

Llibres

TRATTATO DELLE MALATTIE MENTALI. Seconda edizione interamente rifatta dei Prof. Eugenio Tanzi ed Ernesto Lugaro. — Società editrice libraria. — Milano. — Per la publicació de la segona edició de la seva coneguda obra, el Prof. Tanzi ha sol·licitat la col·laboració del Prof. Lugaro, successor de Lombroso a la càtedra de Torino.

Aquesta edició serà molt més extensa que la precedent; se compondrà de dos volums, si bé fins ara només ha sortit el primer.

Conté el volum publicat la part general de la Psiquiatria distribuïda en tretze capítols. En el primer estudien els autors la *sèu dels fenòmens psíquics*, i, després de curts preliminars històrics, fundant-se en la fisiologia experimental, en la mielogènesi, en les recerques d'histologia i en les de patologia humana, arriben a la conclusió que existeixen a l'encèfal, a més dels centres sensorials i motors, altres centres unilaterals destinats a emmagatzemar els senyals o relíquies duraderes, però incompletes, de les sensacions, i que els processos sensorials són fenòmens pluricel·lulars i les cèl·lules polidinàmiques, és a dir, accessibles a un cert nombre d'estímuls mínims subconscients i diversos.

Les causes de les malalties mentals formen l'objecte del segon capítol. Les divideix en externes si obren directament per medi de l'organisme

(somàtiques), de la psiquis (psíquiques) o per medi de les condicions temporànies o estables de la societat, i internes, contant-se entre les últimes la degeneració, l'herència i la predisposició. Al parlar de les causes psíquiques fan notar l'enorme resistència dels centres nerviosos a la fadiga i com sol ésser equivocat parlar d'agotament cerebral, i combaten l'explicació patogenètica de les psicosis funcionals o sense lesions conegudes segons les idees de S. Freud. Els processos de degeneració no són fatalment progressius, ni molt menys, i sovint basta una sola generació per al guariment de l'estirpe. La predisposició, variable segons l'edat, la raça i altres circumstancies, presenta graus molt diversos, de vegades insignificants i altres de tendència fatal i ineludible.

En el capítol tercer hi ha condensat l'estudi histo-patològic de les malalties mentals començant per les lesions macroscòpiques (defectes de desenrotllament, esclerosi tuberosa, tumors, etc.) i acabant per les perturbacions elementals del mantell cerebral. Els autors se detenen en les lesions de les cèl·lules i fibres nervioses, dels vasos i de la neuralgia, demostrant com els quadros histo-patològics ben precisos de certes formes morboses són constituïts per un conjunt de lesions de tipus divers, no existint, en conseqüència, lesions característiques.

Les sensacions i la percepció, objecte del capítol quart, la memòria, el pensament, els afectes, els instints, la voluntat i l'expressió, materia cada una d'aquestes dels capítols successius, són estudiades en llur fisiologia i en llur patologia. L'explicació del mecanisme de les al·lucinacions, estudiat en el capítol quart, es funda en l'existència de centres encarregats de rebre les impressions i d'altres distints destinats als records, però conexionats amb els anteriors gracies a vies centrípetes i centrífugues; en condicions normals, els primers sols reflecteixen la realitat exterior; mes si per causes patològiques reflecteixen la imatge mental, reaccionaràn de la única manera que saben, ço és, mediant imatges sensorials tan intenses i vives com les d'origen extern.

Els trastorns de la memòria poden afectar la formació de les relíquies mnemòniques, llur reconeixement i fins consistir en la destrucció dels records donant lloc a diversos complexos asimbòlics, a la ceguera i sordera psíquiques, en les quals els objectes se veuen i els sons se senten, però sense ésser reconeguts, a l'estereognosia quan ataca les imatges recollides amb el sentit tàctil i muscular, etc. Les perturbacions de la identificació dels records explica les anomenades *il·lusions* o *al·lucinacions de la memòria*; llavors els subjectes prenen com a realment succeïts els productes de llur fantasia, de llurs somnis o lectures.

Les idees, materia del capítol sisè, depenen en la combinació dels elements de les representacions o records, i a elles s'arriba de dues maneres: per l'abstracció i per l'associació. Llur patologia pot afectar al patrimoni ideatiu, a aberracions en llur gènesi i en alguns casos s'explica; tal succeeix en les *obsessions* i *idees fixes*, únicament per la vivacitat excessiva de llur contingut afectiu que les imposa a la consciència. Els deliris són errors de judici, producte d'una forta tensió passional, acompanyats d'una fe intransigent i

superior a la crítica, a la lògica i a l'experiència; el nexce constant que existeix entre'l tipus del deliri i el del pertorbament afectiu són la prova més vàlida de llur relació.

L'afectivitat inclou el secret més íntim de l'activitat psíquica. A l'ocupar-se de les variacions patològiques de la tonalitat afectiva, dels estats depressius i d'exaltament, els autors no accepten els estats mixtes segons la concepció kræpeliniana, perquè aquesta prescindiria de la dependència, sempre existent, entre'l colorit afectiu, la ideació i l'activitat psico-motora.

La voluntat és un resultat de la combinació de diversos processos psíquics; en això i en el posseir òrguens propis es funda la seva autonomia. Gran influencia donen els autors a la tensió afectiva en els actes volitius, i a ella redueixen la *sublimació* de Freud. Ells combaten el pragmatisme, car no conceben fe sense una veritat que es podrà cercar, no elegir, i perquè el vigor de la voluntat ix dels sentits, de la raó i del sentiment, mai d'ella mateixa. Entre'ls estats morbosos volitius, la catatonía omple bastantes pàgines; la catatonía és un estat en el qual diferents tendències contradictòries impulsives automàtiques solliciten els òrguens dels moviments amb resultat sovint nul, altres lent, altres contrari a tota lògica.

Les diverses formes de l'expressió, la mímica, la paraula i l'escriptura són la manifestació més segura de la personalitat psíquica. Al tractar de l'afasia descriuen els autors, amb gran detall, les teories antiga i la de Marie, inclinant-se per la primera. L'expressió mímica dels estats anímics és tan llarga i minuciosa com mereix tractant-se d'estats que en certes ocasions no ofereixen altra extrinsecació.

L'examen psíquic i somàtic són inclosos en els capítols onzè i dotzè. Els autors concedeixen escàs interès clínic, no psicològic, als recursos d'experimentació psicològica, i la psico-anàlisi; i la hipnosi són combatudes per pro-

vocar per sugestió resultats falsos i incomplets; l'observació i l'interrogatori, la primera sobre tot, són els dos instruments d'ús més segur per a la pràctica psiquiàtrica. Els autors criden l'atenció sobre la dificultat diagnòstica de les al·lucinacions i sobre el senzill que és el simular-les, i amb freqüència fan observar els inconvenients de l'explicació unilateral dels símptomes psíquics i la necessitat de llur explicació sintètica. Als signes degeneratius, anys enrera tan de moda, els concedeixen una significació mediocre, quasi nul·la, per quant se refereix a les perturbacions psíquiques, de les quals serien indicatiu segons les idees velles. Els recursos d'exploració serològica, les reaccions de Nonne, Wassermann, Abderhalden, etc., ocupen el lloc merescut.

El darrer capítol és destinat a la classificació de les malalties mentals. Un cop demostrada l'enorme dificultat de les classificacions en Psiquiatria, passen a examinar llur evolució històrica, com foren purament psicològiques al principi i com paulatinament s'han anat assimilant els altres criteris etiològic, histo-patològic, etc., de la Medicina per assemblar-se de cada dia

més a les classificacions de les altres branques de la Medicina. L'esforç incansable de Kræpelin és analitzat llargament, admirat sempre i no sempre acceptat. Per als Profs. Tanzi i Lugaro, s'està lluny de conèixer bé en llurs propis límits totes les malalties mentals; a més, existeixen casos particulars que deuen ésser considerats com a combinacions morboses, i, finalment, nombroses són les formes de pas. L'ur classificació, a la qual donen una valor molt relativa, purament metodològica, és semblant a la de Kræpelin, i, acceptant un criteri mixte, no sols etiològic o psicològic, comença amb les malalties causades per agents exògens, alcoholisme, morfíisme, sífilis cerebral, paràlisi progressiva, etc., segueix amb aquelles altres en què els factors exteriors i constitucionals semblen equilibrar-se quasi, psicosis senils i pre-senils, demència precoç, etc., i termina amb les malalties d'evident origen intern, psicosis afectives, psicosis obsessives, histerisme, epilepsia, neurosis traumàtiques i personalitats anòmales.

JOÀN ALZINA I MELIS.

Revistes

JOURNAL OF PHYSIOLOGY (Vol. XL, n.º 1). — T. Graham Brown. — *Sobre la naturalesa de l'activitat fonamental dels centres nerviosos; anàlisi del condicionament de l'activitat rítmica a la progressió; teoria sobre l'evolució del sistema nerviós.*

S'ha considerat fins ara com a unitat funcional fonamental de l'acti-

tat del sistema nerviós el reflexe espinal. Sobre la corrent concepció morfològica i funcional d'aquest s'hi han bastit diferents especulacions sobre l'evolució del sistema nerviós i així mateix sobre la manera d'ésser de les seves funcions més complexes, per exemple la progressió.

Així, quant a l'evolució, s'ha parlat per uns de la primitiva aparició d'un

mecanisme similar al de la cèl·lula neuro-muscular que més tard dona lloc a l'aparició per separat de les porcions constitutives de l'arc; i per altres s'ha dit (Hertwig) que de bon principi aquests elements van evolucionar simultaniament i per separat fins a constituir finalment el complex de l'arc reflexe; i més recentment s'ha emès la teoria (G. H. Parker) segons la qual l'òrgue efector (cèl·lula muscular primitiva) va evolucionar primerament i se li uniren més tard el receptor i la neurona intermediària.

Quant a l'anàlisi funcional, prenent per exemple la progressió dels mamífers es dirà en crua fórmula que l'acte de la progressió consisteix, considerant una pota, en una alternació rítmica de l'activitat que coneixem com a reflexe d'extensió i de la que coneixem com a reflexe de flexió; i sempre des del punt de vista de considerar el reflexe com la unitat funcional fonamental, s'ha discutit sobre la major importància dels reflexes extero-ceptius (els evocats per l'estimulació de receptors tegumentaris) o dels propi-ceptius (els evocats per receptors més pregons situats als múscles, tendons, articulacions, etc.).

L'autor ha pogut demostrar, però, en un treball anterior, que l'acte de la progressió que pot ésser provocat a les potes posteriors d'un gat descervellat, per la divisió ràpida de la corda espinal toràcica inferior, pot aparèixer fins després d'haver estat destruït el mecanisme propi-ceptiu i l'extero-ceptiu d'ambdúes potes posteriors. Aquest fet demostra, en primer lloc, que si realment l'acte, per allò que es refereix a una de les potes posteriors, és un complex d'activitats reflexes, les porcions aferents de les quals no radiquen pas necessàriament a la mateixa pota, i, en segon lloc, que l'actuació rítmica d'activitats no és pas condicionada per estímuls aferents auto-generats que tinguin llur origen en cap de les potes posteriors, o pel cas, en cap de les anteriors. En el mateix

treball es mostrava que els fenòmens que segueixen a la divisió ràpida de la corda espinal toràcica inferior s'iniciaven amb un estat de flexió sostinguda i terminen amb un estat d'extensió sostinguda; i és en la fase intermitja, quan hi ha un balanç més o menys igualat d'ambdúes activitats, que té lloc l'acte rítmic de la progressió; amb això s'elimina la possibilitat d'una «Selbststeuerung» (autorregulació) perifèrica i neix la idea que la progressió sigui condicionada durant aquest estat de balanç entre les dues activitats oposades (flexió i extensió). Fets semblants han estat demostrats per altres fenòmens fàsics, per exemple el del «rítmic rebound» (rebot rítmic).

El problema de la progressió dels mamífers es planteja doncs d'aquesta manera: *La progressió rítmica és condicionada per un balanç igualat de dues activitats centrals antagòniques; són aquestes d'origen fonamentalment perifèric?*

Si així fos podria suposar-se que la progressió normal és condicionada per un balanç igualat de les activitats d'estímuls perifèrics productors de flexió i d'estímuls perifèrics productors d'extensió conduïts per neurones que no haurien pas d'entrar a la corda espinal necessàriament a la mateixa regió a què pertanyen les potes examinades.

Podria, en altre cas, suposar-se que aquest balanç equilibrat dels estímuls perifèrics antagònics reproduïx als centres un estat semblant al que fonamentalment condiciona l'acte, i pot influir sobre aquest, però que la condició fonamental no és pas el balanç d'activitats perifèriques.

Per a fer llum sobre aquest problema l'autor ha emprès una sèrie d'experiments. Ha estudiat en ells el fenomen de la «progressió narcòtica». En els gats, mentre són sota la influència d'un anestèsic general poden presentar-se diferents moviments de progressió, que varien en llurs propietats segons el grau i manera de portar-se l'anestèsia; aquests moviments han

estat estudiats en potes intactes i en múscles isolats.

En una primera serie d'experiments va ser tallada la corda espinal a diferents graus de narcosi i en diverses condicions. Els resultats d'aquests experiments semblen mostrar que si es talla ràpidament la corda espinal en un moment en què els moviments de la «progressió narcòtica» tenen lloc a un grau relativament lleuger de narcosi, hi ha, de primer, una fase en què el fenomen és abolit, i després una fase en què els moviments reapareixen i són d'una extensió i freqüència de ritme majors que abans. Mostren també que els moviments poden ocórrer a un grau precís de narcosi, en el qual la divisió ràpida de la corda espinal produeix una reacció petita o nul·la, i que aquests moviments poden persistir allavors quasi bé inalterats. A aquest grau de narcosi el fenomen depèn, per tant, solament dels centres espinals lumbar, i no és allavors condicionat per l'activitat de centres superiors. Com que pel gat descervellat la divisió de la corda lumbar inferior és un dels més forts, probablement el més fort, dels estímuls productors de flexió, és probable que el fenomen de la progressió narcòtica pugui ocórrer quan els reflexes perifèrics han estat abolits per un narcòtic general químic.

En una segona serie d'experiments han estat estudiats els reflexes perifèrics durant la «progressió narcòtica», examinant a diferents graus de narcosi els moviments en múscles isolats, i aplicant estímuls reflexes als nervis aferents de la mateixa pota i de la contralateral posterior. En el grau de narcosi que l'autor anomena «comparativament lleugera» uns estímuls reflexes conserven llur acció normal, altres determinen efectes anormals, podent uns i altres influir sobre el fenomen de la progressió narcòtica; altres finalment resten sense efecte. Dintre dels límits d'allò que l'autor anomena «narcosi pregona» a un cert

grau d'anestesia, existint els moviments de «progressió narcòtica», resten ja sense efecte els estímuls contralaterals; i a un grau més intens de narcosi, persistint encara els moviments de «progressió narcòtica», també els estímuls ipsilaterals arriben a quedar sense efecte; els moviments de progressió narcòtica persisteixen fins a un grau d'anestesia en què l'animal és quasi bé mort, i sols persisteixen a més els moviments rítmics respiratoris.

Finalment, en un darrer experiment foren estudiats els moviments de la «progressió narcòtica», després d'haver desafereñat, és a dir, privat de ses vies aferents una de les potes posteriors: van tallar-se totes les arrels espinals posteriors de la banda dreta de la corda espinal lumbar, a excepció de la primera arrel post-toràctica; al cap de quinze mesos fou sotmès l'animal a l'acció d'un narcòtic general químic, i van aparèixer moviments de «progressió narcòtica» a la pota esquerra, és a dir, la no desafereñada; durant 50 segons els moviments foren unilaterals; després van cessar els moviments de la pota esquerra no desafereñada, i ben aviat van presentar-se moviments similars a la pota dreta desafereñada, que foren aixímateix unilaterals; després d'uns 20 segons els moviments de «progressió narcòtica» esdevingueren bilaterals i estrictament alternats. Creu l'autor que pot dir-se que tots aquests experiments semblen mostrar que a un grau de narcosi en què els reflexes perifèrics són abolits, pot tenir lloc un cert moviment rítmic complex, i, per tant, que les neurones espinals eferents poden mostrar un cert grau d'independència respecte a les neurones aferents i a alguns dels fenòmens d'inervació recíproca, quan són separades funcionalment de dites neurones aferents.

Experiments anteriors a què abans s'ha fet referència han demostrat que els fenòmens rítmics són condicionats en el balanç d'activitats fins a cert

punt equivalents, oposades als centres antagònics (o «mitjos centres»); però com que quan aquests centres són activats des d'una sola banda demostren una activitat arrítmica, resulta que no és justificat suposar que el ritme sigui condicionat al còs cel·lular individual o «mig centre», sinó que aquest ritme deu ésser una funció de les mutues interconexions dels «mitjos centres». Amb els experiments del present treball es demostra, però, que aquesta activació dels «mitjos centres» associats antagònics no és pas necessàriament d'origen perifèric; de fet pot ésser produïda per condicions similars a les de l'estímul hemàtic a la respiració. Per a explicar la producció del ritme segons aquestes idees exposa l'autor la següent teoria: pot suposar-se que la neurona eferent es relaciona per medi d'alguna ramificació lateral amb una neurona eferent antagònica, i pot així reprimir l'activitat d'aquesta; aquesta relació anatómica i funcional és recíproca. Quan una neurona és activada deprimeix l'altra, i tal depressió disminueix la potència inhibitoria de la neurona depresa sobre el primer «mig centre»; d'aquesta manera un petit estímul obrant sobre un mig centre donaria lloc a un «augment progressiu de l'activació», que seria indefinit si no intervingués un factor limitant; aquest factor deu ésser un procés de fatiga en les connexions colaterals depressores. Així quan els dos «mitjos centres» siguin activats, si ho són en graus exactament iguals hauria de suposar-se que no es produeix cap mena de fenomen rítmic; mes si l'equilibri es destrueix, ni que sigui en grau petitíssim, cap a un o altre costat, tindrà lloc el procés de l'«augment progressiu de l'activació», activació que anirà creixent fins que es trobi amb el límit imposat per aquest procés de fatiga o «depreciació de la inhibició» de què s'ha parlat, procés de fatiga que dona lloc a anar perdent valor la inhibició que el «mig centre» actiu exerceix

sobre l'altre; essent així, l'activació d'aquest anirà en augment i amb ella creixerà la inhibició que ell exerceix sobre el primer, i tindrem així un nou procés de «augment progressiu de l'activació» en direcció oposada al d'abans, i que trobarà aiximateix son límit en el «procés de depreciació de la inhibició», que actuarà també en direcció oposada a l'anterior; el creixement d'aquest donarà lloc a un nou procés de creixement de l'activació en el sentit primitiu, i així successivament; generant-se així el fenomen rítmic.

S'ha demostrat amb experiments que la unitat fonamental d'activitat en el sistema nerviós no és pas allò que anomenem el reflexe espinal. Demostren aquests experiments la independència de la neurona eferent, i fan pensar que la unitat fonamental és l'activitat de la neurona eferent o millor l'activitat mutuament condicionada de les neurones eferents antagòniques associades (mitjos centres), que plegades formen el centre; i que l'activitat primitiva del sistema nerviós es veu en actes rítmics tals com la progressió i la respiració.

Des d'aquest punt de vista apunta l'autor la idea que el reflexe espinal deu ésser considerat com «un batec» isolat o desviat del fenomen rítmic. Hem vist que l'estímul fonamental de l'activitat rítmica és d'una naturalesa semblant a la de l'estímul hemàtic a la respiració; però que l'activitat nerviosa fonamental pot ésser aiximateix condicionada per estímuls perifèrics; és possible que així com l'estímul hemàtic tendeix a activar per igual els dos mitjos centres associats, l'estímul perifèric tendeixi a activar principalment (o exclusivament) un d'ells. Essent així, l'estímul pot ésser prou fort perquè el procés de fatiga de la inhibició sobre el centre antagònic es retrassi cosa suficient perquè l'estímul ja no exerceixi a temps cap activació eficient sobre aquest centre (mig centre) antagònic. El reflexe perifèric pot ésser considerat com una exagera-

ció d'una o altra fase de l'activitat rítmica fonamental.

Sobre l'apuntada independència funcional de la neurona eferent, l'autor ha bastit una teoria sobre la manera d'ésser de l'evolució de la funció al sistema nerviós. Suposa que primitivament el «mig centre» estigué directament exposat al medi que l'envoltava, i al cap d'un quant temps va obrar una mena d'estat d'asfixia local, d'una manera semblant a com obra l'«estímul sanguini», i aquest estat va provocar moviments grossers que tenien per objecte canviar el medi que immediatament voltava el ser primitiu i que havia esdevingut inadequat per a la vida d'aquest. Sorgí allavors la primera coordinació en l'aparència d'un sistema d'inhibició mutua entre «mitjos centres» que inervaven efectors antagònics. En aquest punt esdevingué possible l'activitat rítmica, i amb ella una més eficient locomoció de l'animal. Amb la complicació del sistema nerviós el primitiu estímul directe circumvoltant fou substituït per l'«estímul hemàtic» indirecte, i va sorgir el mecanisme nerviós aferent perifèric la funció del qual era perfeccionar els moviments de progressió i donar reflexes d'atac i defensa.

R. CARRASCO FORMIGUERA.

ACTA MATHEMATICA, 1914. (Vol. 37)
S. Wigert (Stockholm). *Sur quelques fonctions arithmétiques.*

L'autor estudia una funció aritmètica o de nombre

$$\sigma(n) = \prod_{v=1}^r \frac{1 - \frac{1}{p_{x_v}^{\lambda_v + 1}}}{1 - \frac{1}{p_{x_v}}}$$

que és igual a la suma dels divisors del nombre n dividit pel mateix nombre n essent p_{x_v} els factors primaris del nombre $n = p_{a_1}^{\lambda_1} p_{a_2}^{\lambda_2} \dots p_{a_r}^{\lambda_r}$. Prova que

aquesta funció $\sigma(n)$, fixat un nombre ϵ per petit que sia, es pot trobar un altre n suficientment gran pel qual i per tots els següents

$$\sigma(n) > (1 - \epsilon) e^\gamma \log \log n$$

essent

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-h}} - \frac{1}{h} \right) e^{-h} dh = 0,5772157$$

constant que s'anomena d'Euler i que es troba en la teoria de les integrals eulèrianas. (Els italians anomenen aquesta constant de *Mascheroni*, com s'atribueixen el teorema d'Abel sobre l'impossibilitat de resoldre les equacions de grau superior al quart, el de Weierstrass, el de Lobatchewski, etc., amb els noms de teorema de Ruffini, de Cassorati, de Saccheri, etc.) D'això's dedueix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{\log \log n} = e^\gamma.$$

També dedueix mitjançant altres fórmules limitatòries que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi^2}{12} x^2 - \sum_{n \leq x} \sigma(n) (x - n)}{x \log x} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) \log \frac{x}{n} = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{4} \log^2 x - a \log x + b + o(1)$$

on

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (\gamma + \log 2\pi) \\ b &= -\frac{1}{4} \left(\log 2\pi (\log 2\pi + 2\gamma) + \frac{\pi^2}{12} + 4A - \gamma^2 \right) \quad A = 0,073 \\ o(1) &= x \sum_{n > \sqrt{x}}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sqrt{x} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{n \leq x} \sigma(n) (x - n)^k = \frac{\pi^2}{6} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} -$$

$$-\frac{1}{2k!}x^k \log x + \frac{1}{2k!} \left\{ \frac{\Gamma'(k+1)}{k!} - \log 2\pi \right\} x^k - \frac{1}{24} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^2}{(2\pi)^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k}{2}}} I_k(4\pi\sqrt{nx})$$

on Γ es la funció d'Euler i I_k la funció cilíndrica de Bessel de grau k , fórmula també exacta quan $K=1$, on $\Gamma'(2)=1-\gamma$.

Treball molt interessant i que prova els grans recursos de la moderna teoria dels nombres. Per la seva perfecta intel·ligència l'autor recomana el «Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen» de Landau.

—Grace Chisholm Young (Ginebra): *A note on derivatives and differential coefficients.*

Treball senzill i molt instructiu sobre les funcions contínues. Rebutjat per fals el teorema de Duhamel i trobades per Weirstrass funcions contínues sense derivada finita (perquè els seus elements infinitessimals són sinusoidals i no rectilinis) queden per establir les propietats generals de les funcions contínues, treball verdaderament titànic i al qual l'autor dona valiosíssims elements. L'idea primordial del mateix és que la més petita de les derivades d'una funció per un valor x determinat de la variable amb increments positius o negatius no es més gran que el més gran amb increments de signe contrari, a excepció d'un conjunt nombrable de valors; i per ço donada una serie decreixent nombrable de valors superiors que tendeixen al valor x considerat, es pot trobar en general un altra serie creixent de valors inferiors també tendint al mateix valor x tals que les raons diferencials $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ i $\frac{f(x-k)-f(x)}{k}$

tenen el mateix límit, que és una de

les derivades simètriques de la funció pel valor x de la variable independent. Si nomenem $\operatorname{tg} a$ i $\operatorname{tg} b$ els valors màxim i mínim respectivament d'aquestes derivades, la mitja trigonomètrica $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)$, definida per l'autor

com a *derivada mitja simètrica*, existeix per tots els valors, menys per una serie nombrable, i és finita a excepció d'un conjunt discontinu de punts. L'autor fa al final formoses aplicacions als teoremes fonamentals de les derivades i funcions integrables.

ACTA MATHEMATICA, 1914 (Vol. 37), (pàg. 155-238) G. H. Hardy i J. E. Littlewood (Trinity College, Cambridge). *Some problems of diophantine approximation.*

La teoria dels nombres és objecte en nostres dies de molts treballs profunds i difícils, usant-se els més complicats mètodes d'anàlisi en aquestes investigacions. El treball que extractem és un dels més típics d'aquesta materia, puix és extens i variat en els seus procediments, juntant les més senzilles amb les més complicades nocions i fóra digne que del seu contingut se'n fes més ample discussió.

Conté dues parts: la primera intitulada *La part fraccionaria de $n^k\theta$* essent n i k nombres sencers i positius i θ incommensurable, conté una introducció i quatre capítols. En l'introducció exposa l'objecte d'aquesta primera part que és provar tres teoremes: el primer, senzillíssim, diu que, donat un nombre incommensurable θ , es pot sempre trobar una serie de nombres sencers $n_1, n_2, \dots, n_r, \dots$ tals que la part fraccionaria del producte $n_r\theta$ tendeixi a un nombre qualsevol fixat x comprès entre 0 i 1 o sia $0 < \alpha < 1$. A aquest segueix un segon teorema (de Kronecker) que diu que si $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ són irracionals independents (o sia tals que no

negativa. Si és positiva la serie és divergent i si és 0 divergent o oscil·lant i aquest és el cas particular a que es dediquen els autors. Les altres funcions ϑ , s'obtenen agregant a l'argument x un semiperíode o un semipseudoperíode o els dos juntament. Fent $x=0$ i $\tau=\pi ix$ i despreciant factors i sumandos sencers s'arriba a l'estudi de les tres series

$$\sum_1^{\infty} e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi ix} \quad \sum_1^{\infty} e^{n^2 \pi ix} \quad \sum_1^{\infty} (-1)^n e^{n^2 \pi ix}$$

per valors reals de x .

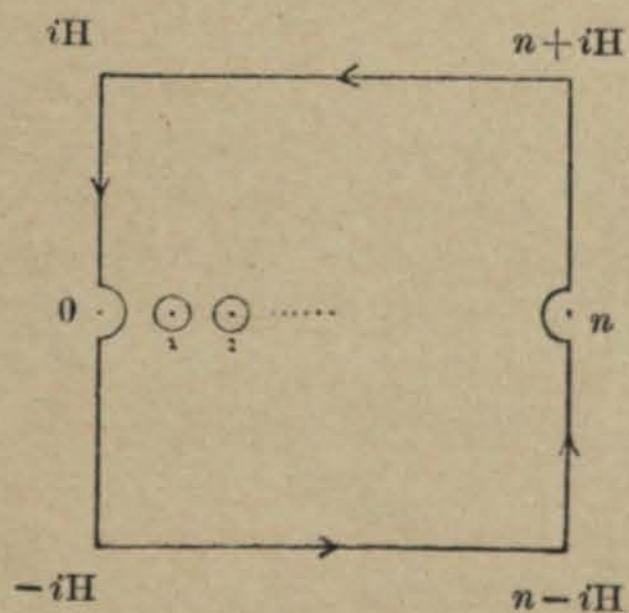
Quan els valors de x són commensurables, l'estudi de les oscil·lacions d'eixes series és senzillíssim; mes quan x és incommensurable és molt més complicat, i d'ell s'ocupa l'autor en tot el capítol primer. El mètode que usa és el dels residuus d'integrals curvilíneas introduint un paràmetre θ i una nova invariable independent z complexa; per exemple, la segona expressió és un cas particular de l'expressió

$$s_m^3(x\theta) = \sum_{v \leq n} e^{v^2 \pi ix} \cos 2v\pi\theta$$

quan $\theta=0$ i $n=\infty$, i anàlogament per la primera i tercera expressió. Considerem doncs l'integral

$$\int e^{z^2 \pi ix} \cos 2z\pi\theta \times \pi \cot \pi z dz$$

presa al llarg d'un contorn rectangular C com indica la figura. La funció sub-



integral té per punts singulars solament els pòls de $\cot \pi z$ que són els nombres sencers $0, 1, 2, \dots, n$. Aplicant, doncs, el teorema de Cauchy obtenim

$$\sum_0^n e^{v^2 \pi ix} \cos 2v\pi\theta = \frac{1}{2i} P \int_C e^{z^2 \pi ix} \cos 2z\pi\theta \cot \pi z dz$$

en que P designa el signe $+$ o $-$ segons el sentit de l'integració i les dues \int de la Σ senyalen que els termes inicial i final de la suma corresponents a $v=0$ i $v=n$ han d'ésser dividits per dos, puix com es veu en la figura, el canvi d'integració a l'entorn d'aquests dos valors és un semicírcol sencer com pels altres. Aquest recurs és conegut en teoria de funcions i teoria superior dels nombres, i així es redueix l'estudi de la serie al de l'integral donada.

No entrarem en més detalls, puix es veu clar l'artifici d'aquest procediment de substitució, del qual tot aquest capítol n'és constant aplicació. En el segon i el tercer defineix respectivament altres propietats dels valors límits trobats en el capítol anterior i fa algunes aplicacions a les funcions el·líptiques i a algunes series trigonomètriques de Fourier que d'elles es dedueixen. No podem menys de recomanar als aficionats an aquests estudis aquest treball verdaderament interessant i instructiu que, junt amb altres amb ell conexas o al menys anàlegs, dona una bella idea de l'estat d'un problema de matemàtiques dels anys 1912-1914.

ACTA MATHEMATICA, 1914 (Vol. 37), Georges Rémondos (Athenes). *Sur les familles de Fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine.*

En els « Comptes rendus » de l'Academia de Ciencias de París del 1.^{er} semestre 1913 (Tomo 156) donà l'autor una idea general dels principals resultats d'aqueix treball. Poden veure's 1.^{er} *Sur les familles de fonctions algébroïdes* (pàg. 862-865). 2.^{on} *Sur les séries*

et les familles de fonctions algébroides dans un domaine (pàg. 1141-1144).

S'anomenen funcions *algebroides* les multiformes que tenen un nombre finit de valors i que és sabut que si no tenen en tot el pla de representació altra singularitat essencial que punts de ramificació tals que és possible construir la superfície de Riemann corresponent, es redueixen a funcions algèbriques ordinàries. La definició d'una funció *algebroida* $u=A(z)$ es fa per medi d'una equació de grau a entre u i z essent n el nombre de valors de u corresponents a cada valor de z . Així

$$F(z, u) = u^n + A_1(z)u^{n-1} + \dots + A_n(z) = 0$$

essent $A_1(z), A_2(z), \dots, A_n(z)$ funcions uniformes de z (en el domini d'*algebroidat*, si no és *algebroida* en tot el pla). És evident que les funcions així definides són *algebroides* segons la definició abstracta que al principi hem donat.

L'intent especial de l'autor està en provar uns teoremes força interessants respecte de la convergència o tendència a un o molts límits simultaniament d'una sèrie infinita de funcions *algebroides* en un domini. Mes com ja ha tractat en altre punt (com hem indicat) aquesta matèria fecundíssima, ens limitem a donar compte de l'últim teorema contingut en el capítol XI d'aquesta Memòria que s'enuncia: *Si una sèrie infinita de funcions algebroides de γ branques en un domini D convergeix uniformement, les γ funcions-límits són també algebroides i finites en el domini D i llur nombre total de branques és igual a γ* . Aquest resultat que extén a les superfícies de Riemann un bell teorema de Weierstrass (del qual es dedueix amb molta facilitat) és una brillant prova de l'interès d'aquesta teoria. En els capítols VIII i IX fa l'autor algunes aplicacions a les funcions infinitiformes.

ENRIC RAFAEL VERHULST, S. J.