EL PROBLEMA DE MALFATTI

Consideracions històriques i demostracions geomètrico-projectives

§ 1. — Una de les aplicacions més curioses i originals de la representació en l'espai dels feixos de còniques planes, que vam exposar en un article anterior d'aquests Arxius (*), és la resolució projectiva del problema de Malfatti. Aquest interessant problema, que, sense tenir la més petita aplicació a la pràctica, ha preocupat, a més d'altres nombrosíssims talents matemàtics de segón ordre, els més aventatjats de Steiner, Cayley i Plücker, proporcionant al primer un dels més brillants triomfs per a la seva tasca matemàtica, ha estat en poc més d'un segle, l'objecte de més de cent treballs que han aparegut en llibres i revistes, algunes d'elles tan serioses i importants com el *Journal de Crelle* i les *Philosophicals transactions*, de la Reial Societat de Londres.

§ 2. — L'origen del problema de Malfatti va ésser a l'any 1687, en una petita cita de Jaume Bernoulli (**), on proposava inscriure en un prisma triangular, dret i equilàter, tres cilindres de revolució que ocupessin el més gran volum possible. La solució és senzillíssima, inscrivint en qualsevulga de les bases tres cercles iguals i tangents. El radi comú d'aquests cercles deu ésser (anomenant l la longitut comú dels tres costats del triangle equilàter)

$$r' = \frac{\sqrt{3}-1}{4}\, l$$

fórmula fàcil de deduir, puix el costat l és igual a dues voltes el radi més dues voltes la tangent d'un vèrtex al cercle corresponent, la qual tangent és $r'\sqrt{3}$. Si, doncs,

$$l = 2r'(1+\sqrt{3})$$

tindrem aiximateix

$$r' = \frac{l}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}\, l. \tag{1}$$

(*) Arxius, Any II, n.º 3, pàg. 19-30.

(**) Jacques Bernoulli: *Œuvres complètes.* Genève, 1744, vol. I, pàg. 303.

Qualsevol d'aquests cercles és tangent a les bisectrius dels angles del triangle equilàter en què no estàn inscrits (fig. 1.ª).

§ 3.—Aquest cas particular va ésser generalisat per Malfatti, matemàtic italià de principis del segle passat, el qual, en el volum X de les *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze* (Modena, 1803) (*), proposa generalment el problema en aquesta forma: «Dato un Prisma retto triangolare di qualcunque materia come di marmo, cavare da esso tre Cilindri dell'altezza del Prisma e della maggior grossezza possibile correspettivamente, e in conseguenza con minor avanzo possibile di materia, avuto riguardo a la voluta prossezza.» Mes aquest problema d'Estereometría es redueix al següent, que és l'anomenat propiament

Problema de Malfatti. —*Inscriure en un triangle rectilini* ABC *tres cercles* (*a*), (*b*), (*c*), *tangents l'un als altres dos i aiximateix a dos costats respectivament del triangle*. Els cercles (*a*), (*b*), (*c*) s'anomenen *cercles de Malfatti*.

Tres són els camins que's poden seguir per a resoldre aquest problema, i els indicaré per l'ordre natural, que és aiximateix l'històric: trigonomètric, geomètric, projectiu.

I.—BREU INDICACIÓ DEL MÈTODE TRIGONOMÈTRIC

§ 4. — El primer, el més senzill quant a l'invenció, és enterament analític. Es plantegen les anomenades equacions de Malfatti que són un cas particular d'altres equacions, proposades i resoltes per Cayley en sa generalitat. Les incògnites poden ésser indistintament els radis dels cercles de Malfatti o els segments de tangents dels tres vèrtexs A, B, C del triangle als cercles (*a*), (*b*), (*c*) de Malfatti corresponents (fig. 2). En el primer cas les equacions revesteixen la forma (anomenant a, b, c la longitut dels costats del triangle; p el semiperímetre; A, B, C els tres angles; r el radi del cercle inscrit a ABC, i x, y, z els tres radis de (*a*), (*b*) i (*c*) respectivament). (2)

(*) Encara que'l problema de Malfatti va ésser objecte de la meva Memoria de Doctorat (Madrid, 1905, impresa Barcelona, 1906), i en ella donava la més completa bibliografía que vaig poder obtenir en les biblioteques de Madrid, amb tot, posteriorment he obtingut molt més complets índexs. M'ha estat molt útil el contingut en la Memoria de Doctorat de Kurt Loeber, de Berlín (Halle, 1914). La Memoria de Loeber, a més d'aquest índex, és molt completa pel que toca a les solucions mètriques i trigonomètriques, i encara que per a compendre aquest senzill article no sigui necessaria, no puc menys de recomanar-la al que's vulgui aficionar al problema de Malfatti.

$$\left.\begin{aligned} a &= y\cot\frac{1}{2}B + z\cot\frac{1}{2}C + \sqrt{(y+z)^2(y-z)^2} = y\cot\frac{1}{2}B + z\cot\frac{1}{2}C + 2\sqrt{yz} \\ b &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = z\cot\frac{1}{2}C + x\cot\frac{1}{2}A + 2\sqrt{zx} \\ c &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = x\cot\frac{1}{2}A + y\cot\frac{1}{2}B + 2\sqrt{xy} \end{aligned}\right\}$$

i tenint presents les fórmules mètriques i trigonomètriques

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad \cot\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}=\frac{p-a}{r}$$

$$\cot\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}}=\frac{p-b}{r} \qquad \cot\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=\frac{p-c}{r}$$

i multiplicant per r les tres equacions (2) resulta

$$\left.\begin{aligned} (p-b)y+(p-c)z+2r\sqrt{yz} &= ra \\ (p-c)z+(p-a)x+2r\sqrt{xz} &= rb \\ (p-a)x+(p-b)y+2r\sqrt{xy} &= rc \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Anomenant u, v, w les tres distancies dels tres vèrtexs A, B, C als tres punts de contacte de AB, BC i CA als tres cercles (a), (b), (c) de Malfatti obtindrem:

$$\frac{x}{u}=\frac{r}{p-a} \qquad \frac{y}{v}=\frac{r}{p-b} \qquad \frac{z}{w}=\frac{r}{p-c}$$

i substituint en les (3) resulta

$$\left.\begin{aligned} v+w+2\sqrt{\frac{p-a}{p}}\sqrt{vw} &= a \\ w+u+2\sqrt{\frac{p-b}{p}}\sqrt{uw} &= b \\ u+v+2\sqrt{\frac{p-c}{p}}\sqrt{uv} &= c \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Els sistemes (3) i (4) de tres equacions amb tres incògnites (fàcilment es poden reduir a forma racional fent $x=X^2$, $y=Y^2$, $z=Z^2$ o $u=X^2$,

$v = Y^2$, $w = Z^2$) han estat l'objecte de l'anàlisi de Malfatti (*), Gergonne, Tédénat i Crelle, i els distints valors trobats eren considerats com la més completa solució al problema de Malfatti. La construcció de Steiner, tan senzilla com elegant, eclipsà aquests mètodes i fórmules, noresmenys s'ocuparen d'ells amb èxit Paucker, Grunert, Catalan, Cayley i altres. Aquest problema, mirat per la part analítica, preocupà els matemàtics en la primera centuria del passat segle XIX, i encara més tard es donaren noves solucions i fórmules. Entre elles és la més notable la de Schellbach, per senzilla i pràctica, si és que pràcticament s'hagués de presentar tan artificiós problema. La construcció de Schellbach és tal volta, geòmetro-gràficament considerada, més econòmica i exacta que la de Steiner; però aquesta és més elegant i general i, per això, més apta per a la discussió.

II. — LA SOLUCIÓ SINTÈTICA DE STEINER

§ 5. — L'any 1826, el professor Crelle fundà a Berlín el seu cèlebre *Journal für reine und angewandte Mathematik*, un dels primers d'Alemanya en l'ordre històric i científic. Comptava amb la col·laboració d'alguns antics professors; mes els que'l sostingueren van ésser tres joves, i llurs noms romanen eterns en l'història de les matemàtiques: Abel, el desgraciat noruec descobridor de la doble periodicitat de les funcions el·líptiques, mort de fam i de fret en la seva terra als vintisís anys; Jacobi, el seu nobilíssim, però més afortunat èmul en les investigacions analítiques, i Steiner, el geni de la geometría pura, al qual tal volta no aventatgen els seus coetanis Poncelet, Chasles i Staudt. El *Journal* veié ses primeres planes il·lustrades amb memories immortals d'aqueixos tres astres del cel de la matemàtica, i entre elles ocupa lloc de mèrit la 18 del 1.er volum intitulada (**) *Einige geometrische Betrachtungen* (Algunes consideracions geomètriques), per J. Steiner. En ella l'expositor donava una ressenya bastant completa sobre els feixos i rets de cercles en un pla, clàssica en nostres dies, i amb aqueix fonament assegurava haver trobat una senzillíssima solució sintètica al problema de Malfatti, l'enginy i elegancia de la qual corprengué tant als geòmetres, que, sens dubte, prescindint del de l'impossibilitat de resoldre amb la regla i el compàs la *quadratura del cercle*, no hi ha problema tan determinat i poc pràctic com el de Malfatti, que hagi entusiasmat més (***).

(*) Vegi's en la Memoria de Loeber ja citada la noticia detallada d'aquest anàlisi.

(**) Existeix apart en la col·lecció *Ostwald*, editada per R. Sturm.

(***) Això es pot també atribuir a la senzillesa del problema que no exigeix, com altres de geometría analítica i sintètica, o més encara de geometría diferencial, un gran cabal de coneixements previs. No obstant, cal confessar que la solució de Steiner frueix d'allò que se sent més que no es demostra: *la bellesa matemàtica*.

Diu així la solució:

«*Donat el triangle* ABC (fig. 3), *tracem les tres bisectrius interiors* AO, BO, CO *dels tres angles* A, B, C; *aqueixes tres bisectrius concorren en* O *centre del cercle inscrit en* ABC. *Tracem aiximateix els tres cercles* (a_1), (b_1), (c_1) *inscrits respectivament en els triangles* COB, AOC, AOB; *la recta* OA *serà tangent comú interior als dos cercles* (b_1) *i* (c_1); *la* OB *dels* (a_1) *i* (c_1), *i la* OC *dels* (a_1) *i* (b_1); *cerquem les tres altres tangents comuns interiors* LA_1, LB_1, LC_1 *als tres mateixos parells de cercles. Els cercles de Malfatti són tangents* (*a*) *a les quatre rectes* AB, AC, LB_1 *i* LC_1; (*b*) *a* BA, BC, LA_1 *i* LC_1; *i* (*c*) *a* CA, CB, LA_1 *i* LB_1, *respectivament.*»

§ 6. — Aqueixa solució pot ésser demostrada també per tres camins: trigonomètric, analític i sintètic. El mètode trigonomètric va ésser el primer, usat per Paucker i Zornow separadament; més que demostracions propriament tals, poden anomenar-se senzilles comprovacions artificials, i *a posteriori* de la construcció de Steiner. Plücker aplicà el primer la geometría analítica (*Journal de Crelle*, IX «Analytisch-geometrische Aphorismen»), i l'anàlisi fou continuat i perfeccionat per Mertens (*); segons Plücker, els lemes de Steiner eren insuficients per a donar una demostració cabal de la construcció. Hart (**) va ésser el primer que donà una senzilla demostració sintètica de la construcció de Steiner, model de brevetat i elegancia, en la qual cosa no ha estat sobrepujat per ningú, i per això la seva prova és la que donen els llibres de Geometría elemental, que, com el clàssic, malgrat d'ésser ja bastant antiquat, de Rouché i Comberousse, tracten aquest problema. Com que després volem donar una demostració especial, calcada en la de Hart, per al cas del triangle esfèric, no la donem ací.

III. — LA DEMOSTRACIÓ DE HART DE LA SOLUCIÓ SINTÈTICA DE STEINER, APLICADA AL TRIANGLE ESFÈRIC

§ 7. — Steiner, en les seves *Consideracions geomètriques*, no solament donà la seva original solució al problema de Malfatti, sinó que l'estengué als problemes següents, que s'han anomenat els anàlegs o generalisacions del de Malfatti:

1.er En una superficie esfèrica traçar tres cercles tangents entre si, i aiximateix cadascú d'ells a dos costats corresponents d'un triangle esfèric de la mateixa superficie.

(*) F. Mertens: *Denkschriften der math. naturw. Klasse der Wiener Kaiserlich Akademie der Wissenschaften*, vol. 36, part. II (pàg. 195-234). 1876.

(**) Hart: *Quarterly Journal of Math.*, I (pàg. 219-221). 1857.

2.$^{\text{on}}$ En un pla o en una esfera traçar tres cercles tangents entre si, i aiximateix cadascú d'ells a dos cercles corresponents de tres cercles qualsevol donats en la mateixa superficie.

3.$^{\text{er}}$ En una superficie de segón ordre qualsevol traçar tres seccions planes tangents entre si, i aiximateix cadascuna d'elles a dues seccions planes corresponents de tres qualsevulga donades en la mateixa superficie.

§ 8. — Anem, doncs, a aplicar la demostració de Hart al primer d'aquests tres problemes, al qual es redueixen els altres dos amb una senzilla transformació projectiva, que solament podrà ésser real, quan la superficie sigui no-reglada (el·lipsoide, hiperboloide de dues fulles i paraboloide el·líptic) i a més les tres seccions estiguin situades en tres plans que's tallen en un punt interior de la superficie. Però, com vam ja observar en l'article anterior, els moderns procediments de la geometría projectiva permeten usar indistintament els elements i transformacions reals o imaginaries, gracies als teoremes de Staudt.

§ 9. — Sia, doncs, ABC un triangle esfèric, i es tracta de trobar tres cercles (a), (b) i (c), tangents entre si i també tangents respectivament (a) a AB i AC, (b) a BA i BC i (c) a CA i CB. Els plans d'aquests tres cercles se tallen segons les tres tangents comuns A'L, B'L i C'L a les parelles de cercles (b) (c), (a) (c) i (a) (b), essent A' el punt de contacte dels cercles (b) i (c), B' el dels cercles (a) i (c), i C' el dels cercles (a) i (b), i L el punt comú dels tres plans dels cercles (a), (b) i (c). Unint L al centre O de l'esfera, tallarà a la superficie en un punt L' que unirem amb A', B' i C' per medi de cercles màxims tangents a les rectes A'L, B'L i C'L, respectivament, i per això a les parelles (b) (c), (a) (c) i (a) (b). Allarguem eixos tres cercles màxims fins que A'L' talli a AB i AC, B'L' a BA i BC i C'L' a CA i CB; i tracem tres cercles (a_1), (b_1) i (c_1), tangents respectivament (a_1) a BC, B'L' i C'L'; (b_1) a AC, A'L' i C'L'; (c_1) a AB, A'L' i B'L'. Anomenem α_1, β_1, C_1 els punts de contacte de AB amb els cercles (a), (b) i (c_1); α_2, γ_2 i B_1 als de AC amb (a), (c) i (b_1); i β_3, γ_3 i A_1 als de BC amb (b), (c) i (a_1). Aiximateix siguin A'_1 i B'_1 els punts de contacte de (c_1) amb L'A' i L'B'; A'_2 i C'_2 els de (b_1) amb L'A' i L'C'; i B'_3 i C'_3 els de (a_1) amb L'B' i L'C'.

El punt A_1 *és damunt* L'A'; perquè si P i Q són els punts en què L'B' i L'C' tallen BC, tindrem les igualtats dels següents arcs de cercle màxim

$$\overset{\frown}{PA_1} = \overset{\frown}{PB'_3} \qquad \overset{\frown}{QA_1} = \overset{\frown}{QC'_3} \qquad \overset{\frown}{L'B'_3} = \overset{\frown}{L'C'_3} \qquad (5)$$

puix que dos cercles màxims tangents a un mateix cercle [en aqueix cas (a_1)] tenen iguals els arcs compresos pels punts d'intersecció i els de contacte (Teorema anàleg i de demostració que's redueix al de Geometría plana *Les dues tangents traçades d'un punt a un cercle són iguals*). Així mateix tenim per idèntica raó

$$\overset{\frown}{P\gamma_3} = \overset{\frown}{PB'} \qquad \overset{\frown}{Q\beta_3} = \overset{\frown}{QC'} \qquad \overset{\frown}{L'B'} = \overset{\frown}{L'C'} \tag{6}$$

i restant respectivament de les dues primeres (6) les dues primeres (5) membre a membre

$$\overset{\frown}{A_1\gamma_3} = \overset{\frown}{B'_3B'} \qquad \overset{\frown}{A_1\beta_3} = \overset{\frown}{C'_3C'} \tag{7}$$

Mes tenim també

$$\overset{\frown}{B'_3B'} = \overset{\frown}{B'_3L'} + \overset{\frown}{L'B'} \qquad \overset{\frown}{C'_3C'} = \overset{\frown}{C'_3L'} + \overset{\frown}{L'C'} \tag{8}$$

i com per les últimes equacions de les series (5) i (6) són iguals els dos parells de sumands dels segons membres de les (8) tenim

$$\overset{\frown}{B'_3B'} = \overset{\frown}{C'_3C'} \quad \text{i per això} \quad \overset{\frown}{A_1\gamma_3} = \overset{\frown}{A_1\beta_3} \tag{9}$$

o sia A_1 és punt mig de l'arc $\overset{\frown}{\beta_3\gamma_3}$.

Mes aquesta és la propietat del punt d'intersecció de $L'A'$ amb BC, puix aquest punt dista de β_3 i γ_3 igual que de A' pel mateix teorema. A_1 doncs és damunt $L'A'$; i aiximateix B_1 damunt $L'B'$ i C_1 damunt $L'C'$.

A més els arcs $\overset{\frown}{A_1A'_2}$ *i* $\overset{\frown}{B_1B'_3}$ *són iguals;* perquè tenim

$$\overset{\frown}{A_1A'_2} = \overset{\frown}{A_1A'} + \overset{\frown}{A'A'_2} = \overset{\frown}{A_1\gamma_3} + \overset{\frown}{B_1\gamma_2} = \overset{\frown}{B'_3B'} + \overset{\frown}{B_1B'} = \overset{\frown}{B_1B'_3} \tag{10}$$

si apliquem el teorema ja invocat i el que trobaríem restant membre a membre els arcs de cercle màxim iguals interceptats pels punts de contacte de dos cercles qualsevol tangents comuns a dos cercles màxims, mesurats des d'un dels dos punts d'intersecció dels mateixos (Teorema anàleg també i d'anàloga demostració al de Geometría plana *Els punts de contacte de dos cercles amb les seves tangents comuns del mateix gènere, o sia ambdúes interiors o ambdúes exteriors, determinen sobre dites tangents segments iguals*).

I de la mateixa manera trobaríem $\overset{\frown}{B_1B'_1} = \overset{\frown}{C_1C'_2}$ i $\overset{\frown}{A_1A'_1} = \overset{\frown}{C_1C'_3}$.

§ 10. — Aquestes propietats i relacions ens permeten aplicar els següents

LEMES DE HART. — 1.^{er} Si tres cercles damunt una esfera (a_1), (b_1) i (c) tenen tres cercles màxims, tangent cadascú a dos d'aquells, un $L'C'$ interiorment a (a_1) i (b_1), i els altres dos exteriorment $L'B'$ a (a_1) i (c), $L'A'$ a (b_1) i (c) i concorrents en un mateix punt L', llavors els cercles màxims tangents en la mateixa forma als mateixos cercles (a_1), (b_1) i (c) concorren també en un mateix punt C, puix aquest és el d'intersecció de BC, tangent exteriorment a (a_1) i (c) associat del L'B', i de AC, tangent exteriorment a (b_1) i (c) associat al L'A'. Així, doncs, l'altre dels cercles tangents interiorment a (a_1) i (b_1) passa per C i l'anomenarem CR.

2.$^{\text{ón}}$ Si d'un punt A_1 d'un cercle (a_1) es pot traçar un arc de cercle màxim $\widehat{A_1A'_2}$ tangent a altre cercle (b_1) en A'_2, d'igual longitut [en virtut de les equacions (10)] que un altre arc de cercle màxim $\widehat{B_1B'_3}$ traçat d'un punt B_1 d'aquest segón cercle (b_1) tangent al primer (a_1), aleshores els angles que formen en C, punt d'intersecció dels cercles màxims A_1C i B_1C tangents en A_1 i B_1 a (a_1) i (b_1) respectivament, aquests dos cercles A_1C i B_1C amb els altres dos que de C es poden traçar tangents a (a_1) i (b_1) [que en aquest cas particular que tractem hem vist pel primer lema que's confonen en un CR] són iguals. CR serà, doncs, en nostre cas, el cercle màxim bisector de l'angle esfèric BCA.

I com que igual podríem dir dels cercles (a_1) i (c_1), el cercle màxim tangent interiorment dels quals BR (a més del L'B') és el bisector de l'angle esfèric ABC i dels cercles (b_1) i (c_1), el cercle màxim tangent interiorment dels quals AR (a més de L'A') és el bisector de l'angle esfèric BAC, resulta comprovada la generalisació de la construcció de Steiner per al cas del triangle esfèric.

CONSTRUCCIÓ: «*Hom traça els tres cercles màxims* AR, BR, CR *bisectors dels angles esfèrics del triangle donat* ABC; *aquests concorren en* R, *centre del cercle inscrit al triangle. Hom inscriu en els triangles esfèrics* BCR, ACR, ABR, *tres cercles menors* (a_1), (b_1) *i* (c_1); *Hom traça els altres tres cercles màxims* $L'A_1$, $L'B_1$, $L'C_1$ *tangents interiorment a les parelles* (b_1) (c_1), (a_1) (c_1) *i* (a_1) (b_1). *Els cercles de Malfatti* (a), (b) *i* (c), *són tangents cadascú a quatre cercles màxims* (quedaríen sobredeterminats si no fos per la construcció) (a) *a* AB, AC, $L'B_1$, $L'C_1$; (b) *a* BA, BC, $L'A_1$, $L'C_1$; *i* (c) *a* CA, CB, $L'A_1$, $L'B_1$.»

§ 11. — Els lemes de Hart, estesos a l'esfera, es demostren amb facilitat. Perquè, anomenant S el punt d'intersecció de $L'A_1$ amb AC i traçant de C l'altre cercle màxim CT tangent a (a_1), essent T el punt d'intersecció de CT amb $L'C_1$, volem provar que CT és també tangent a (b_1). Car els quadrilàters esfèrics PL'TC circumscrit al cercle (a_1) i el PL'SC (de segona especie o sia monocòncau en L') circumscrit al cercle (c) ens donen, aplicant el teorema de Darboux estès a l'esfera. *En tot quadrilàter circumscrit, les sumes de les longituts dels costats oposats són iguals* (de demostració anàloga al del quadrilàter rectilini, pla, igual que la del recíproc, que tots són veritables, segons la generalisació de Darboux, a tota mena de quadrilàters convexes i còncaus) obtindrem:

$$\mathrm{L'P+TC = L'T+PC} \tag{11}$$

$$\mathrm{L'S+PC = L'P+SC}$$

i sumant membre a membre les (11) i reduint

$$\mathrm{TC+SL' = SC+L'T.} \tag{12}$$

L'equació (12) diu, segons el recíproc del teorema de Darboux generalisat, que'l quadrilàter esfèric SL'TC és circumscribible; i com que tres dels seus costats L'S, SC i L'T són tangents a (b_1), se segueix que'l quart CT també és tangent a (b_1), com devíem provar per a demostrar el primer lema de Hart generalisat a l'esfera.

§ 12. — El segón lema el demostrarem apart, puix no és necessari considerar com en el cas del problema de Malfatti que una de les tangents CT sia comú als dos cercles (a_1) i (b_1). Considerem, doncs, dos cercles menors (m) i (n) damunt d'una esfera i suposem que d'un punt H del cercle (m) podem traçar un arc de cercle màxim HS tangent al altre (n) en S i d'altre punt G de (n) un altre cercle màxim GT tangent al primer (m) en un punt T, en forma que'ls dos arcs $\overset{\frown}{\mathrm{HS}}$ i $\overset{\frown}{\mathrm{GT}}$ sien iguals. Anomenem M i N respectivament els pòls respecte de l'esfera O dels plans dels cercles donats (m) i (n); M serà, doncs, el vèrtex del con circumscrit a l'esfera al llarg del cercle (m) i centre d'una esfera (μ) ortogonal a la donada també al llarg del mateix cercle, essent el radi igual a la longitut comú de les tangents traçades de M a l'esfera, dues de les quals seràn MH i MT; igual diríem de l'esfera (ν) i dels seus radis NS i NG. El pla OTG del cercle màxim TG és tangent en T a l'esfera (μ), puix el radi MT de (μ) és perpendicular a TO, per ésser respectivament tangent i radi de l'esfera O; i també a la tangent en T al cercle (m) (que és tangent a un cercle de l'esfera (μ) i per això perpendicular al radi MT) que serà la mateixa pel cercle màxim GT, puix és tangent a (m) en aquest punt T; la recta GT serà, doncs, tangent en T a l'esfera (μ), estant en el pla OTG tangent a (μ) i passant pel punt T de contacte; i igual diríem del pla OSH tangent en S a l'esfera (ν) i de la recta HS tangent també a la mateixa esfera (ν); i com per suposició tenim $\overset{\frown}{\mathrm{HS}} = \overset{\frown}{\mathrm{GT}}$, les cordes corresponents en l'esfera O seràn iguals, o sia $\overline{\mathrm{HS}} = \overline{\mathrm{GT}}$. Tenim, doncs, que d'un punt H de l'esfera (μ) les tangents traçades a l'esfera (ν) són iguals a les traçades d'un punt G d'aquesta segona esfera (ν) a la primera; puix dues d'elles HS i GT són iguals, i totes les tangents traçades d'un mateix punt a una mateixa esfera són iguals.

Unint G i H per medi d'una recta, aquesta recta HG tallarà les esferes (μ) i (ν) en dos nous punts H_1 i G_1 respectivament; i en virtut del teorema de les potencies aplicat als punts G i H respecte les esferes (μ) i (ν) tindrem

$$GH \times GH_1 = \overline{GT}^2 \qquad HG \times HG_1 = \overline{HS}^2 \tag{13}$$

i puix els segons membres són iguals i els primers tenen un factor GH comú resulta

$$GH_1 = HG_1 \tag{14}$$

o bé, restant G_1H_1

$$GG_1 = HH_1. \tag{15}$$

Fem passar per GH un pla γ paral·lel a l'intersecció OL dels plans tangents en G i H a les esferes (ν) i (μ); aquests dos plans passen per O, puix OG i OH són perpendiculars a NG i MH, radis de dites esferes; llur intersecció, doncs, passa per O, i si L és un dels punts en què talla l'esfera O, LOH i LOG seràn els plans dels cercles màxims LH i LG tangents als cercles menors (m) i (n) en H i G. Les rectes d'intersecció del pla γ amb els plans LOH i LOG, seràn dues rectes HP i GQ paral·leles a OL i per tant l'una a l'altra i tangents als cercles (h) i (g) en què el pla γ talla les esferes (μ) i (ν); (g) i (h) tindràn, doncs, el centre C de homotecia invers damunt la recta GH, puix aquesta el talla en dos punts G i H separats pels altres dos interiors G_1 i H_1 i les tangents GQ i HP a (g) i (h) són paral·leles. La raó d'homotecia inversa serà —1, puix les cordes homòlogues GG_1 i HH_1 són iguals, segons (15). C serà, doncs, punt mig de GH i (g) i (h) són dos cercles iguals. Tracem per C un pla perpendicular a OL i projectem en aquest pla $\varkappa$ els punts O, G, H, M i N; sien les projeccions O′, G′, H′, M′ i N′, éssent O′ també la projecció de L. Els triangles O′G′N′ i O′H′M′ són semblants, puix 1.^{er} són rectangles en G′ i H′ ja que'ls angles O′G′N′ i O′H′M′ són les projeccions damunt el pla $\varkappa$ de dos angles rectes OGN i OHM, dels quals dos costats GN i HM respectivament són paral·lels a $\varkappa$, ja que GN i HM són perpendiculars als plans GOL i HOL, i per tant a llur intersecció OL i per això paral·leles al pla $\varkappa$ perpendicular a OL; i 2.^{ón}, els costats adjacents O′G′ i N′G′ són proporcionals als O′H′ i M′H′; car traçant per O′, M′ i N′ les perpendiculars a G′H′ i anomenant els peus d'aqueixes perpendiculars O'_1, M'_1 i N'_1 tindrem $G'N'_1 = H'M'_1$, puix són les projeccions dels radis iguals de (g) i (h) paral·lels a $\varkappa$; i a més els triangles $O'H'O'_1$ i $O'G'O'_1$ són semblants respectivament als triangles $H'M'M'_1$ i $G'N'N'_1$, puix tenen llurs costats respectivament perpendiculars. Tindrem, doncs, les següents proporcions:

$$\frac{O'O'_1}{H'M'_1} = \frac{O'H'}{H'M'} \quad \text{i} \quad \frac{O'O'_1}{G'N'_1} = \frac{O'G'}{G'N'} \tag{16}$$

i puix els primers membres de les dues proporcions (16) són iguals, també ho seràn els segons, o sia

$$\frac{O'H'}{H'M'} = \frac{O'G'}{G'N'}$$

Essent semblants, doncs, els triangles O'G'N' i O'H'M', seràn iguals els angles en O', G'O'N' i H'O'M'. Mes cadaún d'aquests angles és la mitja part dels angles que formen les tangents traçades de O' al contorn aparent de les esferes (μ) i (ν) projectades en el pla π. Traçant les segones tangents per O' (O'H' i O'G' són les primeres, puix H' i G' pertanyen a aqueixos contorns aparents, ja que'ls plans tangents en H i G a (μ) i (ν) passen per la perpendicular OL al pla de projecció) i fent passar per OL i les quatre tangents aquestes (que li són perpendiculars) quatre plans, resultarà que'ls dos diedres que formen el parell de plans tangents a (μ) i l'altre parell a (ν) són iguals; i com que aquests plans tallen l'esfera O segons els cercles màxims que passant per L són tangents a (m) i (n), els angles esfèrics en L seràn iguals com havíem de provar.

Amb això hem finalisat nostra tasca especial pel que correspòn al cas del triangle esfèric. La senzilla translació de la demostració de Hart per al cas del triangle rectilini a aquest cas, ens permet fer la mateixa discussió per un i altre; i com anem a veure, a les trenta dues solucions del problema de Malfatti corresponen el doble, o sia seixanta quatre per al problema generalisat al triangle esfèric, puix als quatre triangles en què parteixen un pla tres rectes no concurrents, corresponen vuit triangles esfèrics en què descomponen la superficie esfèrica tres cercles màxims.

(Seguirà)

ENRIC DE RAFAEL VERHULST, S. J.

Col·legi de S. Ignasi, Sarrià. — *Gener* 1916.