelles de degré — 2 ayant un point commun, il doit compter, dans le calcul de l'invariant de Zeuthen-Segre, pour trois unités. Soit  $\delta$  le nombre de courbes du faisceau considéré qui ont un point double ordinaire. L'invariant de Zeuthen-Segre de  $F^*$  est égal à

$$12 p_a + 9 - p^{(1)} = \delta - 61,$$

$p_a$  et  $p^{(1)}$  étant les genres arithmétique et linéaire de  $P^*$ .

L'invariant de Zeuthen-Segre de  $P$ , calculé au moyen du faisceau correspondant de  $|3C|$ , donne  $\delta = 67$ . On en conclut

$$12 p_a + 3 = p^{(1)}.$$

Or, le genre linéaire de  $F^*$  est inférieur à celui, 7, de  $F$ , donc  $p^{(1)} < 7$  et par suite  $p_a = 0, p^{(1)} = 3$ .

La courbe canonique de  $F^*$  a pour transformée une courbe canonique de  $F$  et cette courbe ne doit pas passer par les points de coïncidence de  $I_3$ . On en conclut que la courbe canonique de  $F^*$  est la courbe  $C_0^*$  qui a pour correspondante  $C_0$  sur  $F$ . On a, pour  $P^*$ ,  $p_g = 1$ .

23. Considérons l'involution d'ordre six engendrée par  $T$  et  $T_1$  sur  $F$ . En opérant sur le système  $|C|$  comme on l'a fait tantôt et en remarquant que ce système est composé avec l'involution  $\Phi$ , on construit, sur une surface  $\Phi^*$  image de cette involution, un système  $|\Gamma^*|$ , de degré et genre virtuels 9 et 7.

La surface  $\Phi^*$ , étant également l'image d'une involution d'ordre trois existant sur la surface régulière  $\Phi$ , est régulière. Soit  $\Gamma_0^*$  la courbe qui correspond sur  $\Phi^*$  à  $C_0$ ; comme elle correspond également à la courbe canonique  $C_0^*$  de  $F^*$ , c'est la courbe canonique de  $\Phi^*$  et on a, pour cette surface,  $p_a = p_g = 1$ . La courbe  $C_0$  ne passant par aucun point de coïncidence de  $I_3$  ni de  $\Phi$ , la courbe  $\Gamma_0^*$  a le genre 2 et  $\Phi^*$  a donc le genre linéaire  $p^{(1)} = 2$ . On en conclut que ses plurigenres sont  $P_2 = 3, P_3 = 5, \dots$ ,

$$P_i = \frac{1}{2} i(i-1) + 2 \quad (i > 1).$$

Le système  $|\Gamma^*|$ , qui est le système tricanonique de  $\Phi^*$ , a la dimension  $P_3 - 1 = 4$ . Rapportant projectivement les courbes de  $|\Gamma^*|$  aux hyperplans d'un  $S_4$ , nous obtenons une surface birationnellement identique à  $\Phi^*$  (et que nous désignerons encore par cette même lettre), qui est d'ordre 9.

L'involution d'ordre 6, engendrée par  $T$  et  $T_1$  sur  $F$ , possède:

- a) un point de coïncidence sextuple  $P_{12}$ ,
- b) deux points de coïncidence triple  $P_{11}, P_{22}$ .

Ces trois points sont des coïncidences non parfaites.

- c) vingt-sept points de coïncidence double.

Par suite, on peut énoncer le théorème suivant:

*L'involution d'ordre six engendrée sur  $F$  par  $T$  et  $T_1$  a pour image une surface d'ordre 9, à sections hyperplanes de genre 7, de  $S_4$ , possédant:*

- un point double biplanaire constitué par une suite de trois points doubles infiniment voisins successifs, le dernier étant conique,*
- un point double biplanaire ordinaire;*
- neuf points doubles coniques.*

*Cette surface a les genres  $p^{(1)} = 2, p_a = p_g = 1, P_2 = 3, P_3 = 5, \dots$ ,*

$$P_i = \frac{1}{2} (i-1) + 2 \quad (i > 1).$$

On sait que M. Enriques <sup>(1)</sup> a déterminé le type général d'une surface algébrique de genres  $p_a = p_g = 1, p^{(1)} = 2$ . Le type normal de cette surface est la surface tricanonique d'ordre 9, à sections hyperplanes de genre 7, de  $S_4$ , possédant une droite double ou triple, image de la courbe canonique. Cette droite est précisément double quand la  $g_3^1$  découpée sur la courbe canonique par les courbes tricanoniques, a un point fixe. Cela n'a pas lieu dans le cas de la surface  $\Phi^*$ , donc cette surface possède une droite triple, image de la courbe  $\Gamma_0^*$ .

<sup>(1)</sup> *Le superficie algebriche di genere lineare  $p^{(1)} = 2$ . Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1897, (5), VI.*

24. Reprenons la surface  $F^*$ . Le système  $|C^*|$  a, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension  $r \geq 6$ . Rapportons projectivement les courbes  $C^*$  aux hyperplans d'un  $S_r$ , nous obtenons une surface d'ordre 18, que nous désignerons toujours par  $F^*$ . Cette surface est simple, puisque  $\Phi^*$  est dans un  $S_4$ .

Correspondant aux trois points de coïncidence  $P_{11}, P_{12}, P_{22}$ ,  $F^*$  possède trois points de diramation qui sont des points doubles biplanaires ordinaires.

Le système bicanonique de  $\Phi^*$  a la dimension 2, donc celui de  $F^*$  a la dimension au moins égale à 2. On ne peut pas dire que le système bicanonique de  $F^*$  est régulier, car le théorème de Picard-Severi <sup>(1)</sup> peut s'énoncer: «Le système adjoint à une courbe apte à définir un système continu qui n'est pas un faisceau irrationnel, est régulier» et la courbe canonique  $C_0^*$  de  $F^*$  est isolée. Mais le théorème qui vient d'être invoqué permet de dire que le système tricanonique  $|C^*|$  est régulier et que, par suite, pour  $F^*$ ,  $P_1 = 7$ . En général,  $P_i = i(i-1) + 1$  ( $i > 2$ ).

L'involution  $I_3$  est birationnellement identique à une surface d'ordre 18, à sections hyperplanes de genre 13, de  $S_6$ , possédant trois points doubles biplanaires ordinaires. Cette surface a les genres  $p^{(1)} = 3$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_g = 1$ ,  $P_2 \geq 3$ ,  $P_3 = 7$ , ...,  $P_i = i(i-1) + 1$  ( $i > 2$ ).

LUCIEN GODEAUX

Front Belge, 17 Janvier 1917

<sup>(1)</sup> Loc. cit. (Chap. I).

(à suivre)