LES FUNCIONS DE TCHEBICHEF *

1. En sa Memoria sobre'ls números prims, publicada l'any 1852 (*Journal de Lionville,* XVII, pàg. 366), En Tchebichef estudía en primer terme la funció θx definida com segueix:

Per a qualsevol valor positiu de $x \geqq 2$, la funció θx és la suma dels logaritmes neperians de tots els números prims que no passin de x; o això que és el mateix, θx és el logaritme neperià del producte de tots els números prims que no passin de x. Per a qualsevol altre valor positiu de $x < 2$, es posa per definició $\theta x = 0$. D'aquesta manera la funció θx resta definida en tot l'interval positiu.

Es despren de la definició que la funció θx es constant en tot interval que no continga cap número prim, o que'n tinga no més que un, en sa vora inferior; que cada vegada que x, variant continuament, arriba a un número prim, la funció θx fa un salt igual al logaritme d'aquell número prim; i que en conseqüencia, cada número prim es una solució de continuitat de la funció θx, que és en aquell valor de x funció semicontinua, solament cap a la dreta.

Valent-se de la funció θx, en defineix una altra,

$$\psi x = \theta x + \theta x^{\frac{1}{2}} + \theta x^{\frac{1}{3}} + \theta x^{\frac{1}{4}} + \ldots.., \qquad (1)$$

que per a qualsevol valor positiu de $x \geqq 2$, és un polinomi, perquè al créixer n indefinidament, $x^{\frac{1}{n}}$ té per límit la unitat, de manera que arribarà a ésser $x^{\frac{1}{n}} < 2$, i des del moment que això siga, $\theta x^{\frac{1}{n}}$ i tots els termes que seguirían son nuls. Per als demés valors positius $x < 2$, es clar que també $\psi x = 0$.

I valent-se d'aquesta segona funció ψx, n'estudía una altra definida així,

$$Tx = \psi x + \psi \frac{x}{2} + \psi \frac{x}{3} + \psi \frac{x}{4} + \ldots.., \qquad (2)$$

que també per a qualsevol valor positiu de $x \geqq 2$, consta d'un número limitat de termes, per anul·lar-se $\psi \frac{x}{n}$, i tots els que seguirían des del moment

* Conservo la ortografía francesa, de manera que la *ch* deu pronunciar-se com la nostra *xeix*.

en que $\frac{x}{n} < 2$. I també per als altres valors positius de $x < 2$, es clar que tindrán $\mathrm{T}x = 0$.

2. Si en la definició (2) de $\mathrm{T}x$, hi substituim els valors (1) de la funció ψ, podrem disposar els diferents termes de que's composa $\mathrm{T}x$, en una matriu rectangular, tal com

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{T}x = \theta x + \theta x^{\frac{1}{2}} + \theta x^{\frac{1}{3}} + \theta x^{\frac{1}{4}} + \ldots\ldots \\ \quad + \theta \frac{x}{2} + \theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} + \ldots\ldots \\ \quad + \theta \frac{x}{3} + \theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}} + \ldots\ldots \\ \quad + \theta \frac{x}{4} + \theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + \theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}} + \ldots\ldots \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{3}$$

Aquesta matriu és limitada horitzontalment i verticalment per a qualsevol valor determinat de $x \gtreqless 2$; car està limitat el número de files efectives, i el número de termes efectius en cada fila, com s'és dit més amunt.

De les definicions surt que aquesta última funció $\mathrm{T}x$ és una suma de logaritmes neperians de números prims, repetits algún d'ells, car pot trobar-se al ensemps en varies de les funcions θ que s'han de sumar per a tenir la T. Així és que podrem posar

$$\mathrm{T}x = \Sigma k_\alpha \log \alpha; \tag{4}$$

prenent α seguidament els valors

$$\alpha = 2, 3, 5, 7, 11 \ldots\ldots,$$

prims, que no passin de x; i per a cada valor d'α, essent k_α igual al número de termes o elements de la matriu (3) que tinguin sumat el logaritme d'α, o això que és el mateix, k_α és igual al número d'elements iguals o més grans que α en aquesta altra matriu, ja il·limitada:

$$\left.\begin{array}{lllll} x & x^{\frac{1}{2}} & x^{\frac{1}{3}} & x^{\frac{1}{4}} & \ldots\ldots \\ \frac{x}{2} & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}} & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} & \ldots\ldots \\ \frac{x}{3} & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}} & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}} & \ldots\ldots \\ \frac{x}{4} & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \tag{5}$$

Fixem-nos en les columnes d'aquesta matriu.

Els números de la primera columna

$$x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \ldots\ldots,$$

es poden fer correspondre biunivocament amb els múltiples d' α

$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \ldots\ldots,$$

i segons que $\frac{x}{n} \gtreqless \alpha$, serà $n\alpha \lesseqgtr x$. Doncs, en la primera columna de la matriu (5) hi ha tants elements iguals o més grans que α, com números divisibles per α hi hagi entre'ls factors de la factorial.

$$(\mathrm{E}x)! = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots (\mathrm{E}x),$$

representant per $\mathrm{E}\,x$ el més gran dels enters que no passin de x.

Igualment, els números de la segona columna de la matriu (5).

$$x^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots\ldots,$$

es poden fer correspondre amb els múltiples d'α^2, i segons que $\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \gtreqless \alpha$, serà $n\alpha^2 \lesseqgtr x$. Doncs, en la segona columna de la matriu (5) hi ha tants elements iguals o més grans que α, com números divisibles per α^2 hi hagi entre'ls factors de la factorial $(\mathrm{E}\,x)!$

Així mateix, els números de la tercera columna de (5) es poden coordenar amb els múltiples d'α^3, i segons que $\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \gtreqless \alpha$, serà $n\alpha^3 \lesseqgtr x$. Doncs, hi ha en la tercera columna de (5) tants elements iguals o, més grans que α, com números divisibles per α^3 hi hagi en la factorial $(\mathrm{E}\,x)!$

Seguint així, de columna en columna, s'arriba finalment a que'l número total d'elements de la matriu (5) que siguin iguals o més grans que x, val a dir, el coeficient k_α del $\log\alpha$ en la expressió (4) de $\mathrm{T}x$, és igual a la suma de tots els números que expressen, quants n'hi ha divisibles per α, quants per α^2, quants per α^3, etcètera, entre'ls factors de la factorial $(\mathrm{E}\,x)!$ En altres mots, k_α és l'exponent de la màxima potencia del número prim α continguda en $(\mathrm{E}\,x)!$

Doncs, si descomposem en factors prims $(\mathrm{E}\,x)!$, i prenem el logaritme neperià del producte de factors prims en que's descomposa aquesta factorial, surtirà.

$$\log(\mathrm{E}\,x)! = \Sigma\, k_\alpha \log\alpha;$$

i com que aquest segon mombre és igual al de (4), tindrem

$$\mathrm{T}x = \log(\mathrm{E}\,x)! \qquad (6)$$

3. Aquesta propietat (6) ve a ésser el teorema fonamental de la memoria d'En Tchebichef, que venim extractant, encara que no més hem de referir-nos a sa primera part.

Aquí considera En Tchebichef, referint-la al mòdul $30 = 2.\ 3.\ 5$, la expressió

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2} - \mathrm{T}\frac{x}{3} - \mathrm{T}\frac{x}{5} + \mathrm{T}\frac{x}{30} \\
&= \left.\begin{aligned}
& \psi\, x + \psi\frac{x}{2} + \psi\frac{x}{3} + \psi\frac{x}{4} + \ldots\ldots \\
& - \psi\frac{x}{2} - \psi\frac{x}{2.2} - \psi\frac{x}{3.2} - \psi\frac{x}{4.2} - \ldots\ldots \\
& - \psi\frac{x}{3} - \psi\frac{x}{2.3} - \psi\frac{x}{3.3} - \psi\frac{x}{4.3} - \ldots\ldots \\
& - \psi\frac{x}{5} - \psi\frac{x}{2.5} - \psi\frac{x}{3.5} - \psi\frac{x}{4.5} - \ldots\ldots \\
& + \psi\frac{x}{30} + \psi\frac{x}{2.30} + \psi\frac{x}{3.30} + \psi\frac{x}{4.30} + \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (7) \\
&= A_1\, \psi\, x + A_2\, \psi\frac{x}{2} + A_3\, \psi\frac{x}{3} + \ldots\ldots + A_n\, \psi\frac{x}{n} + \ldots\ldots;
\end{aligned}
$$

i determina els coeficients A_n d'aquest desenrotllo, distingint els casos següents:

Si n és prim amb el 30, és a dir, si

$$n \equiv 1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ (\mathrm{mod.}\ 30);$$

$\psi\frac{x}{n}$ se trova no més que en la primera fila de (7), i per tant, $A_n = 1$.

Si n té amb el 30 un màxim codivisor igual a 2, 3, o 5, és a dir, si respectivament,

$$
\left.\begin{aligned}
n &\equiv 2,\ 4,\ 8,\ 14,\ 16,\ 22,\ 26,\ 28, \\
n &\equiv 3,\ 9,\ 21,\ 27, \\
n &\equiv 5,\ 25,
\end{aligned}\right| (\mathrm{mod.}\ 30);
$$

$\psi\frac{x}{n}$ es trova en la primera fila de (7), i en una de les tres següents, i per tant, $A_n = 0$.

Si el màxim codivisor de n i 30 és algún dels tres productes binaris.

$$2.3 = 6.\quad 2.5 = 10,\quad 3.5 = 15,$$

és a dir, si respectivament,

$$
\left.\begin{aligned}
n &\equiv 6,\ 12,\ 18,\ 24, \\
n &\equiv 10,\ 20, \\
n &\equiv 15,
\end{aligned}\right| (\mathrm{mod.}\ 30);
$$

$\psi\,\frac{x}{n}$ se trova en la primera fila de (7), i en dugues de les tres següents, i per tant, $A_n = -1$.

Finalment, si $n \equiv 30$ (mod. 30); $\psi\,\frac{x}{n}$ se trova en totes cinc files de (7), i també $A_n = -1$.

Resumint, i deixant apart els casos en que $A_n = 0$; es veu que segons que (mod. 30),

$$n \equiv 1,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 15,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 23,\ 24,\ 29,\ 30,$$

serà respectivament.

$$A_n = 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1.$$

De manera que surtirà.

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2} - \mathrm{T}\frac{x}{3} - \mathrm{T}\frac{x}{5} + \mathrm{T}\frac{x}{30} \\ &= \psi\,x - \psi\frac{x}{6} + \psi\frac{x}{7} - \psi\frac{x}{10} + \psi\frac{x}{11} - \psi\frac{x}{12} + \ldots.. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

que és la suma alternada dels valors de $\psi\,\frac{x}{n}$, que corresponen als valors de n creixents i que tinguin amb el 30 un màxim codivisor $\delta = 1,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30$.

Com que'ls termes d'aquesta suma alternada van mimvant, la suma total estarà sempre compresa entre la dels k primers i la dels $(k+1)$ primers termes, lo que permet determinar parelles de números que comprenguin entre ells el primer membre de (8). En Tchebichef considera la primera de tals limitacions

$$\psi\,x - \psi\,\frac{x}{6} < \mathrm{T}x - \mathrm{T}\,\frac{x}{2} - \mathrm{T}\,\frac{x}{3} - \mathrm{T}\,\frac{x}{5} + \mathrm{T}\,\frac{x}{30} < \psi\,x,$$

i partint d'ella, i del teorema fonamental, per una llarga serie de raonaments i càlculs que no fan al nostre objecte, posant

$$A = \log \frac{2^{\frac{1}{2}}.\ 3^{\frac{1}{3}}.\ 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0.92129\ 20229\ 34090\cdot 78\ \ldots..,$$

arriba a demostrar que

$$\theta\,x < \frac{6}{5}\,A\,x - A\,x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4\log 6}\,(\log x)^2 + \frac{5}{2}\,\log x + 2,$$

$$\theta\,x > A\,x - \frac{12}{5}\,A\,x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8\log 6}\,(\log x)^2 - \frac{15}{4}\,\log x - 3;$$

tenint així dos números que comprenen la suma dels logaritmes de tots els números prims que no passin de x.

D'aquí en dedueix altres dos límits, superior e inferior, del número dels números prims compresos entre dos números donats, i com un cas particular d'això, arriba a demostrar completament un teorema que En Bertrand havía postulat, després de constatar-lo dintre dels límits de les taules conegudes; i és que entre'ls números a i $2a + 2$, qualque siga a, hi ha sempre al menys un número prim.

4. En lloc de seguir En Tchebichef per aquest camí, mon objecte és veure si es pot generalitzar la funció per ell usada, o si al generalitzar-la es dedueix alguna propietat aprofitable.

Començem per un cas més senzill, i referint-nos al mòdul $2.3 = 6$, prenem l'expressió

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{T}\,x - \mathrm{T}\,\frac{x}{2} - \mathrm{T}\,\frac{x}{3} + \mathrm{T}\,\frac{x}{6} \\
&= \left.\begin{array}{l}
\psi\, x + \psi\, \dfrac{x}{2} + \psi\, \dfrac{x}{3} + \psi\, \dfrac{x}{4} + \ldots\ldots \\
- \psi\, \dfrac{x}{2} - \psi\, \dfrac{x}{2.2} - \psi\, \dfrac{x}{3.2} - \psi\, \dfrac{x}{4.2} - \ldots\ldots \\
- \psi\, \dfrac{x}{3} - \psi\, \dfrac{x}{2.3} - \psi\, \dfrac{x}{3.3} - \psi\, \dfrac{x}{4.3} - \ldots\ldots \\
+ \psi\, \dfrac{x}{6} + \psi\, \dfrac{x}{2.6} + \psi\, \dfrac{x}{3.6} + \psi\, \dfrac{x}{4.6} + \ldots\ldots
\end{array}\right\} \qquad (9) \\
&= A_1\, \psi\, x + A_2\, \psi\, \frac{x}{2} + A_3\, \psi\, \frac{x}{3} + \ldots\ldots + A_n\, \psi\, \frac{x}{n} + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Si n és prim amb el 6, és a dir, si $n \equiv 1, 5 \pmod{6}$; $A_n = 1$, perquè $\psi\, \frac{x}{n}$ està no més que en la primera fila de (9).

Si n té amb el 6, el màxim codivisor, 2, o 3, és a dir, si $n \equiv 2, 3, 4 \pmod{6}$; $A_n = 0$, perquè $\psi\, \frac{x}{n}$ està en la primera fila de (9), i en una de las dugues següents.

Però si $n \equiv 6 \pmod{6}$, també $A_n = 0$, perquè $\psi\, \frac{x}{n}$ està en totes quatre files de (9).

Tenim, doncs, que segons que

$$n \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{6},$$

serà respectivament

$$A_n = 1, 0, 0, 0, 1, 0;$$

i per conseqüent

$$\mathrm{T}\,x - \mathrm{T}\,\frac{x}{2} - \mathrm{T}\,\frac{x}{3} + \mathrm{T}\,\frac{x}{6} = \psi\, x + \psi\,\frac{x}{5} + \psi\,\frac{x}{7} + \psi\,\frac{x}{11} + \ldots\ldots \qquad (10)$$

que és una suma, amb tots els termes positius, que son els valors de $\psi\,\frac{x}{n}$ corresponents als valors de n prims amb el 6.

No té res d'estrany que'l resultat en aquest cas sigui més senzill que en el cas estudiat per En Tchebichef, car també el mòdul és més senzill, no tenint més que dos factors prims. Prenem ara el mòdul, una mica més complicat, $2.\ 3.\ 5.\ 7 = 210$, compost dels quatre primers números prims, i considerem la expressió.

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2} - \mathrm{T}\frac{x}{3} - \mathrm{T}\frac{x}{5} - \mathrm{T}\frac{x}{7} + \mathrm{T}\frac{x}{210} \\
= & \left.\begin{array}{l}
\psi\, x + \psi\frac{x}{2} + \psi\frac{x}{3} + \psi\frac{x}{4} + \ldots\ldots \\
- \psi\frac{x}{2} - \psi\frac{x}{2.2} - \psi\frac{x}{3.2} - \psi\frac{x}{4.2} - \ldots\ldots \\
- \psi\frac{x}{3} - \psi\frac{x}{2.3} - \psi\frac{x}{3.3} - \psi\frac{x}{4.3} - \ldots\ldots \\
- \psi\frac{x}{5} - \psi\frac{x}{2.5} - \psi\frac{x}{3.5} - \psi\frac{x}{4.5} - \ldots\ldots \\
- \psi\frac{x}{7} - \psi\frac{x}{2.7} - \psi\frac{x}{3.7} - \psi\frac{x}{4.7} - \ldots\ldots \\
+ \psi\frac{x}{210} + \psi\frac{x}{2.210} + \psi\frac{x}{3.210} + \psi\frac{x}{4.210} + \ldots\ldots
\end{array}\right| \qquad (11) \\
= & A_1\,\psi\, x + A_2\,\psi\frac{x}{2} + A_3\,\psi\frac{x}{3} + \ldots\ldots + A_n\,\psi\frac{x}{n} + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Si n és d'alguna de les $\varphi\ 210 = 48$ mènes de números prims amb el 210; $\psi\,\frac{x}{n}$ no més se trobarà en la primera fila de (11), i $A_n = 1$.

Si n és d'alguna de les mènes de números que tenen amb el 210 el màxim codivisor 2, 3, 5, o 7, i que són

$$\varphi\ 105 + \varphi\ 70 + \varphi\ 42 + \varphi\ 30 = 48 + 24 + 12 + 8 = 92$$

mènes diferentes; $\psi\,\frac{x}{n}$ estarà en la primera fila de (11), i en una de les quatre següents, i $A_n = 0$.

Si n és d'alguna de les mènes de números que tenen amb el 210 un màxim codivisor igual a algún dels productes binaris

$$
\begin{aligned}
2.3 &= 6, & 2.5 &= 10, & 2.7 &= 14, \\
3.5 &= 15, & 3.7 &= 21, & 5.7 &= 35,
\end{aligned}
$$

i que són

$$\varphi\ 35 + \varphi\ 21 + \varphi\ 15 + \varphi\ 14 + \varphi\ 10 + \varphi\ 6 = 24 + 12 + 8 + 6 + 4 + 2 = 56$$

mènes diferentes; $\psi \frac{x}{n}$ està en la primera fila de (11), i en dos de les quatre següents, i $A_n = -1$.

Si n és d'alguna de les mènes de números que tenen amb el 210 un màxim codivisor igual a algún dels productes ternaris

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30, \quad 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42, \quad 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70, \quad 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105,$$

i que són

$$\varphi\, 7 + \varphi\, 5 + \varphi\, 3 + \varphi\, 2 = 6 + 4 + 2 + 1 = 13$$

mènes diferentes; $\psi \frac{x}{n}$ estarà en la primera fila de (11), i en tres de les quatre següents; i aleshores $A_n = -2$.

Finalment, si n és múltiple de 210; $\psi \frac{x}{n}$ estarà en totes sis files de (11), i també $A_n = -2$.

Resumint, si descomposem el desenrotllo total en seccions de 210 termes seguits, en cada secció hi haurà

$$48, \ 92, \ 56, \ 14$$

coeficients iguals respectivament a

$$1, \ 0, \ -1, \ -2;$$

quedant-hi per tant, de cada 210 termes, solament 118 d'efectius.

El desenrot-llo es comença així

$$\psi\, x - \psi \frac{x}{6} - \psi \frac{x}{10} + \psi \frac{x}{11} - \psi \frac{x}{12} + \psi \frac{x}{13} - \psi \frac{x}{14} - \psi \frac{x}{15} + \psi \frac{x}{17}$$
$$- \psi \frac{x}{18} + \psi \frac{x}{19} - \psi \frac{x}{20} - \psi \frac{x}{21} + \psi \frac{x}{23} - \psi \frac{x}{24} - \psi \frac{x}{28} + \psi \frac{x}{29} - 2\psi \frac{x}{30}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ja es veu en l'exemple anterior que la cosa es complica. I si considerem en general el mòdul

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots\ldots p,$$

producte dels números prims tots seguits des del 2 fins al p, i calculem l'expressió

$$\mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2} - \mathrm{T}\frac{x}{3} - \mathrm{T}\frac{x}{5} - \ldots\ldots - \mathrm{T}\frac{x}{p} + \mathrm{T}\frac{x}{m}$$
$$= A_1\, \psi\, x + \mathrm{A}_2\, \psi \frac{x}{2} + A_3\, \psi \frac{x}{3} + \ldots\ldots + A_n\, \psi \frac{x}{n} + \ldots\ldots;$$

trobarem, rahonant com abans, que:

$A_n = 1$, sempre que n sigui prim amb m;

$A_n = 0$, sempre que n sigui divisible per un no més dels números prims que no passin del p;

$A_n = -1$, sempre que n sigui divisible per dos números prims diferents que no passin del p;

$A_n = -2$, sempre que n sigui divisible per tres números prims diferents que no passin del p; i així successivament.

Suposant que des del 2 fins al p, hi ha k números prims diferents, arribarem a que

$A_n = -(k-2)$, sempre que n sigui divisible per $k-1$ d'aquells números prims; i també sempre que n sigui divisible per tots k.

Ja es veu que sembla difícil de trobar una llei general; però també es veu que la simplicitat del resultat que s'ha trobat quant $m = 30$, ve de que essent $k = 3$, el coeficient negatiu de més gran valor absolut és $-(k-2) = -1$, per més que això no dóna pas la raó de la alternancia dels signes.

5. Veiam lo que passarà en el cas del mòdul 30, si en lloc de la expressió d'En Tchebichef prenem aquesta altra

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2} - \mathrm{T}\frac{x}{3} - \mathrm{T}\frac{x}{5} + \mathrm{T}\frac{x}{6} + \mathrm{T}\frac{x}{10} + \mathrm{T}\frac{x}{15} - \mathrm{T}\frac{x}{30} \\ &= A_1\,\psi x + A_2\,\psi\frac{x}{2} + A_3\,\psi\frac{x}{3} + \dots\dots + A_n\,\psi\frac{x}{n} + \dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Si n és prim amb el 30; i si n té amb el 30 el màxim codivisor 2, 3, o 5, tindrem com abans, respectivament, $A_n = 1$, $A_n = 0$.

Fòra d'aquests dos casos, ja la cosa varía. Perquè si n té amb el 30 el màxim codivisor 6, 10, o 15, $\psi\frac{x}{n}$ se trobarà en el primer membre de (12); en el desenrotllo de $\mathrm{T}x$; en dos dels tres, $\mathrm{T}\frac{x}{2}$, $\mathrm{T}\frac{x}{3}$, $\mathrm{T}\frac{x}{5}$; i en un dels tres, $\mathrm{T}\frac{x}{6}$, $\mathrm{T}\frac{x}{10}$, $\mathrm{T}\frac{x}{15}$; i per tant

$$A_n = 1 - 2 + 1 = 0.$$

I si n és múltiple de 30; $\psi\frac{x}{n}$ es trobarà en tots els desenrotllos parcials del primer membre de (12); i per tant

$$A_n = 1 - 3 + 3 - 1 = 0.$$

En definitiva, sortirà

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2} - \mathrm{T}\frac{x}{3} - \mathrm{T}\frac{x}{5} + \mathrm{T}\frac{x}{6} + \mathrm{T}\frac{x}{10} + \mathrm{T}\frac{x}{15} - \mathrm{T}\frac{x}{30} \\ &= \psi x + \psi\frac{x}{7} + \psi\frac{x}{11} + \psi\frac{x}{13} + \psi\frac{x}{17} + \dots\dots \end{aligned}$$

resultat molt semblant al (10) perquè sols hi ha en el segón membre els termes $\psi \frac{x}{n}$ corresponents a valors de n prims amb el 30, i perquè tots els coeficients son iguals a la unitat positiva.

Aquest resultat pot generalitzar-se fàcilment. En honor a En Tchebichef, representa per la característica Tch_k la funció que obtinc per inducció amb referencia al mòdul

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots\ldots p,$$

igual al producte dels k primers números prims. Hem vist que

$$\begin{aligned}\mathrm{Tch}_2\, x &= \mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2} - \mathrm{T}\frac{x}{3} + \mathrm{T}\frac{x}{6}\\ &= \psi\, x + \psi\frac{x}{5} + \psi\frac{x}{7} + \psi\frac{x}{11} + \psi\frac{x}{13} + \ldots\ldots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tch}_3\, x &= \mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2} - \mathrm{T}\frac{x}{3} - \mathrm{T}\frac{x}{5} + \mathrm{T}\frac{x}{6} + \mathrm{T}\frac{x}{10} + \mathrm{T}\frac{x}{15} - \mathrm{T}\frac{x}{30}\\ &= \psi\, x + \psi\frac{x}{7} + \psi\frac{x}{11} + \psi\frac{x}{13} + \psi\frac{x}{17} + \ldots\ldots;\end{aligned}$$

i també es veu que

$$\begin{aligned}\mathrm{Tch}_1\, x &= \mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2}\\ &= \psi\, x + \psi\frac{x}{2} + \psi\frac{x}{3} + \psi\frac{x}{4} + \ldots\ldots\\ &\quad - \psi\frac{x}{2} - \psi\frac{x}{4} - \psi\frac{x}{6} - \ldots\ldots\\ &= \psi\, x + \psi\frac{x}{3} + \psi\frac{x}{5} + \psi\frac{x}{7} + \psi\frac{x}{9} + \ldots\ldots\end{aligned}$$

I ara posem, en general,

$$\mathrm{Tch}_k\, x = \mathrm{T}x - \Sigma\, \mathrm{T}\frac{x}{p_1} + \Sigma\, \mathrm{T}\frac{x}{p_1 p_2} - \Sigma\, \mathrm{T}\frac{x}{p_1 p_2 p_3} + \ldots\ldots + (-1)^k\, \mathrm{T}\frac{x}{m}; \quad (13)$$

essent, en el segón terme, p, quiscun dels k primers números prims; en el tercer terme, $p_1\, p_2$ quiscun de llurs productes binaris; en el quart terme, $p_1\, p_2\, p_3$ quiscun de llurs productes ternaris; i així successivament, fins al últim terme en el qual m es el producte de tots els k primers números prims.

En aquest desenrotllo (13) cada Σ té tants termes com unitats té el respectiu coeficient binòmic del gran k; així, $\Sigma\, \mathrm{T}\frac{x}{p_1}$ conté $\binom{k}{1}$ termes, $\Sigma\, \mathrm{T}\frac{x}{p_1 p_2}$ conté $\binom{k}{2}$ termes, $\Sigma\, \mathrm{T}\frac{x}{p_1 p_2 p_3}$ conté $\binom{k}{3}$ termes, i així successivament. El número total de les funcions T que estàn sumades, positivament o negativament, en la Tch_k, és, doncs, igual a

$$1 + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \dots\dots + \binom{k}{k} = 2^k.$$

Suposem ara desenrotllades totes aquestes $\mathrm{T}z$ en termes de la forma $\psi \frac{z}{n}$, i ordenem la suma total, posant com sempre

$$\mathrm{Tch}_k\, x = A_1\, \psi x + A_2\, \psi \frac{x}{2} + A_3\, \psi \frac{x}{3} + \dots\dots + A_n\, \psi \frac{x}{n} + \dots\dots;$$

i calculem com en els casos anteriors els coeficients A_n, distingint els casos següents:

Si n és prim amb el mòdul m; $\psi \frac{x}{n}$ se trobarà no més que en el desenrotllo del primer terme $\mathrm{T}x$, i per tant, $A_n = 1$.

Si n té amb m un sol factor prim comú p_1; $\psi \frac{x}{n}$ se trobarà en el dessenrotllo de $\mathrm{T}x$, i en el de $\mathrm{T}\frac{x}{p_1}$; i per tant $A_n = 1 - 1 = 0$.

Si n té amb m dos factors prims comuns p_1 i p_2; $\psi \frac{x}{n}$ se trobarà en els desenrotllos de $\mathrm{T}x$, de $\mathrm{T}\frac{x}{p_1}$ i $\mathrm{T}\frac{x}{p_2}$, i de $\mathrm{T}\frac{x}{p_1 p_2}$; i per tant

$$A_n = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Si n té amb m tres factors prims comuns, p_1, p_2 i p_3; $\psi \frac{x}{n}$ es trobarà en els desenrotllos de $\mathrm{T}x$; de $\mathrm{T}\frac{x}{p_1}$, $\mathrm{T}\frac{x}{p_2}$, $\mathrm{T}\frac{x}{p_3}$; de $\mathrm{T}\frac{x}{p_1 p_2}$, $\mathrm{T}\frac{x}{p_1 p_3}$, $\mathrm{T}\frac{x}{p_2 p_3}$; i de $\mathrm{T}\frac{x}{p_1 p_2 p_3}$; de manera que

$$A_n = 1 - 3 + 3 - 1 = 0.$$

En general, si n té $h \lesseqgtr k$ factors prims comuns amb el mòdul m; $\psi \frac{x}{n}$ se trobarà en el desenrotllo del primer terme $\mathrm{T}x$ de (13), en h dels desenrotllos parcials compresos en el segón terme $-\Sigma\,\mathrm{T}\frac{x}{p_1}$, en $\binom{h}{2}$ dels desenrotllos parcials compresos en el tercer terme $\Sigma\,\mathrm{T}\frac{x}{p_1 p_2}$, en $\binom{h}{3}$ dels desenrotllos parcials compresos en el quart terme $-\Sigma\,\mathrm{T}\frac{x}{p_1 p_2 p_3}$, i així successivament, trobant-se sempre

$$A_n = 1 - \binom{h}{1} + \binom{h}{2} - \binom{h}{3} + \dots\dots + (-1)^h \binom{h}{h} = 0$$

Queda, doncs, demostrat que

$$\mathrm{Tch}_k\, x = \Sigma\, \psi\, \frac{x}{n},$$

donant a n tots els valors no divisibles per cap dels números prims 2, 3, 5, 7, 11, ... p; i bastant de pendre aquells que facin $\frac{x}{n} \gtrless 2$, car per als altres, els termes corresponents $\psi\, \frac{x}{n}$ seríen iguals a o.

Encara pot generalitzar-se aquest teorema, prenent h números prims diferents, anc que no siguin els primers de la serie, i anc que no siguin seguits en aquella serie, per tal que tots siguin diferents. Referint-nos al mòdul

$$m = p_1\, p_2\, p_3 \,.....\, p_k,$$

podem refer tots els raonaments que precedeixen, fins a arribar a la conseqüencia final.

Per exemple, si fem

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 5, \quad m = 10,$$

trobaràn que

$$\mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2} - \mathrm{T}\frac{x}{5} + \mathrm{T}\frac{x}{10}$$
$$= \psi\, x + \psi\frac{x}{3} + \psi\frac{x}{7} + \psi\frac{x}{9} + \psi\frac{x}{11} + ...;$$

havent-hi en el segón membre tots els termes $\psi\,\frac{x}{n}$, corresponents als valors de n que s'expressen en el sistema decimal, acabant en una de les xifres 1, 3, 7, 9.

6. Hem dit abans que la simplicitat del resultat trobat per En Tchebichef, quant $m = 30$, ve de que essent $k = 3$, el coeficient negatiu de més gran valor absolut és — 1, de manera que els valors diferents que pot tenir A_n són tan sols 1, 0, — 1; però que això no dóna la raò de la alternancia dels signes que apareix en el desenrotllo d'En Tchebichef (8).

Provem lo que passa amb un altre mòdul també compost de tres factors prims diferents, tal com 2 . 3 . 7 = 42; i considerem la expressió

$$\mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2} - \mathrm{T}\frac{x}{3} - \mathrm{T}\frac{x}{7} + \mathrm{T}\frac{x}{42} = \Sigma\, A_n\, \psi\, \frac{x}{n}.$$

Trobarem com abans $A_n = 1$, quant n sigui prim amb el 42, lo que dóna $\varphi\, 42 = 12$ mènes de valors de n, que són

$$n \equiv 1,\ 5,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 25,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41, (\mathrm{mod.}\ 42),$$

per a les qual $A_n = 1$.

Trobarem $A_n = 0$, quant n tingui amb el 42 un màxim codivisor igual a 2, 3, o 7, lo que fa

$$\varphi\,21 + \varphi\,14 + \varphi\,6 = 12 + 6 + 2 = 20$$

mènes de valors de n, que són

$$\left.\begin{array}{l} n \equiv 2,\ 4,\ 8,\ 10,\ 16,\ 20,\ 22,\ 26,\ 32,\ 34,\ 38,\ 40, \\ n \equiv 3,\ 9,\ 15,\ 27,\ 33,\ 39, \\ n \equiv 7,\ 35, \end{array}\right\} \pmod{42},$$

per a les quals $A_n = 0$.

I trobarem $A_n = -1$, quant n tingui amb el 42 un màxim codivisor igual a 6, 14, 21, o 42, lo que fa

$$\varphi\,7 + \varphi\,3 + \varphi\,2 + \varphi\,1 = 6 + 2 + 1 + 1 = 10$$

mènes de valors de n, que són

$$\left.\begin{array}{l} n \equiv 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36, \\ n \equiv 14,\ 28, \\ n \equiv 21, \\ n \equiv 42, \end{array}\right\} \pmod{42},$$

per a les quals $A_n = -1$.

De cada 42 termes seguits, n'hi haurà, doncs, 12, 20, 10, que tindràn respectivament els coeficients 1, 0, -1. Queden 22 termes efectius de cada 42; mes com d'aquells 22 n'hi ha 12 de positius per 10 de negatius, és clar que no pot haver-hi constantment la alternancia dels signes com en la fòrmula (8) d'En Tchebichef.

En el cas d'ara el desenrotllo es comença així

$$\begin{aligned} & \mathrm{T}x - \mathrm{T}\frac{x}{2} - \mathrm{T}\frac{x}{3} - \mathrm{T}\frac{x}{7} + \mathrm{T}\frac{x}{42} \\ & = \psi x + \psi\frac{x}{5} - \psi\frac{x}{6} + \psi\frac{x}{11} - \psi\frac{x}{12} + \psi\frac{x}{13} - \psi\frac{x}{14} + \psi\frac{x}{17} - \psi\frac{x}{18} + \psi\frac{x}{19} \\ & - \psi\frac{x}{21} + \psi\frac{x}{23} - \psi\frac{x}{24} + \psi\frac{x}{25} - \psi\frac{x}{28} + \psi\frac{x}{29} - \psi\frac{x}{30} + \psi\frac{x}{31} - \psi\frac{x}{36} + \psi\frac{x}{37} \\ & + \psi\frac{x}{41} - \psi\frac{x}{42} + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Per a no haver de buscar-lo a les palpentes, si és que existeixi, algún altre mòdul que tingui la particularitat del $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, tant encertadament usat per En Tchebichef, sabent com sabem que no pot tenir més de tres factors prims diferents, posem amb tota generalitat

$$m = p_1\, p_2\, p_3\,,$$

i considerem el desenrotllo

$$T\,x - T\frac{x}{p_1} - T\frac{x}{p_2} - T\frac{x}{p_3} + T\frac{x}{m} = \Sigma A_n \psi \frac{x}{n}.$$

Tindrem: $A_n = 1$, per a les φm mènes de números, prims amb el mòdul m; $A_n = 0$ per a les $\varphi\frac{m}{p_1} + \varphi\frac{m}{p_2} + \varphi\frac{m}{p_3}$ mènes de números que tinguin un sol d'aquests tres factors prims; i $A_n = -1$ per a les $\varphi p_1 + \varphi p_2 + \varphi p_3 + 1$ mènes de números que tinguin amb el m un màxim codivisor igual a $p_2\, p_3$, $p_1 p_3$, $p_1 p_2$, $p_1 p_2\, p_3$. Ara bé, per a que pugui haver-hi la alternancia dels signes com en la fòrmula d'En Tchebichef, sería necessari com a primera condició, que el número dels termes positius fos igual al número dels termes negatius, en cada secció de m termes seguits. Tenim, doncs, com a primera condició

$$\varphi\, m = \varphi\, p_1 + \varphi\, p_2 + \varphi\, p_3 + 1;$$

i com que fòra els de 1 i de 2, tots els demés indicadors són números parells, tenim que un dels tres factors, tal com p_3 té d'ésser igual a 2, car d'altra manera l'equació anterior daría un número parell igual a un número senàs. Posem, doncs,

$$p_3 = 2, \quad m = 2\, p_1 p_2,$$

i l'equació anterior es transforma en

$$\varphi\,(2\, p_1 p_2) = \varphi\, p_1 + \varphi\, p_2 + 2,$$

això és, segons les fòrmules dels indicadors

$$(p_1 - 1)\,(p_2 - 1) = (p_1 - 1) + (p_2 - 1) + 2,$$

o sigui

$$p_1 p_2 + 1 = 2\,(p_1 + p_2);$$

que és lo que passa quant $p_1 = 3$, $p_2 = 5$.

Veiam si podem trobar altra parella de valors de p_1 i p_2. Com que tots dos han d'ésser senassos, podem posar

$$p_2 = p_1 + 2\,k,$$

essent k un enter positiu; i així surt

$$p_1{}^2 + 2\, p_1\, k + 1 = 4\, p_1 + 4\, k,$$

o sigui

$$p_1{}^2 + 2\, p_1\,(k - 2) + (1 - 4\, k) = 0,$$

que dóna

$$p_1 = 2 - k \overset{\pm}{\underset{1}{}} \sqrt{k^2 + 3}.$$

Les condicions del problema donen ara seguidament

$$k = 1, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 5,$$

que és la solució d'En Tchebichef, com a solució única.

Després de tot, això encara no més explica el perquè en el desenrotllo d'En Tchebichef de cada 30 termes seguits n'hi ha tants de positius com de negatius; però no acaba d'explicar encara el perquè de l'alternancia dels signes.

JOSEP RIUS I CASAS

Facultat de Ciencies, Saragossa
Gener de 1917

Secretaria de l'Institut de Ciencies

Stat. Anòn. La Neotipia, Rambla de Catalunya, 116, Telèfon G 908 : Barcelona