Per terminar, dec dir que tots els fenòmens descrits són fets de fàcil i precisa reproducció. Jo i els meus col·laboradors, als quals des d'aquí dono mercès de tot cor, hem practicat aquestes recerques amb èxit complert en els dos cursos sistemàtics que he emprès sobre'ls reflexes condicionats, els hem reproduit moltes vegades en societats científiques i els hem mostrat en nostre Laboratori a moltíssims col·legues compatriotes i estrangers.

Durant nostre treball, que és ja de molts anys, no hem tingut ocasió d'aprofitar fruitosament cap noció psicològica ni d'utilisar explicacions fundades en aquestes nocions. Haig de confessar, que abans alguna vegada, lluitant amb fortes dificultats, i potser per un moviment de timidesa, havía acudit a algunes d'aquestes explicacions que fa temps que's donaven com a llegítimes.

Però a l'últim he conegut que amb això em donaven son pitjor remei. Me trobava allavors perplexe al no veure l'encadenament natural dels fenòmens. L'ajuda de la psicología sols consisteix en paraules. L'animal s'ha enrecordat, ha volgut, ha pensat, és a dir, és un exemple de pensaments indeterminats. Els mètodes d'investigació de l'activitat nerviosa superior de l'animal derivats de nocions psicològiques: l'esclariment de laberintes, la confecció de diferents conclusions, etc., formen naturalment un material científic aprofitable, un material, però, que consisteix tan sols en fragments isolats i que no condueix en absolut ni als principis, ni als elements de l'activitat nerviosa superior, i que ell mateix té d'ésser analisat i esclarit. Per a una investigació exacta, regular, progressiva i científica de la funció de les parts superiors del sistema nerviós és incondicionalment necessari que les nocions fonamentals siguin nocions fisiològiques. Amb les idees que jo he formulat, pot treballar-s'hi. La realitat mostrarà en les mans d'altres investigadors si aquestes idees són exactes, si són satisfactories.

J. J. PAWLOW

Extret per J. Carrasco.

SOBRE EQUACIONS INTEGRALS

Era, i no fa pas gaire, regla general en el desenrotllament de la Ciencia matemàtica, comprovada innombrables vegades en la Historia, la formació lenta de les teoríes especials en què s'ha anat ramificant la ciencia de la quantitat. Idees primordials, considerades a voltes sense importancia en un principi, eren després recollides per altres mentalitats que les ampliaven i metamorfosaven, fins que ingressant en el cabal de coneixements d'un geni, aquest les vestía amb el ropatge clàssic dels cossos de doctrina, escorrent-se segles tal volta entre la idea inicial i sa incorporació formal a la matemàtica. El notable desenrotllament actual dels estudis crítico-històrics comprova per complert aquesta regla general, trobant a voltes en els treballs de matemàtics quasi desconeguts, les idees primordials que, aprofitades més endavant per un talent de l'alçada de Lagrange o Cauchy, engendraren avenços trascendentals de la Matemàtica.

Formada ja la nova teoría, transcorría un lapse de temps més o menys llarg, en què presentava sols caràcter formal, no essent sinó aplicada posteriorment als problemes de les ciencies concretes; i darrera d'aquestes etapes passava a formar part integrant de la ciencia que s'aplica i s'ensenya.

Justifiquen aquest procés evolutiu el retràs relatiu de les ciencies d'aplicació i la manca de medis de comunicació científica entre'ls matemàtics.

Avui la situació ha canviat en absolut al desaparèixer les circumstancies exposades; les exigencies de la vida moderna es tradueixen en construccions colossals i projectes atrevits que posen en jòc quantitats d'energía, la mida de les quals no aglapeix la imaginació, els avenços dels mètodes d'observació revelen l'existencia de quantitats i influencies que no se sospitaven, complicant extraordinariament els problemes astronòmics i físics, obligant a la revisió i correcció continues de les seves teoríes matemàtiques; fa un segle que existíen teoríes que no trobaven aplicació pràctica, avui es presenta un gran nombre de problemes irresolubles o de solució sols aproximada per manca d'instruments matemàtics capaços d'atacar-los amb èxit.

Per altra banda, la multiplicitat de societats científiques i de revistes especials, els congressos internacionals i l'intercanvi professional, han dut avui una comunitat quasi perfecta entre'ls matemàtics, revelada en el projecte d'unificació de notacions, actualment en vies d'estudi, podent dir amb exactitut completa que'ls matemàtics són els homes de ciencia més internacionals.

Desaparegudes doncs les rèmores, enderrocada l'anterior regla evolutiva, molt diferents han d'ésser la gènesi i el desenrotllament de les teoríes noves; però així i tot, causen una pregona sorpresa els de la teoría objecte d'aquesta ressenya, que nascuda ja formada, ha adquirit en els pocs anys que té de vida les proporcions d'una rama fonamental de l'Anàlisi.

Malgrat dels tractats didàctics, no escassos, publicats d'aquesta teoría amb distints punts de vista, i les innombrables notes que omplen les pàgines de les revistes matemàtiques, no ha aparegut encara un quadro, un esquema de tot allò que avui comprèn, i el provar d'esboçar-ho és una tasca difícil i costosa. No ha de fer estrany, doncs, que resulti aquesta ressenya incompleta i malendreçada.

Aquest treball consta de cinc parts:

a) Concepte i classificació general de les equacions integrals.

b) Equacions de Fredholm.

c) Equacions de Volterra.

d) Resum històric i idea de les aplicacions.

e) Bibliografía (*).

Equació integral és una equació funcional on figura alguna *transformada integral* de la funció incògnita (**) com la

$$T = \int_c F\left[x, y, u(y)\right] dy \qquad (1)$$

que és perfectament determinada si la funció F és integrable i donat el camí c d'integració; $u(y)$ és la funció incògnita.

La forma més general d'una equació integral d'una sola variable és

$$f\left(u(x), \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \;\ldots\ldots\; T_1, T_2, \;\ldots\ldots\right) = 0 \qquad (2)$$

designant per T_1, T_2, ... distintes transformades integrals del tipus (1).

L'equació (2) s'anomena *integro-diferencial* (Volterra), reservant-se la denominació d'*integral* per a la

$$f\left(u(x), T_1, T_2, \;\ldots\ldots\right) = 0 \qquad (3)$$

que no conté derivades de la funció incògnita.

Les equacions integrals es classifiquen en primer terme tenint en compte la naturalesa de les transformades integrals que contenen: si la funció F de la fórmula (1) és de primer grau en $u(y)$, la transformada integral corresponent s'anomena *lineal*, i d'*ordre superior* en els altres casos.

La classificació veritablement fonamental de les equacions integrals es basa en la naturalesa dels extrems del camí d'integració de les transformades; si aquests són

(*) La numeració d'aquesta serveix per abreujar les cites en el text, que així queden reduides al número que encapsala la nota bibliogràfica del treball corresponent.

(**) Suposarem que aquesta és dependent d'una sola variable, indicant més endevant la generalització de la teoría al cas de dues o més variables.

constants, l'equació s'anomena de *Fredholm*, si al menys un és variable, de *Volterra*, per haver sigut Fredholm i Volterra els que partint d'orígens molt distints formaren les respectives teoríes, el desenrotllament de les quals, si bé és paral·lel, ofereix diferencies tan notables que impossibiliten la seva unificació.

Finalment, les equacions lineals de Fredholm i Volterra s'anomenen de primera, segona o tercera especie (Hilbert) segons la seva forma, corresponent als tipus

$$f(x)=\int_c N(x, y)u(y)dy \quad \ldots\ldots \quad 1.^a$$

$$f(x)=u(x)+\int_c N(x, y)u(y)dy \quad \ldots\ldots \quad 2.^a$$

$$f(x)=u(x)\pi(x)+\int_c N(x, y)u(y)dy \quad \ldots\ldots \quad 3.^a$$

L'equació de segona especie és la més ben coneguda actualment, ha sigut discutida per complet i la seva teoría revesteix un caràcter formal perfecte; la de tercera especie ha sigut estudiada principalment per Hilbert en un cas (equació integral polar) reductible al tipus segón i per Picard ([147] i [159]), Marty i Platrier ([214]) directament; la de primera especie, reduida així mateix al segón tipus en certs casos, ofereix en el cas general un problema solament resoluble mitjançant condicions molt restrictives que han de complir les funcions conegudes que hi intervenen.

Les equacions integrals d'ordre superior presenten una varietat de tipus infinita, entre'ls quals n'hi ha dos de notable interès teòric-pràctic, les equacions integrals *no lineals* de la forma

$$\varphi(x)+\lambda\int N(x, y)\left[\varphi(y)\right]^p dy=f(x),$$

i les *iterades* que definirem més endavant.

Exposat ja el plan de la teoría, passem a examinar-la lleument, utilitzant, quan convingui per abreujar, el paral·lelisme ja indicat de les teoríes de Fredholm i Volterra.

Equacions de Fredholm

S'agrupen sota aquest epígraf totes les equacions integrals on la integració de la transformada s'efectúa entre límits constants. L'exposició de la seva teoría s'ha de fer per ordre de dificultat creixent, que és així mateix amb lleugeres variants el cronològic, estudiant els tipus successius, començant per les equacions lineals, després les d'ordre superior i els sistemes d'equacions integrals. Per tant, al passar a la subdivisió en especies de les equacions lineals, alterem l'ordre numèric dels tipus, exposant en primer lloc la teoría de les de segona especie, origen de la solució de Fredholm; de la discussió d'aquesta es deriva la de les equacions polars de tercera especie, úniques que s'han trobat fins avui en el plantejament dels problemes físics, i així mateix les condicions de possibilitat de resolució de les equacions de primera especie, amb llur solució en el cas de satisfer-se aquelles.

Equació de Fredholm de segona especie. — Tota la teoría és basada en la resolució de l'equació

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b N(x, y)u(y)dy, \qquad (1)$$

on $u(x)$ és la funció incògnita i les funcions $f(x)$ i $N(x, y)$ són subjectes a les següents restriccions, algunes de les quals seràn eliminades o atenuades més endavant:

1.ª Les variables i els límits d'integració són reals.

2.ª La funció $f(x)$ ha d'ésser continua, finita i integrable entre'ls límits finits a i b.

3.ª La funció $N(x, y)$, anomenada *nucli*, és limitada en el quadrat d'integració

$$|N(x, y)|<N, \quad a\leq(x, y)\leq b,$$

i continua en el mateix quadrat, menys en punts distribuits de manera que no hi hagi infinits amb una mateixa abscissa o ordenada, podent-hi presentar discontinuitats finites ordinaries amb canvis bruscos de valor de la funció en aquests punts; en aquesta hipòtesi la seva integral serà continua.

λ és un paràmetre numèric, real o complexe, que facilita la discussió.

Són diversos els mètodes resolvents de l'equació (1); el més antic, degut a Liouville, és molt senzill. Es redueix en essencia a desenrotllar en serie la solució incògnita, ja per coeficients indeterminats, ja per iteracions successives (Neumann). El camp limitat de convergencia de la serie resultant fou ampliat considerablement per E. Schmidt valent-se de la representació aproximada del nucli per un altre de bilineal ([83]); mes així i tot aquest mètode no ofereix més que un interès històric per ésser els seus resultats i el seu camp d'aplicació molt inferiors als de Fredholm.

Mètode de Fredholm. — L'interès despertat per la teoría fou originat principalment per l'elegancia i senzillesa de la solució de Fredholm, glosades per tots els que se n'han ocupat directament o indirectament.

La seva essencia és la següent: L'equació (1) equival a un sistema d'infinites equacions amb infinites incògnites, obtingut expressant que aquella es compleix per a tots els valors de la variable x compresos entre a i b. La solució del sistema, deduida per la regla de Cramer estesa a aquest cas, ve expressada en funció de dues series en λ. Fredholm va veure en aquesta analogía el camí de la solució, que obtingué sintèticament aprofitant solament la forma que el pas al límit del sistema considerat indicava. Va començar per formar les dues series en λ.

$$D(\lambda)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\Delta_n \tag{2}$$

$$D\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\lambda\right)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\Delta_n(x_1 y), \tag{2'}$$

on

$$\Delta_n=\int_a^b\int_a^b\cdots\cdots\int_a^b N\begin{pmatrix}x_1, & x_2, & \cdots\cdots, & x_n\\ x_1, & x_2, & \cdots\cdots, & x_n\end{pmatrix}dx_1 dx_2\ldots\ldots dx_n, \tag{3}$$

$$\Delta_n(x_1 y)=\int_a^b\int_a^b\cdots\cdots\int_a^b N\begin{pmatrix}x, & x_1, & x_2, & \cdots\cdots & x_n\\ y, & x_1, & x_2, & \cdots\cdots & x_n\end{pmatrix}dx_1 dx_2\ldots\ldots dx_n, \tag{3'}$$

amb la notació abreviada

$$N\begin{pmatrix}x_1, & x_2, & \cdots\cdots & x_n\\ y_1, & y_2, & \cdots\cdots & y_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}N(x_1, y_1) & N(x_1, y_2) & \cdots\cdots & N(x_1, y_n)\\ N(x_2, y_1) & N(x_2, y_2) & \cdots\cdots & N(x_2, y_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ N(x_n, y_1) & N(x_n, y_2) & \cdots\cdots & N(x_n, y_n)\end{vmatrix}. \tag{3''}$$

Un teorema de Hadamard ([10]) relatiu al límit del mòdul d'una determinant d'elements de mòdul finit assegura la convergencia absoluta i uniforme d'aquestes series l'examen directe de les quals ensenya també que són de convergencia ràpida. Les funcions $D(\lambda)$ i $D\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\lambda\right)$ són enteres en λ, el seu ordre ha sigut estudiat per Lalesco ([12]) i Poincaré ([142]), i el seu càlcul numèric és relativament fàcil.

Definides $D(\lambda)$ i $D\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\lambda\right)$ la funció

$$R\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\lambda\right)=\frac{D\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\lambda\right)}{D(\lambda)}, \tag{4}$$

meromorfa en (λ) dóna la solució de l'equació integral proposada per la fórmula

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\lambda\right)f(y)\,dy, \tag{5}$$

per a qualsevol valor del parametre λ que no sigui pol de $R\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\lambda\right)$, això és, rel de l'equació $D(\lambda)=0$.

Els valors de λ que anul·len $D(\lambda)$ s'anomenen *constants propis* del nucli $N(x, y)$ i distribueixen les equacions integrals d'aquest nucli en *regulars* resolubles per la fórmula (5), en les quals el parametre λ no anul·la $D(\lambda)$; i *singulars* que tenen per parametre una constant propia del nucli $N(x, y)$. Més endavant exposarem els resultats de la discussió d'aquest últim cas.

La mateixa fórmula resolvent (5) permet demostrar fàcilment que la solució obtinguda és continua i única.

L'equació homogenia regular

$$u(x) = \lambda \int_a^b N(x, y) u(y) dy, \tag{6}$$

deduida de la (1) fent $f(x) \equiv 0$ no admet segons la fórmula (5) cap més solució continua que la

$$u(x) \equiv 0. \tag{6'}$$

La funció $R(^x_y\lambda)$ resolvent del nucli $N(x, y)$ admet un desenrotllament en λ de la forma

$$R(^x_y\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n N_{n+1}(x, y), \tag{7}$$

on els coeficients $N_{n+1}(x, y)$ anomenats *nuclis iterats* compleixen la relació general, que permet son càlcul successiu

$$N_{r+s}(x, y) = \int_a^b N_r(x, z) N_s(z, y) dz. \tag{7'}$$

Aquests nuclis en les hipòtesis fetes per a $N(x, y)$ són tots funcions continues de x i y partint de $N_2(x, y)$. Evidentment $N_1(x, y) = N(x, y)$.

El desenrotllament (7) es pot obtenir per coeficients indeterminats partint de la fórmula (5); Poincaré el va deduir molt elegantment per consideracions d'anàlisi combinatori ([142]).

L'equació integral *associada*

$$v(x) = f(x) + \lambda \int_a^b N(x, y) v(y) dy, \tag{8}$$

que solament es diferencía de la (1) en la inversió de dues variables de nucli, es resol anàlogament; tots dos nuclis tenen les mateixes constants propies.

Passem a examinar les equacions integrals singulars. El problema algèbric similar és resoldre un sistema lineal de tantes equacions com incògnites de determinant nul·la, que té solució si el sistema és homogeni, però que exigeix per a tenir-ne condicions supletories si és heterogeni. Ambdúes propietats es conserven en les equacions integrals singulars. La homogenia

$$u(x)=\lambda_1 \int_a^b N(x, y)u(y)dy, \tag{8}$$

on λ_1 anul·la $D(\lambda)$ admet infinites solucions continues deductibles totes d'un nombre finit de linealment independents per combinacions lineals d'aquestes, anomenades *funcions propies del nucli* $N(x, y)$ *corresponents a la constant propia* λ_1. El nombre de funcions propies s'anomena *index* de la constant propia.

El càlcul d'aquestes solucions es dedueix dels teoremes següents:

1.er *L'index de la constant propia* λ_1 *del nucli* $N(x, y)$ *o sigui el nombre de solucions linealment independents de l'equació* (8) *és igual al subindex de la primera funció* $D_k\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\lambda\right)$ *no idènticament nul·la per a* $\lambda=\lambda_1$.

Les funcions $D_k\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\lambda\right)$, anomenades menors de la determinant $D(\lambda)$, ([142]) i ([214]), són les definides per les series

$$D_k\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\lambda\right)=N\begin{pmatrix}x_1, & x_2, & \ldots\ldots, & x_k\\ y_1, & y_2, & \ldots\ldots, & y_k\end{pmatrix}-\lambda\int_a^b N\begin{pmatrix}x_1, & x_2, & \ldots\ldots, & x_k, & x_{k+1}\\ y_1, & x_2, & \ldots\ldots, & y_k, & y_{k+1}\end{pmatrix}dx_{k+1}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(-\lambda)^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\ldots\ldots\int_a^b N\begin{pmatrix}x_1, & x_2, & \ldots\ldots, & x_k, & x_{k+1}, & \ldots\ldots, & x_{k+n}\\ y_1, & y_2, & \ldots\ldots, & y_k, & x_{k+1}, & \ldots\ldots, & x_{k+n}\end{pmatrix}dx_{k+1}\,dx_{k+2}\ldots\ldots dx_{k+n}+\ldots\ldots$$

$$(k=1, 2\ldots\ldots).$$

2.on *Les funcions*

$$u_m(x)=D_k\left(\begin{matrix}x_1, & x_2, & \ldots\ldots, & x_{m-1}, & x, & x_{m+1}, & \ldots\ldots, & x_k\\ y_1, & y_2, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & y_k\end{matrix}\lambda_1\right),\ (m=1, 2, \ldots\ldots, k)$$

són linealment independents i satisfàn l'equació integral proposada ([11]) *i* ([202])

Les condicions supletories relatives a les determinants menors del sistema algèbric en el cas no homogeni es tradueixen amb facilitat de la manera següent:

L'equació singular de segona especie

$$u(x)=f(x)+\lambda_1\int_a^b N(x, y)u(y)dy, \tag{9}$$

admetrà una solució continua u(x) *si la funció* f(x) *és ortogonal a les* k *funcions* $\phi_i(x)$

propies del nucli invers N(y, x) *relatives a la mateixa constant propia* λ_1*; és a dir, si*

$$\int_a^b f(x)\psi_l(x)dx=0 \quad , \quad (l=1, 2, \ldots\ldots, k).$$

En tal hipòtesi i sempre d'acord amb l'Álgebra, són solucions de l'equació (9) totes les funcions de la forma

$$u(x)+\sum_{l=1}^{l=k} c_l\psi_l(x),$$

on les c_l designen quantitats constants qualsevulga.

Extensions de la teoría exposada. — Tot el que hem dit exigeix que es compleixin en absolut les condicions de continuitat, limitació i realitat anotades al començament; algunes es poden ampliar notablement permetent aplicar la teoría a totes les equacions de segona especie trobades al plantejar problemes físics.

Els nuclis de la forma

$$N(x, y)=\frac{L(x, y)}{(x-y)^\alpha} \tag{10}$$

on $L(x, y)$ és limitada i integrable i α és compresa entre 0 i 1 són reductibles al cas ordinari substituint l'equació integral (1) per la

$$u(x)=f_n(x)+\lambda^n\int_a^b N_n(x, y)u(y)dy, \tag{10'}$$

que es demostra fàcilment com equival a aquella ([11]), el nucli de la qual $N_n(x, y)$ si n compleix la condició

$$n>\frac{1}{1-\alpha}$$

ja és limitat i entra per tant en el cas estudiat ([43]).

$f_n(x)$ ve expressada per la fórmula

$$f_n(x)=f(x)+\sum_{k=1}^{k=n-1}\lambda^k\int_a^b N_k(x, y)f(y)dy,$$

i és per tant calculable a priori.

L'equivalencia de les equacions (1) i (10′) permet calcular les constants propies del nucli $N(x, y)$ pel mètode algèbric de Gräffe, ja que les rels de l'equació obtinguda igualant a zero la funció determinant del nucli $N_n(x, y)$ són les enèsimes potencies d'aquelles.

Si les variables i els límits d'integració són complexes, un examen lleuger del mètode de Fredholm ens ensenya que és perfectament aplicable a aquest cas, efectuant totes les integracions al llarg d'un mateix camí *ab*, puix el teorema d'Hadamard, ja esmentat, es vàlid per a determinats d'elements qualsevulga.

El teorema de Cauchy referent a la integral d'una funció de variable complexa, ensenya que si el nucli $N(x, y)$ és una funció entera, les funcions $D(\lambda)$ i $D\binom{x}{y}\lambda$, i per tant la solució $u(x)$ són independents del camí d'integració seguit de a a b. Si $N(x, y)$ no és funció entera, la solució $u(x)$ deixa d'ésser uniforme, resultat comprovat per E. Picard per a $N(x, y) = \frac{1}{x}$ i altres casos senzills.

Això que deixem anotat justifica en absolut la paraula *nucli*, amb la qual es designa generalment la funció $N(x, y)$; de la seva forma i propietats i de les seves constants i funcions propies depèn no sols la possibilitat de la solució, sinó la solució mateixa. No ha de fer estrany per tant, la insistencia dels matemàtics per estudiar a conciencia les propietats de nuclis especials i les deductibles *a priori* per a les equacions corresponents.

El cas més notable és el del nucli simètric, és a dir, el que compleix la relació

$$S(x, y) \equiv S(y, x). \qquad (12)$$

La idea fonamental de Fredholm fou recollida pel professor de Göttingen D. Hilbert i aplicada a un sistema d'equacions de determinant simètric. Plantejat així el problema, se sumen a les propietats del cas general utilitzades pel savi suec totes les conegudes antigament per al cas simètric, la cual cosa no sols dóna una gran simplificació a la solució sinó que també origina importantíssims desenrotllaments en serie que no podíen ésser obtinguts directament pel mètode de Fredholm ([35] i [43]).

Deixant per més endavant l'insistir sobre aquests resultats i la llur generalització posterior, enunciarem solament les propietats dels nuclis simètrics, freqüentíssims en les aplicacions.

Les equacions associades (1) *i* (8) *són idèntiques.*

Tot nucli simètric té al menys una constant propia i per tant una funció propia.

Totes les seves constants propies són reals i pols simples de la funció resolvent $R\binom{x}{y}\lambda$.

Les constants propies i els seus graus de multiplicitat com a rels de l'equació

$D(\lambda)=0$ són calculables directament per aproximacions succesives sense formar la funció $D(\lambda)$, per les relacions

$$\lambda_p = \lim_{n=\infty} \sqrt[2n]{\frac{S_{2n}-\frac{K_1}{\lambda_1^{2n}}-\frac{K_2}{\lambda_2^{2n}}-\cdots-\frac{K_{p-1}}{\lambda_{p-1}^{2n}}}{S_{4n}-\frac{K_1}{\lambda_1^{4n}}-\frac{K^2}{\lambda_2^{4n}}-\cdots-\frac{K_{p-1}}{\lambda_{p-1}^{4n}}}}, \tag{13}$$

$$K_p = \lim_{n=\infty} \left[\left(S_{2n+2} - \frac{K_1}{\lambda_1^{2n+2}} - \frac{K_2}{\lambda_2^{2n+2}} - \cdots - \frac{K_{p-1}}{\lambda_{p-1}^{2n+2}} \right) \lambda_p^{2n+2} \right] \tag{13'}$$

en què les quantitats

$$S_n = \int_a^b S_n(x, x)\,dx$$

són les petjades (Spüren) del nucli i K_i designa l'ordre de multiplicitat de la rel λ_i ([45]).

El desenrotllament de Fourier del nucli simètric pel seu sistema ortogonal de funcions propies és

$$S(x, y) = \sum_{K=1}^{K=n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k}, \tag{14}$$

que representarà el nucli si és limitat o uniformement convergent. De la mateixa manera el nucli iterat $S_n(x, y)$ és representable pel desenrotllament

$$S_n(x, y) = \sum_{K=1}^{K=n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k^n} \tag{14'}$$

per haver demostrat Kowalewski ([6]) que és absolut i uniformement convergent per a $n \geq 2$. L'ordre de $D(\lambda)$ és en aquest cas inferior al del cas general.

Per a les funcions $D(\lambda)$ i $D\binom{x}{y}\lambda)$ s'obtenen les expressions simplificades

$$\left.\begin{aligned} D(\lambda) &= \prod_k \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right] \\ D\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\lambda\right) &= \sum_k \prod_k' \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

en què λ_k, φ_k designen respectivament les constants i funcions propies i indiquem per Π'_k un producte on manca el factor corresponent al valor k de la suma.

La fórmula resolvent de l'equació integral corresponent

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b S(x, y)u(y)dy \tag{16}$$

es dedueix immediatament per substitució que és la

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k-\lambda}\int_a^b \varphi_k(y)f(y)dy \tag{16'}$$

coneguda amb el nom de desenrotllament de Schmidt i molt usada en Física Matemàtica al tractar els fenòmens de ressonancia.

Dintre dels nuclis simètrics cab una nova classificació, gaudint els distints grups de propietats particulars molt interessants.

Nucli simètri c*complet* és el que posseeix un sistema ortogonal complet de funcions propies; aquestes, així com les constants propies, són en nombre infinit

La definició analítica és

$$\int_a^b \varphi_k(x)F(x)dx \neq 0 \quad (K=1, 2, \ldots\ldots)$$

per a $F(x)$ continua qualsevol en l'interval ab.

Si tals nuclis compleixen també la relació

$$\int_a^b\int_a^b S(x, y)F(x)F(y)dx\, dy \neq 0$$

s'anomenen *definits*, tenen totes les seves constants propies del mateix signe i en relació amb aquests es classifiquen en *positius* i *negatius*.

La introducció d'aquestes restriccions en la teoría general condueix a propietats molt notables i constitueix un camp fàcil d'investigació. Per altra banda aquests nuclis particulars són comuns en les aplicacions.

Nucli *pseudo-simètric* és el definit per la relació

$$P(x, y)=-P(y, x)$$

Posseeix propietats anàlogues al $S(x, y)$ i les seves constants propies són totes imaginaries pures i pols de primer ordre de la funció resolvent, i en té dues al menys; admet desenrotllaments anàlegs, etc.

Una altra classe important de nuclis és la dels *simetrizatbles* $Z(x, y)$ (Marty), que per composició amb un nucli simètric definit en donen un de simètric, és a dir, que compleixen una de les dues relacions

$$\int_a^b Z(x, s) S_d(s, y) ds = S(x, y),$$

$$\int_a^b S_d(x, s) Z(s, y) ds = S(x, y).$$

Son interès principal consisteix en què permeten trobar la solució d'algunes equacions integrals de tercera especie, les equacions polars de Hilbert, puix l'equació

$$f(x) = u(x)\varphi(x) + \int_c N(x, y) u(y) dy,$$

equival a la

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = u(x) + \int_c N(x, y) \frac{1}{\varphi(x)} u(y) dy,$$

el nucli de la qual

$$N(x, y) \frac{1}{\varphi(x)},$$

si $N(x, y)$ és simètric i definit, pertany al tipus considerat $Z(x, y)$, ja que'l nucli

$$\int_a^b N(x, s) \frac{1}{\varphi(s)} N(s, y) ds$$

és simètric.

Aquests nuclis posseeixen propietats anàlogues a les dels nuclis simètrics referents a la naturalesa de les constants propies, forma dels desenrotllaments, etc.

La representació del nucli simètric per la serie de les seves funcions propies i les notables propietats dels sistemes ortogonals esteses als anomenats biortogonals, serveixen de fonament a l'anàlisi elemental del nucli, i la seva funció resolvent separant les distintes porcions corresponents a les constants propies, del qual es dedueix així mateix la síntesi d'un nucli donades les seves constants i funcions propies.

Goursat ([70] i [106]), Heywood ([75]) i Lalesco ([12]) han fet aquest anàlisi per complet i han resolt també el problema invers, arribant a propietats notabilíssimes que lliguen els nuclis parcials i les funcions que en depenen, íntimament lligades a les de les funcions bilineals.

Nucli bilineal. — El nucli

$$B(x, y) = \sum_{p=1}^{p=n} a_p(x) b_p(y)$$

presenta un interès particular per haver servit de base a Schmidt per a estendre el mètode de solució de Liouville a casos en què no es podía aplicar directament, *representant aproximadament* el nucli de l'equació integral de què tractem per un de bilineal ([11]).

La primera aplicació directa de la teoría de les equacions integrals en la representació funcional és expressada en la proposició següent coneguda amb el nom de teorema de Hilbert-Schmidt.

Tota funció F(x) *transformada integral lineal de nucli simètric d'una funció contínua qualsevol, és a dir, tal que*

$$F(x) = \int_a^b S(x, y) f(y) dy, \qquad (17)$$

és desenrotllable en serie absolutament i uniformement convergent de les funcions propies del nucli S(x, y) *de la forma*

$$F(x) = \sum_k \varphi_k(x) \int_a^b F(y) \varphi_k(y) dy. \qquad (17')$$

Aquesta proposició permet la representació analítica de les funcions per series en condicions molt més amplies que els altres mètodes, series trigonomètriques, de funcions de Bessel, etc....; puix és suficient si el nucli és una funció de Green que $F(x)$ posseeixi un cert nombre de derivades. Hilbert l'havía enunciat primerament ([35]) en forma més restringida, però els treballs del seu deixeble Schmidt ([39]) li permeteren donar al seu teorema la forma definitiva en la seva quinta comunicació a la Societat científica de Göttingen ([43]).

Schmidt estengué després aquest desenrotllament a les funcions de la foıma (17) on el nucli no és simètric, mitjançant la consideració dels dos nuclis *derivats* del proposat $N(x, y)$,

$$\left.\begin{aligned} \underline{S}(x, y) &= \int_a^b N(x, z) N(y, z) dz \\ \overline{S}(x, y) &= \int_a^b N(z, x) N(z, y) dz \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

que són evidentment simètrics.

Anomenant $N(x, y)$ i $\underline{S}(x, y)$ nuclis *directes* i $N(y, x)$ i $\overline{S}(x, y)$ *inversos*, el teorema de Schmidt s'enuncía de la manera següent:

Tota funció continua F(x) *transformada integral lineal de la forma* $\left\{ \begin{matrix} \textit{directa} \\ \textit{inversa} \end{matrix} \right\}$ *del nucli* N(x, y) *és desenrotllable en serie absolutament i uniformement convergent de les funcions propies del nucli derivat* $\left\{ \begin{matrix} \textit{directe} \\ \textit{invers} \end{matrix} \right\}$ *del* N(x, y), *de forma anàloga a les series de Fourier.*

Equació de Fredholm de primera especie. — Contra allò que sembla natural, la simplificació que ofereix la forma de l'equació integral de primera especie respecte de la seva homònima de segona no es tradueix en una altra de similar en el seu mètode resolvent; ans molt al contrari, les condicions d'existencia de solució única, reductibles a considerar únicament funcions integrables, es veuen augmentades en el cas actual amb altres de molt especials.

No existeix doncs, propiament parlant, teoría *formal* de l'equació de Fredholm de primera especie; sols Picard ha conseguit trobar una condició necessaria i suficient per a l'existencia de solució. Esboçarem breument el camí seguit per obtenir-la, fundat en avenços contemporanis de la teoría de les series funcionals.

Es diu que la serie de funcions

$$f_k(x) \quad , \quad (k=1, 2, \; \ldots\ldots)$$

convergeix en promig en l'interval *ab* si

$$\lim_{n,\, m = \infty} \int_a^b \left[f_m(x) - f_n(x)\right]^2 dx = 0.$$

Donada una serie d'aquestes hi ha sempre una funció $F(x)$ i només una que compleix la relació

$$\lim_{n = \infty} \int_a^b \left[F(x) - f_n(x)\right]^2 dx = 0,$$

anomenada *funció* límit de la serie proposada. (Cal fer notar que en aquesta teoría les integrals es prenen en el concepte de Lebesgue, i no en l'ordinari de Riemann.)

D'aquesta propietat se dedueix immediatament la que segueix, coneguda amb el nom de teorema de Fischer-Riesz per haver sigut demostrat simultaniament per ambdós matemàtics ([60]) i ([69]): *Donat un sistema complet de funcions ortogonals*

$$\varphi_k(x) \quad , \quad (k=1, 2, \ldots\ldots)$$

i una serie de constants

$$f_k \quad , \quad (k=1, 2, \ldots\ldots)$$

tals que la serie Σf_k^2 *sigui convergent, hi ha sempre una funció única de quadrat integrable* $f(x)$ *desenrotllable en serie de Fourier de les funcions* $\varphi_k(x)$ *amb els coeficients* f_k.

Per demostrar-ho n'hi ha prou observant que la serie de funcions

$$F_k(x)=f_k\varphi_k(x) \quad , \quad (k=1, 2, \ldots\ldots)$$

és convergent en promig; la seva funció límit compleix l'enunciat. Aquesta funció és única, puix si n'existís una altra, la diferencia entre ambdúes hauría de formar part del sistema donat que s'ha suposat que era complet.

Demostrat aquest teorema, n'hi ha prou recordant el desenrotllament de Schmidt per a les funcions d'una de les formes

$$\int_a^b N(x, s)h(s)\,ds, \qquad \int_a^b N(s, x)\lambda(s)\,ds,$$

en serie de Fourier de les funcions propies dels nuclis derivats $\underline{N}$ i $\overline{N}$ del nucli dissimètric $N(x, y)$ per a deduir el teorema de Picard ([87]) o ([112]): *L'equació de Fredholm de primera especie*

$$f(x)=\int_a^b N(x, s)h(s)\,ds,$$

admet una solució única finita i integrable, si la serie

$$\sum_0^\infty \lambda_k^2 f_k^2$$

és convergent. Designem per λ_k les constants propies del nucli $\underline{N}(x, y)$ i per f_k els coeficients de Fourier de $f(x)$ segons les funcions propies d'aquell nucli.

Es també indispensable que'l nucli $\underline{N}(x, y)$ sigui *tancat;* si no ho és, l'equació integral proposada no té solució.

Equacions integrals de més d'una variable. — L'extensió a aquest cas dels tipus estudiats és immediata. Particularment en Física matemàtica és molt freqüent trobar equacions integrals de dues variables (potencials de capa simple i doble, etc.), com la de segona especie

$$u(x_1, x_2)=f(x_1, x_2)+\lambda \int\int_{(R)} N(x_1, x_2; y_1, y_2)u(y_1, y_2)d)y_1, y_2),$$

esteses les integrals a la regió (R), el punts de la qual tenen per coordenades y_1, y_2, i en les quals se suposen limitades i integrables les funcions f i N.

Considerant les funcions u, f, N com a funció dels punts $X(x_1, x_2)$ i (y_1, y_2) l'equació pren la forma

$$u(X)=f(X)+\lambda \int\int_{(R)} N(X, Y)u(Y)du_y,$$

designant du_y un element areolar de (R).

La resolució i discussió d'aquesta equació, anomenada *puntual*, són idèntiques a les de la (1); únicament en el cas que el nucli es fa infinit al coincidir els punts X i Y hi ha alguna variació, favorable però a la possibilitat de la solució.

Plemelj ha demostrat que si el nucli és de la forma

$$\frac{L(X\ Y),}{\overline{XY}^{\alpha}}\ , \quad (\alpha-2)$$

l'equació és reductible per iteracions a una altra de nucli finit; i que si $\alpha=1$ com esdevé en els problemes de potencial, el nucli $N_2(x, y)$ es fa infinit com *log. nep.* $\overline{XY}$ i el de tercer ordre $N_3(x, y)$ ja es conserva finit.

Equacions de Fredholm d'ordre superior. — La seva forma general és

$$f(x)=\varphi(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{m=\infty} \lambda_m \int_a^b N^m(x_1 s_1, s_2, \ldots\ldots, s_m)F_m\Big[\varphi(s_1), \varphi(s_2), \ldots\ldots, \varphi(s_m)\Big]ds_1 ds_2, \ldots\ldots, ds_m. \quad (19)$$

Són resolubles formalment en condicions molt restringides anàlogues a les que exigeix el mètode de Neumann-Liouville per a les lineals, per aproximacions successives de forma semblant.

Schmidt ha reduit la solució d'una equació integral de tipus semblant al (19), encara que no tan general a la d'una altra equació més senzilla que anomena de *ramificació*. L'aridesa i escassa aplicació d'aquests resultats motiven que siguin molt pocs els treballs que s'hi refereixin.

Sistemes. — Per més que ja Fredholm va iniciar l'estudi dels sistemes d'equacions integrals del seu tipus, aquesta part de la teoría no ha assolit el desenrotllament que hi havía dret a suposar, degut principalment a la manca d'interès dels resultats. Recentment Platrier en un treball bastant extens amplía les idees de Fredholm, fent dependre la solució d'un sistema de la d'una equació integral única ([214]).

Equacions de Volterra

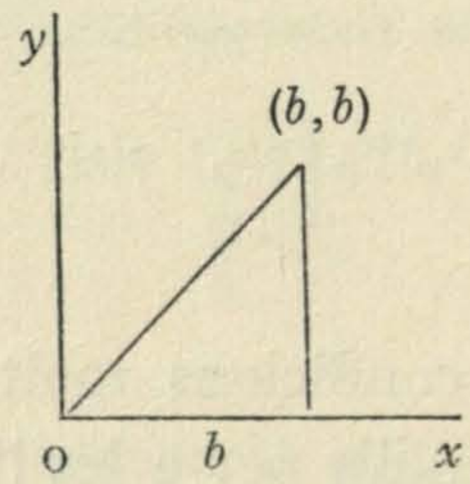
Ja hem indicat el motiu d'aquesta denominació, més justificada encara en aquest cas que en l'anterior, puix aquí el nucli vital de la teoría el constitueixen per complet les investigacions de Volterra. Aquest savi italià partint de la teoría de les *funcions de linies* va considerar les funcions integrals com a cas límit de les equacions algèbriques lineals; basant-se en això va arribar a emplear determinants infinits en el problema de la inversió de les integrals definides; i així mateix va iniciar posteriorment els estudis sobre equacions integro-diferencials i funcions permutables, que prossegueix amb activitat i èxit notables.

La teoría de Volterra és de desenrotllament molt semblant al de Fredholm; semblança que ja vam indicar que utilitzarem per abreujar en els possibles l'exposició, reduint-la a la de les diferencies essencials d'amdúes teoríes.

L'equació integral de Volterra de segona especie és

$$\varphi(x) = u(x) + \int_0^x N(x, y)\, u(y)\, dy. \tag{9}$$

El nucli $\underline{N}$ és finit i definit en el triangle $(Ox,\ x=y,\ x=b)$,



en el qual

$$| N(x, y) | < M,$$

essent M una quantitat finita.

El mètode de resolució es resum en tres principis fonamentals:

a) De convergencia.

b) De reciprocitat.

c) D'inversió.

El primer defineix la funció resolvent R(x, y) assegurant la convergencia uniforme de la serie dels nuclis iterats

$$R(x, y) = \sum_{k=1}^{k=\infty} N_k(x, y). \tag{2}$$

El segón, expressat per les relacions (2) i

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^{k=\infty} R_k(x, y), \tag{3}$$

permet, donada una de les dues funcions N, R, calcular l'altra per simples quadratures.

El tercer, condensat en la relació

$$u(x) = \varphi(x) + \int_0^x R(x, y)\varphi(y)\,dy, \tag{4}$$

idèntica a la fórmula resolvent de Fredholm, dóna la solució *formal* de l'equació integral de segona especie.

Volterra va estudiar en particular el nucli

$$N(x-y),$$

que apareix en la teoría de la mecánica hereditaria del cicle tancat, i va demostrar que la seva funció resolvent és així mateix

$$R(x-y).$$

També va reduir les condicions intervals o la d'ésser el nucli integrable en el triangle considerat ([21]), ([22]), ([76]), ([96]) i ([143]).

Equació integral de primera especie. — És la

$$\varphi(x) = \int_0^x N(x, y)u(y)\,dy, \tag{5}$$

en què la funció N és finita i continua i $\varphi(v)=0$.

Volterra aplica per a resoldre-la el mètode algèbric, trobant que era també condició necessaria per a l'existencia de solució la

$$N(x, x) \neq 0;$$

va comprobar, però posteriorment, que en certs casos particulars hi havía solució encara que $N(x, x) = 0$.

Derivant respecte de x l'equació (5) es passa fàcilment a la de segona especie

$$\frac{\varphi'(x)}{N(x, x)} = u(x) + \int_0^x \frac{\frac{dN}{dx}}{N(x, x)} u(y)\, dy,$$

que exigeix per a tenir solució, ultra les condicions abans esmentades, que $\frac{dN}{dx}$ sigui continua i finita.

Si el nucli i la seva derivada respecte de x són finits i continus, la condició $N(x, x) \neq 0$ és suficient perquè existeixi una solució única. Si el nucli es infinit, es pot, anàlogament al que s'ha explicat en el mètode de Fredholm reduir en certs casos l'equació proposada a una altra de nucli finit.

El cas $N(x, x) = 0$, descartat al principi per Volterra, ha sigut després analitzat concienciosament pel mateix Volterra i per Lalesco ([76]) i ([136]), basant-se el darrer en la teoría de les equacions diferencials lineals.

Si el nucli N es algèbric i designem per x_r la rel menor de l'equació

$$N(x, x) = 0,$$

la resolució de l'equació (1) per a l'interval $o \ldots . . x_r$ queda compresa en el cas estudiat; n'hi ha prou doncs examinant el cas en què $N(x, y)$ s'anul·la per a $x = y = 0$, o sigui quan

$$N(0, 0) = 0.$$

El mètode de Lalesco es redueix en línies generals a reduir per derivacions successives l'equació integral proposada a diferencial linial fuchsiana amb segón membre, exactament en el cas de nuclis particulars i per aproximacions successives en el general. La naturalesa de les solucions d'aquesta equació diferencial depèn de la naturalesa de les rels de la seva equació fonamental determinant per al punt singular $x = 0$; condicions particulars relatives al signe de la part real d'aquestes rels defineixen l'existencia d'una solució única, finita en l'origen, de l'equació de Fuchs, que serà també solució de l'equació integral donada ([13]).

Aquest mètode s'estén sense dificultat teòrica a la resolució de sistemes de n equacions integrals amb n funcions incògnites, de segona especie, com el

$$\varphi_h(x)=u_h(x)+\int_0^x \sum_{g=1}^{g=n} N_{h,g}(x,y)\,u_g(y)\,dy \quad , \quad (h=1, 2, \ldots\ldots, n),$$

o de primera, com el

$$\varphi_h(x)=\int_0^x \sum_{g=1}^{g=n} N_{h,g}(x,y)\,u_g(y)\,dy \quad , \quad (h=1, 2, 3, \ldots\ldots, n).$$

El primer es resol mitjançant tres principis extensions dels que donen la solució de l'equació integral de segona especie; el segón, si la determinant dels nuclis

$$D(x,y)=\begin{pmatrix} N_{1,1}(x,y), & N_{1,2}(x,y), & \ldots\ldots, & N_{1,n}(x,y) \\ N_{2,1}(x,y), & N_{2,2}(x,y), & \ldots\ldots, & N_{2,n}(x,y) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_{n,1}(x,y), & N_{n,2}(x,y), & \ldots\ldots, & N_{n,n}(x,y) \end{pmatrix}$$

compleix la relació

$$D(x,x)\neq 0,$$

és reductible a un sistema de segona especie; el cas contrari es discuteix mitjançant un sistema de n equacions de Fuchs, depenent l'existencia de solució, de la naturalesa de les rels del sistema d'equacions funcionals determinants anexe.

El problema de la inversió de les integrals múltiples condueix igualment a la solució de les equacions integrals de diverses variables. La solució *formal* d'aquest problema, així com de sistemes de primera i segona especie d'equacions integrals de diverses variables és extensió immediata dels casos anteriors.

La teoría de les equacions diferencials entre derivades parcials ha donat origen a equacions integrals, generalització de les de primera i segona especie, la resolució de les quals ha sigut objecte dels treballs de Picard, Goursat, Lalesco, Burgatti, Picone, Myller i algún altre, operant per procediments anàlegs als anteriors o bé directament per aproximacions successives ([135]), ([64]), ([13]). La mateixa teoría condueix a tipus nous d'equacions integrals, que perquè no encaixen en les estudiades esmentarem breument.

Equació de segona especie no lineal. — Es la

$$u(x)=\varphi(x)+\int_0^x N\big[x, y, u(y)\big]\,dy,$$

on la funció N de les tres variables reals x, y, u, compleix les relacions

$$|N(x, y, u)| < M, \quad |N(x, y, u_\alpha) - N(x, y, u_\beta)| < N\,|u_\alpha - u_\beta|,$$

per a

$$0 < (x, y) < a \quad , \quad A - b < u < A + b,$$

en què M, N, a, b, A, són constants positives.

Aquesta equació generalitza la

$$y(x) - \int_0^x f\left[z, y(z)\right] dz = \varphi,$$

que és la transformada integral de la coneguda equació diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

i es resol per un mètode d'aproximacions successives anàleg a l'empleat per Picard al tractar (*Cours d'Analyse*, t. 2, p. 340,)dita equació diferencial, arribant-se a demostrar l'existencia d'una solució única.

No ofereixen una senzillesa tal les equacions integrals no lineals de primera especie; la llur solució àdhuc en casos molt particulars condueix a funcions multiformes de x per a les aproximacions successives que no presenten les mateixes *ramificacions* (Schmidt); no existeix doncs en general una superficie de Riemann corresponent a totes elles.

Un altre cas notable deduit de la mateixa teoría, és el d'equacions integrals de Volterra en què els límits no són com fins ara o i x, sinó tots dos funcions d'aquesta variable. La seva resolució en els casos més senzills (límits $-x \ldots\ldots +x$, $\alpha x \ldots\ldots \beta x \ldots\ldots$) es redueix a la d'un sistema de dues equacions integrals o s'obtenen (ep! ?) directament pel mètode, tan socorregut en aquesta teoría, d'aproximacions successives.

Finalment la solució *formal* de les equacions integrals no lineals de diverses variables com la

$$\varphi(x, y) = u(x, y) + \int_{f_1(x)}^{y} dz \int_{f_2(x)}^{x} N\left[x, y, z, t, u(t, z)\right] dt,$$

trobada per Picone ([135]), es dedueix fàcilment de la combinació dels casos abans dits.

Equacions integro-diferencials. — Les equacions integro-diferencials es presenten, com ha fet veure Volterra, en els problemes de Física Matemàtica referents a fenòmens d'*indole hereditaria*, és a dir, en dos estats futurs del sistema considerat depenent no sols de l'actual o de l'infinitament pròxim anterior, sinó de tots els estats precedents, p. e. el magnetisme d'un cos. La seva teoría es troba encara en període de formació, per més que existeixen ja treballs d'importancia, i serà objecte d'una ressenya posterior. Sols afegirem aquí que alguns tipus senzills de dites equacions, com els obtinguts en els problemes de torsió hereditaria, són reductibles a equacions integrals; i altres més complexes a sistemes d'equacions diferencials i integrals.

Funcions permutables. — Una altra teoría derivada de la teoría de les equacions integrals, i avui en dia son complement indispensable, és la de les *funcions permutables*. Son fonament, l'anomenada composició de dues funcions permutables, definida per la relació

$$\int_x^y F_1(x, z) F_2(z, y)\, dz = \int_x^y F_2(x, z) F_1(z, y)\, dz \qquad (a)$$

guarda una íntima conexió amb la iteració dels nuclis en la teoría de Fredholm.

La relació (a) demostra que la *resultant* de dues funcions permutables F_1 i F_2 gaudeix de la propietat commutativa. És fàcil demostrar que també posseeix la propietat associativa, amb la qual cosa la composició de funcions permutables té semblança amb la multiplicació de quantitats algebraiques. Aquesta analogía és el *Deus ex machina* de la teoría; i és possible construir-hi series de funcions permutables i estudiar llur convergencia. Finalment les propietats de les funcions implícites esteses a les combinacions de les funcions permutables, donen la solució *formal* de les equacions integrals i integro-diferencials en què les funcions conegudes siguin permutables, en forma de series *sempre* convergents. Aquest resultat, d'un interès trascendental, es deu també a Volterra.

Resum històric i idea de les aplicacions

La primera equació integral resolta fou la

$$\left(F(x) = \int_0^x \frac{u(y)\, dy}{(x-y)^\alpha} \quad , \quad (0 < \alpha < 1,\ F(0) = 0)\right)$$

del tipus Volterra, trobada en 1826 per l'insigne i malaurat matemàtic norueg Niels H. Abel al generalitzar el problema de la tautocrona ([15]). El mètode empleat fou el de desenrotllament en serie, ni senzill ni rigorós, com ja va observar Schlömilch (Analytische Studien. — 1848).

Onze anys més tard, Liouville va trobar una altra equació integral a l'estudiar el desenrotllament d'una funció en serie de termes que satisfacin l'equació diferencial de segón ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi^2 y=f(x),$$

on φ és un paràmetre variable ([17] i [18]).

En 1884 el rus N. Sonnine va generalitzar el problema d'Abel, empleant el seu mateix mètode ([19]).

En 1894 F. L. Roux en la seva tesi [20] va resoldre l'equació integral

$$\left(\int_a^x N(x, y)u(y)dy=f(x)\right)$$

pel mètode d'aproximacions successives. En 1896 apareixen els primers treballs de Volterra ([21] i [22]).

Ja en 1883, partint del càlcul de variacions, va començar els seus estudis sobre les funcions que depenen d'altres funcions, i les anomenades funcions de linies, equivalents a funcions d'un nombre infinit i continu de variables; i en 1884 (Atti Lincei) va estudiar una equació integral de nucli simètric utilitzant el ja esmentat càlcul de variacions. Aquests esforços preliminars cristal·litzaren en 1896 en les Memories abans esmentades sobre la inversió de les integrals definides, que constitueixen la pedra fonamental de les equacions del tipus de Volterra. La naixent teoría, però, visqué quasi ignorada del món matemàtic fins a la publicació de la primera Memoria de Fredholm [23] resolent una equació integral lineal de segona especie per un mètode d'un rigorisme i elegancia tals que determinaren en els analistes un daler irresistible d'avençar per la nova i ampla via oberta pel geni de Fredholm.

Darrera d'algunes notes complementaries, la Memoria [30], «*Niels* H. Abel in memoriam», publicada en 1903, assenyala el final del primer període de la vida d'aquesta teoría. Per completar en tot el seu treball, Fredholm el va dedicar a l'insigne matemàtic i compatriota seu, que als seus ja nombrosos títols de gloria, n'uneix un de pòstum, la inconscient col·locació de la primera pedra del grandiós edifici alçat.

D'aquesta data ençà és tan gran el nombre dels treballs publicats, que àdhuc fixar-se només en els fonamentals es tasca difícil. El mateix any n'apareixen alguns de Plemelj ([31] i [32]), base dels posteriors de Goursat i altres sobre'ls sistemes de funcions ortogonals.

En 1904 es presenta un altre analista de primer ordre, el professor de Göttingen D. Hilbert. En sis comunicacions, tres de les quals són essencialment teòriques ([35] i [43]), endreçades a la societat científica de Göttingen, se troben un nou mètode de solució, un estudi complet del cas simètric i gran nombre d'aplicacions a la Física Matemàtica; i per aquests treballs li concediren el premi Bolyai en 1910. Hem d'associar al seu nom el de son deixeble E. Schmidt, autor d'un treball [39] que va facilitar a Hilbert la solució completa del seu problema, i conté una nova forma de desenrotllament funcional (Teorema de Hilbert-Schmidt) que farà el seu nom inoblidable.

Són quasi simultanis els treballs de Bateman ([40] [41], [42] i [46]), sobre les equacions integrals de primera especie, el càlcul de les constants propies de Kneser [45] i altres de Holmgren [44], Picard, etc.

En 1907 i 1908, ultra diverses notes que complementaren els resultats anteriors, fructifiquen les doctrines de Plemelj amb els treballs de Goursat ([52], [54], [55] i [70]), Heywood i Lalesco, que darrera notes d'escassa extensió publiquen simultaniament en el *Journal de Lionville* [75], [76], els treballs que no sols resumen els passats, sinó que augmenten el cabal científic uns estudis decisius sobre l'ordre de la funció determinant de Fredholm, i la composició i descomposició de nuclis. Són també dignes d'esment els del ja citat Schmidt [83[, de Schur]84], Lebesgue, Pincherle, Lauricelle, i molts altres. Apareix així mateix la nova teoría en forma didàctica en la obra [2].

En 1909 és tal l'activitat creadora dels investigadors, revelada en la nota bibliogràfica final, que només l'enumeració dels treballs publicats fóra inacabable; s'arrodoneixen i adquireixen caràcter clàssic les doctrines de Goursat i la seva escola ([105] i [106]); Picard, aprofitant conceptes de Lebesgue, construeix la teoría de l'equació de Fredholm de primera especie ([86], [87], [112]); H. Poincaré [88] dóna a conèixer resultats interessants sobre les equacions integrals amb límits finits; Volterra amplía la teoría general amb la consideració de les equacions integro-diferencials i de les funcions permutables [92]; apareix el Tractat de Böcher [4], i els treballs de Dixon [101], Weyl i Aros. Hem d'esmentar també el ressorgiment de la que gosem anomenar escola italiana amb Lauricelle, Sinigaglia, Orlando i altres que completen la teoría de Volterra i l'enllacen estretament amb la de les equacions diferencials ordinaries.

Aquesta activitat no para els anys següents, sumant-se continuament noms nous i investigacions noves; en 1910 Lalesco segueix l'estudi dels nuclis ([117], [118] i [119]); Picard i Marty es dediquen a les equacions de tercera especie ([121] a [126]); Volterra, ajudat per Picone i altres continúa desenrotllant la teoría de les equacions integro-diferencials ([135] a [137]); i apareix la Memoria magistral de Poincaré [142] on se tracta la teoría de les equacions integrals des del punt de vista funcional, amb una elegancia corprenedora; i a més moltes altres notes de menor quantía. En 1911 segueix la tasca de l'any anterior, prenent una gran volada la part pràctica de la teoría, i es publica la obra de Kneser [10], que en condensa una gran part.

Finalment en els dos anys darrers apareixen les obres didàctiques de Heywood [11], Lalesco [12], i Volterra ([13] i [14]), entrant de ple amb això la teoría nova en el grup de les que integren l'ensenyança matemàtica ordinaria, sense deixar però d'experiment un acreixement ràpid.

La teoría de les equacions integrals i integro-diferencials permet avui en dia el plantejament i la solució formal de gran nombre de problemes de la Física Matemàtica. Els desenrotllaments funcionals de convergencia assegurada, la solució dels problemes de Dirichlet i Riemann, la felicíssima aplicació a les elucubracions de Minkowski, l'estudi sistemàtic dels fenòmens hereditaris que Volterra realitza, més una multitut d'aplicacions menys generals es deuen per complert a la teoría de què parlem. Els problemes de vibracions condueixen a equacions integrals de nucli simètric, els de moviments en els líquids a nuclis infinits reductibles, etc., etc.

BIBLIOGRAFÍA

OBRAS:

1. S. Pincherle, *Funktional Operationen und Gleichungen.* (*Enc. der Math. Wiss*, Bd. II, Heft 6, 1906.)
2. R. d'Adhémar, *Exercices et leçons d'Analyse.* (Gauthier-Villars, París, 1908.)
3. R. d'Adhémar, *L'équation de Fredholm et les problèmes de Dirichlet et Neumann.* (Hermann; París, 1909.)
4. M. Bôcher, *An introduction to the study of integral equations.* (*University Press;* Cambridge, 1909.)
5. J. Horn, *Einführung in die Theorie der Part. Diff. Gleichungen.* (Sammlung Schubert, 1910.)
6. G. Kowalewski, *Einführung in die Determinanten Theorie.* (Veit, 1909.)
7. H. Poincaré, *Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und Math. Physik.* (Teubner, 1910.)
8. H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste. Théorie des marées.* (Gauthier-Willars; París, 1910.)
9. A. Korn, *Ueber freie und erzwugene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der lin. Integralgleichungen.* (1911.)
10. A. Kneser, *Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der Math. Physik.* (Vieweg und Sohn, 1911.)
11. B. Heywood i M. Frechet, *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique Math.* (Hermann; París, 1912.)
12. T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales.* (Hermann; Paris, 1912.)
13. V. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et intégro diferentielles.* (Gauthier-Willars; París, 1913.)
14. V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes.* (Guathier-Willars; París, 1913.)

MEMORIES (*teòriques solament*):

15. N. H. Abel, *Auflösung einer mech. Aufgabe.* (Crelles, J, 2, 1826.)
16. J. Liouville, *Sur le dev. des fonctions ou parties de fonctions...* (J. de Liouville, 2; *Comptes rendus;* T. 4.°, París, 1837.)
17. J. Liouville, *Solution nouvelle d'un problème d'Analyse...* (J. de Liouville, 2, 1837.)
18. T. Liouville, *Premier mémoire sur la théorie des éq. diff. lin. et sur le dev. des fonctions en séries.* (J. de Liouville, 3, 1838.)
19. N. Sonnine, *Sur la généralisation d'une formule d'Abil.* (*Acta Math.*, 4, 1884.)
20. J. le Rouse, *Sur les intégrales des équations lineaires...* (*Thèse de Doctorat;* 1894.)
21. V. Volterra, *Sulla inversioni degli integrali definiti.* (*Atti Torino, Atti Lincei,* 1896.)
22. V. Volterra, *Sopra alcuni questioni di inversione di integrali de finiti.* (*Ann. di Math.*, 25, 2.)
23. I. Fredholm, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet.* (Ofv. of Kongl. Sv. Vetens Kaps. Akad. Förh., 1900.)
24. E. Holmgren, *Sur l'inversion des intégrales définices.* (Bihang t. Kongl-Svenska V. Akad-Handl.)
25. E. Cesaro, *Sopra un equazione funzionale, trattata da Beltrani.* (Rend. Acad. Napoli, 1901.)
26. I. Fredholm, *Sur une classe de transformations rationelles.* (C. R., 133 Paris.)
27. I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionelles.* (C. R. 134; Paris, 1902.)
28. O. Kellog, *Zur Theorie der Integralgleichungen...* (*Nach.*, Göttingen.)
29. E. Goursat, *Sur un problème d'inversion, résolu par Abel.* (*Acta Math.*, 1903.)
30. I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* (*Acta Math.*, 27.)
31. F. Plemelj, *Ueber die Anwendung der Fredholmsehen Funktional Gleichungen, in der Potentialtheorie.* (*Sitzunsberichte der... Wiss-Wien.*)
32. F. Plemelj, *Zur Theorie der Fredholmsehen Funktional gleichung.* (*Monatshefte für Math. und Physik.*)
33. W. Ritz, *Zur Theorie der Serienspectren.* (*Inaugural Dissertation, Œuvres complètes;* Göttingen, 1911.)
34. G. Fubini, *Sull'inversioni degli integrali definiti.* (*Rend Acc.* 3, 1904.)
35. D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* (*Gött. Nach., erste Mitteilung.*)
36. E. Picard, *Sur une équation fonctionelle.* (C. R., 139, París.)
37. O. Kellog, *Unstetigkeiten in der linearen Integralgleichungen.* (*Math. Annalen,* 38, 1904.)
38. G. Fubini, *Sopra una formole del Fredholm nel problema dell'inversione degli integrali definiti.* (*Boll. Acc. Catania,* 1905.)
39. E. Schmidt, *Entwicklung willk. Funct. nach Syst. vorgeschriebener.* (*Dissertation* Göttingen, 1905.)
40. H. Bateman, *Sur l'équation de Fredholm.* (*Bull. Sc. Math.*, 1906.)
41. H. Bateman, *A clars of integral equations.* (*Trans. Soc.*, Cambridge, 1906.)
42. H. Bateman, *The theory of integral equations.* (*Trans. Soc.*, Cambridge, 1906.)
43. D. Hilbert, *Grundzüge...* (*Gott. Nach.*, 4e u. 5e, Mitt., 1906.)
44. E. Holmgren, *La théorie des équations intégrales linéaires.* (*Ark. Mat.*, 3, Stockolm, 1906.)
45. A. Kneser, *Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen.* (*Rend. Pal.* 21, 1906.)
46. E. Picard, *Sur quelques applications de l'équation fonct. de Fredholm.* (*Rend. Pal.*, 21, 1906.)
47. E. Picard, *Sur quelques problèmes de Phys. Math. se rattachant à l'équation de Fredholm.* (*Ann. Ec. Nor.*, 1906.)
48. H. Bateman, *Or the inversion of a definite integral.* (*Proc. Mat. Soc.*, London, 1907.)
49. H. Block, *Sur la solution de certaines équations intégrales.* (*Ark. för Mat. Vet. Academien,* III, 1907.)
50. T. Boggio, *Un théorème sur les équations intégrales.* (R., París, 1907.)
51. E. Bounitzky, *Un système particulier d'équations intégrales.* (*Bull. Sc. Math.*, 1907.)
52. E. Goursat, *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm.* (*Bull. Soc. Math. France,* 1907.)
53. R. d'Adhémar, *Les fonctions implicites de l'éq. int. non linéaire.* (*Bull. Soc. Math. France,* 1907.)
54. E. Goursat, *Sur les équations intégrales.* (C. R., París, 1907.)
55. E. Goursat, *Sur un théorème de la théorie des éq. int.* (C. R., París, 1907.)
56. B. Heywood, *Sur quelques points de la théorie des fonctions fondamentales relatives à certaines éq. int.* (C. R., París, 1907.)

57. A. Korn, *Sur l'éq. fonctionelle de Fredholm.* (C. R., París, 1907.)
58. T. Lalesco, *Sur l'ordre de la fonction entière D.* (C. R., París, 1907.)
59. E. Picard, *Sur une éq. fonct. se présentant dans la théorie de certaines éq. aux dev. partielles.* (C. R., París, 1907.)
60. F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux et l'éq. de Fredholm.* (C. R., París, 1907.)
61. P. Hertz, *Die Integralgleichungen der Electronentheorie.* (*Math. Ann.*, 1907.)
62. E. Levi, *Sulle equazioni integrali.* (*Atti Lincei*, 1907.)
63. L. Orlando, *Sopra alcuna equazione integrali.* (*Atti Lincei*, 1907.)
64. A. Myller, *Sur les éq. int.* (*Bull. Sc. Math.*, 1907.)
65. V. Myller, *Die Integralglechungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen.* (*Math. Ann.*, 1907.)
66. S. Pincherle, *Sull'inversione analitica degl'integrali definiti.* (*Rend. Acc.*, Bologni, 1907.)
67. H. Bateman, *Notes on integral équations.* (*Mess. Math.*, 1908.)
68. H. Bateman, *A formula for the solving function of a certain integral of the second Kind.* (*Mess. Math.*, 1908.)
69. E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne.* (C. R., París, 1908.)
70. E. Goursat, *Recherches sur les éq. int. lin.* (*Ann. Fac.*, Toulouse, 1908.)
71. E. Bonnitzky, *Sur une classe d'équations intégrales.* (*Bull. Sc. Math.*, 1908.)
72. T. Boggio, *Sopra alcune formole fondamentali alle eq. int.* (*Atti Lincei*, 1908.)
73. G. Lauricella, *Sopra alcune equazione differenciale lineari.* (*Atti Lincei*, 1908.)
74. L. Sinigaglia, *Sulle equazione differenciali lineari.* (*Atti Lincei*, 1908.)
75. B. Heywood, *Sur l'équation fonctionelle de Fredholm.* (J. de Liouville, 1908.)
76. T. Lalesco, *Sur l'équation de Volterra.* (J. de Liouville, 1908.)
77. G. Lauricella, *Sulle equazioni integrali.* (*Ann. di Mat.*, 1908.)
78. H. Lebesgue, *Sur le méthode de Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm.* (*Bull. Soc. Mat. France*, 1908.)
79. H. Mercer, *Plemelj's canonical form.* (*Trans. Soc.*, Cabridge, 1908.)
80. L. Orlando, *Sulle equazioni integrali.* (*Giorn. di Baltaglini*, 1908.)
81. S. Pincherle, *Sull'inversione degl'integrali definiti.* (*Mém. di Soc. Mat. It. Sec.*, 1908.)
82. H. Weyl, *Singuläre Integralgleichungen.* (*Math. Ann.*, 1908.)
83. E. Schmidt, *Zur Th. der lin. und. nicht lin. Integralgleichungen.* (*Math. Ann.*, 1908.)
84. J. Schur, *Ueber die characteristischen Wurzeln einer lin. Substitution...* (*Math. Ann.*, 1908.)
85. G. Bratn, *Sur les équations mixtes linéaires.* (C. R., París, 1909.)
86. E. Picard, *Sur une classe de dev. en séries de fonct. fond. se rattachant à certaines éq. fonctionnelles.* (C. R., París, 1909.)
87. E. Picard, *Sur les éq. int. de première espèce.* (C. R., París, 1909.)
88. H. Poincaré, *Sur quelques applications de la méthode de Fredholm.* (C. R., París, 1909.)
89. U. Crudeli, *Contributo alla teoria di certe equazioni funcionali.* (*Atti Lincei*, 1909.)
90. G. Lauricella, *Sull'eq. int. de 1.ª specie.* (*Atti Lincei*, 1909.)
91. S. Pincherle, *Sopra certe equazione integrali.* (*Atti Lincei*, 1909.)
92. V. Volterra, *Sulle equazione integro-differenciali.* (*Atti Lincei*, 1909.)
93. M. Plancherel, *Ueber singuläre Integralgleichungen.* (*Math. Ann.*, 1909.)
94. J. Schar, *Zur Theorie der lin. homog. Int.* (*Math. Ann.*, 1909.)
95. H. Weyl, *Convergenz von Reihen die nach. orth. Funct...* (*Math. Ann*,. 1909.)
96. R. d'Adhémar, *Sur les éq. int. de M. Volterra.* (*Atti IV. Cong.*, Roma, 1909.)
97. L. Orlando, *Sulla risoluzione dell eq. int.* (*Atti IV Cong.*, Roma, 1909.)
98. L. Amoroso, *Ricerche intorno alle eq. int. lin. di prima specie.* (*Ann. di Mat.*, 1909.)
99. H. Bateman, *Notes on integral equations.* (*Mess. of. Math.*, 1909.)
100. A. Chicca, *Sulle eq. int. di Fredholm a nucleo sim.* (*Atti Torino*, 1909.)
101. A. C. Dixon, *The solution of int. eq.* (*Proc. Math. Soc.*, London, 1909.)
102. G. H. Hardy, *On a integral equation.* (*Proc. Math. Soc.*, London, 1909.)
103. P. Saunel, *On Fredholm's equation.* (*Bull. Ann. Math. Soc.*, 1909.)
104. G. C. Evans, *The int. eq. of the second kind of Volterra, with singular Kernel.* (*Bull. Am. Math. Soc.*, 1909.)
105. E. Goursat, *Sur quelques points de la th. der éq. int.* (*Bull. Soc. Math. France*, 1909.)
106. E. Goursat, *Recherches sur les éq. int. lin.* (*Ann.*, Toulouse, 1909.)

107. R. Marcolongo, *La th. des éq. int. et ses appl.* (*Ann.*, Toulouse, 1909.)
108. W. H. Joung, *On bounded not necessarly continous solutions of int eq.* (*The Onaterly F. af Math.*, 1909.)
109. J. Marty, *Transf. d'un dét. infini en un dét. de Fredholm.* (*Bull. Sc. Mth.*, 1909.)
110. J. Mercer, *Fonctions of pos. and. type, and their connection with the theory of. int. eq.* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1909.)
111. J. Mollerup, *Une remarque sur les éq. int. de 1.re espèce.* (*Rend. Pal.*, 1909.)
112. E. Picard, *Sur un théorème général relatif aux éq. int...* (*Rend. Pal.*, 1909.)
113. F. Riesz, *Ueber die lineare homogene Integralgleichung.* (*Math.*, Budapest, 1909.)
114. W. Kapteyn, *Sur l'éq. de Fredholm.* (*Proc.*, Amsterdam, 1910.)
115. A. Blondel, *Sur une éq. fonct. lin.* (C. R., París, 1910.)
116. G. Bratu, *Sur certaines éq. int. non lin.* (C. R., París, 1910.)
117. T. Lalesco, *Sur les noyaux résolvants.* (C. R., París, 1910.)
118. T. Lalesco, *Sur les pôles des noyaux résolvants.* (C. R., París, 1910.)
119. T. Lalesco, *Sur les noyaux sim. gauches.* (C. R., París, 1910.)
120. N. Kryloff, *Sur les dév. procedant suivant les polynomes hypergéométriques.* (C. R., París, 1910.)
121. J. Marty, *Sur une éq. int.* (C. R., París, 1910.)
122. J. Marty, *Dév. suivant certaines solutions singulières.* (C. R., París, 1910.)
123. J. Marty, *Existence des solutions pour certaines éq. de Fredholm.* (C. R., París 1910.),
124. J. Marty, *Valeurs singulières d'une éq. de Fredholm.* (C. R., París, 1910.)
125. P. Lévy, *Sur les éq. int non lin.* (C. R., París, 1910.)
126. E. Picard, *Un théorème général sur cert. éq. int. de 3me espèce.* (C. R., París, 1910.)
127. E. Picard, *Sur une éq. fonct. sing du type Fredholm.* (C. R., París, 1910.)
128. M. Plancherel, *Sur la reprise d'une fonct. arbitraire par une integral definie.* També *Math. Ann. i Rend. Pal.*, C. R., París, 1910.)
129. W. Stakloff, *Sur le dév. d'une fonct. arbitraire en série de fonctions fondamentales.* (Dues notes; C. R., París, 1910.)
130. W. Stekleff, *Sur la condition de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales.* (C. R., París, 1910.)
131. L. Amoroso, *Sulla risolubilità della eq. int. di prima specie.* (*Atti Lincei*, 1910.)
132. L. Amoroso, *Alcune osservazioni intorno alla teoria delle serie di Fourier-Schmidt.* (*Atti Lincei*, 1910.)
133. G. Fubini, *Di alcune nuove classi di eq. int.* (*Atti Lincei*, 1910.)
134. G. Laurocella, *Sull'eq. int di prima specie...* (*Atti Lincei*, 1910.)
135. E. Picone, *Sopra un eq. int. di prima specie a limiti variabili.* (*Atti Lincei;* També, *Rend. Pal.*, 1910.)
136. V. Volterra, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenciali.* (Dues notes; *Atti Lincei*, 1910.)
137. V. Volterra, *Supra le funzioni permutabili.* (*Atti Lincei*, 1910.)
138. E. Cotton, *Equations differentielles et équations intégrales.* (*Bull. Soc. Math. France*, 1910.)
139. G. Fubini, *Eq. int. e valori eccezionali.* (*Ann. di Mat.*, 1910.)
140. A. Landsberg, *Theorie der Elementartheiler Linearen Integral, gleichungen.* (*Math. Ann.*, 1910,)
141. E. Picard, *Sur une classe de fonct. fond. et sur cert. dév. en série.* (*Ann. Ec. Nor.*, 1910.)
142. H. Poincaré, *Remarques diverses sur l'équation de Fredholm.* (*Acta. Math.*, 1910.)
143. G. Evans, *Volterra's int. eq. of the 2nd Kind with discontinous Kernel.* (*Trans. of. Am. Math. Soc.*, 1911.)
144. T. Egoroff, *Théorème sur les suites mesurables.* (C. R., París, 1911.)
145. A. Korn, *Sur une classe importante de noyaux asymètriques,.* (Tres notes C. R., París, 1911.)
146. T. Lalesco, *Théorèmes sur les valeurs caractéristiques.* (C. R., París, 1911.)
147. E. Picard, *Un théorème général sur les éq. int. de 3ème espèce.* (Tres notes, C. R., París, 1911.)
148. E. Picard, *Sur une éq. int. singulaire.* (C. R., París, 1911.)
149. G. Evans, *Sopra l'eq. int. de Volterra, con un limite de l'integrale infinito.* (Tres notes; *Atti Lincei*, 1911.)
150. G. Lauricella, *Sulla resoluzione dell'eq. int di prima specie.* (*Atti Lincei*, 1911.)
151. G. Lauricella, *Sopra i nucli reiterati.* (*Atti Lincei*, 1911.)
152. L. Sinigaglia, *Sulle funzioni permutabili di 2a specie.* (*Atti Lincei*, 1911.)
153. V. Volterra, *Sopra le funzioni permutabili.* (Dues notes; *Atti Lincei*, 1911.)
154. V. Volterra, *Equazioni integro-diff. con lim. constanti.* (*Atti Lincei*, 1911.)
155. J. Horn, *Volterrasche Integralgleichungen und Summengleichungen.* (*Iburn. f. v. n. arg. Math.*, 1911.)

156. H. Hahn, *Bericht über die Th. der lin. Int.* (*Fahres berocht der deuts. Math. Ver.*, 1911.)
157. T. Lalesco, *L'étude des noyaux résolvants* (*Bull. Soc. Math. France*, 1911.)
158. A. F. Pell, *Biorth systems of fonctions.* (*Trans. Ann. Math. Soc.*, 1911.)
159. E. Picard, *Sur les éq. int. de 3^me^ espèce.* (*Ann. Ec. Nor.*, 1911.)
160. E. Picard, *Sur un ex. simple d'eq. sing. de Fredholm* (*Ann. Ec. Nor.*, 1911).
161. H. Weyl, *Die Vestheilung der Eigenwerti.* (*Gött. Nach.*, 1911.)
162. H. Weyl, *Ueber die Abhängigkent der Eigenschwingeingen...* (J. Crelle, 1912.)
163. R. Jentzsch, *Ueber Integralgleichungen mit positivem Kern.* (J. Crelle, 1912.)
164. R. Weitzenböck, *Ueber Schiofsymmetrische Funktionen.* (*Rend. Pal.*, 1912.)
165. P. Lévy, *Sur les éq. aux der. foret. et leurs appl. à la Physique Math.* (*Rend. Pal.*, 1912.)
166. P. Lévy, *Sur la fonction de Green ordinaire et...* (*Rend. Pal.*, 1912.)
167. G. Evans, *L'Algebra delle funzioni perm. e non perm.* (*Rend. Pal.*, 1912.)
168. G. Buckt, *Ueber nichtlineare Integralgleichungen mit unverzwedgten Lösungen.* (*Arkiv. För Mat. Astr. och Fysik*, 1912.)
169. J. Mercer, *Sturm-Lionville Series of Normal Functions in the Theory of Int. Eq.* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. 211, London, 1912.)
170. V. Volterra, *Sur les éq. intégro-diff. et leurs appl.* (*Acta Math.*, 1912.)
171. D. Hilbert, *Begründung der elementaren Strahlungstheorie.* (*Gött. Nach.*, 1912.)
172. A. Korn, *Eine Th. der lin. Int. mit unsymmetrischen Kernen.* (*The Tôhokn Math. Journal*, 1912.)
173. P. Lévy, *Sur les éq. intégro-diff. de M. Hadamard.* (C. R., París, 1912.)
174. E. Vessiot. *Sur les groupes fonctionels et éq. intégro-diff. lin.* (C. R., París, 1912.)
175. H. Lebesgue, *Sur le problème de Dirichlet.* (C. R., París, 1912.)
176. Ch. Platrier, *Contribution à un théorème sur les éq. int. de Fredholm de 3^me^ espèce.* (C. R., París, 1912.)
177. P. Browne, *Sur quelques cas singuliers del'éq. de Volterra.* (C. R., París, 1912.)
178. P. Browne, *Sur quelques éq. fonctionnelles.* (C. R., París, 1912.)
179. P. Browne, *Sur le problème généralisé d'Abel et ses applications.* (Dues notes; C. R., París, 1912.)
180. L. Amoroso, *Sopra una'extensione del teorema de Riesz-Fisher.* (Tres notes; *Att. Lincei*, 1912.)
181. L. Amoroso, *Sopra un'eq. integro-diff. del tipo paraboleco.* (Tres notes, *Atli Ltncei*, 1912.)
182. L. Amoroso, *Sopra l'existenza di alcuni sistemi equinormali-ortogonali.* (Dues notes; *Atti Lincei*, 1912.)
183. G. Evans, *Sull'eq. integro-diff. di tipo parabolico.* (Dues notes; *Atti Lincei*, 1912.
184. G. Fubini, *Sulle eq. int. di terza specie di E. Picard.* (*Atti Lincei*, 1912.)
185. N. Giorgi, *Sulla teoria delle eq. int. generalizzate.* (Dues notes; *Atti Lincei*, 1912.
186. G. Lauricella, *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle eq. int.* (Dues notes, *Atti Lin cei*, 1912.)
187. G. Lauricella, *Sulla risoluzione delle eq. integro-diff. dell'equilibrio dei corpi elastici...* (*Atti Lincei*, 1912.)
188. L. Orlando, *Sull'integrabilità delle funzioni di due variabili.* (*Atti Lincei*, 1912.)
189. V. Volterra, *Vibrazione elastiche nel caso dell'eredità* (Dues notes; *Atti Lincei*, 1912.)
190. S. Pincherle, *Sulle operazioni lin. e sulla teoria dell'eq. int.* (*Atti Lincei*, 1912.)
191. L. Sinigaglia, *Sulle funzioni permutabili di 2.ª specie.* (Dues notes; *Atti Lincei*, 1912.)
192. V. Soula, *Sur la permutabilité de 2^me^ espèce.* (*Atti Lincei*, 1912.)
193. O. Toeplitz, *Die Integralgleichungen und ihre Anuendungen.* 1913.)
194. L. Andreoli, *Sulle eq. int.* (*Atti Lincei*, 1913.)
195. J. Pérès, *Sulle eq. int.* (*Atti Lincei*, 1913).
196. L. Sinigaglia, *Sulle eq. int.* (*Atti Lincei*, 1913.)
197. V. Soula, *Sulle eq. int.* (*Aitt Lincei*, 1913.)
198. G. Evans, *Sul calcolo della funzione de Green per le equazione diff. e integrodiff. di tipo parabolico.* (Dues notes; *Atti Lincei*, 1913.)
199. P. Silla, *Sui sistemi di eq. int. di prima specie.* (*Atti Lincei*, 1913.)
200. V. Volterra, *Sui fenomeni ereditari.* (Dues notes; *Atti Lincei*, 1913.)
201. V. Volterra, *Sopra eq. integro-diff. aventi i limiti constanti.* (*Atti Lincei*, 1913.)
202. F. J. Rubio, *Teoría elemental de las eq. int. e idea de sus aplicaciones.* (*Tesis doctoral*, Madrid, 1913.)
203. J. Pérès, *Résolution des problèmes aux limites relatifs à une éq. intégro-diff de M. Volterra.* (*Rend. Pal.* 1913.)

204. D. Pompein, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur cértaines éq. int.* (*Rend. Pal.*, 1913.)
205. D. Pompein, *Sur une éq. int.* (*Math. Ann.*, 1913.)
206. J. Pérès, *Determination de toutes les fonctions permutables de 1e espèce avec une fonction donnée.* (C. R., París, 1913.)
207. L. Lichtenstein, *Sur les fonct. fond...* (C. R., París, 1913.)
208. N. Kryloff, *Sur quelques propriétés des éq. int. à noyau non symétrique.* (C. R., París, 1913.)
209. Ch. Platrier, *Sur des solutions holomorphes et méromorphes de certaines éq. int. lin. de 3me espèce.* (Dues notes; C. R., París, 1913.)
210. A. Korn, *Sur les éq. int. à noyau symétrique.* (C. R., París, 1913.)
211. F. S. Zarlatti, *Sur quelques éq. int. singulaires.* (C. R., París, 1913.)
212. E. Goursat, *Sur quelques éq. int. singulaires.* (C. R., París, 1913.)

F. J. Rubio

Universitat, Oviedo.

ELS NOUS TREBALLS D'EMILI FISCHER SOBRE L'ESTRUCTURA QUÍMICA DEL TANÍ

Emil Fischer, el gran químic alemany, acaba de publicar un resum d'una serie de treballs que fan donar a la química biològica un nou pas de gegant. (1)

L'assumpte aquest cop és la investigació de l'estructura química del taní.

El procediment és ben séu: els cossos d'una fórmula química que no pot ésser derivada de les seves reaccions, els descompòn en els séus grups constituients, per hidrolisi; i, un cop aquests compostos, va lligant-los per síntesi i estudiant les propietats d'aquests nous cossos.

Donarem un esboç del procés d'aquest estudi admirable i dels resultats que n'ha obtingut.

Composició del taní

Material. De moment, tenim de partir d'un cos de composició constant i lliure de bruticies; per a conseguir-ho fa servir un procediment nou de neteja del taní: el taní de millor qualitat del comerç es disolt en solució aquosa alcalina lleugerament sobressaturada i extreu el taní d'aquesta solució per medi de l'èter acètic; d'aquesta

(1) Emili Fischer *Síntesi dels dépsids, substancies del liquen i substancies dels grupus del taní* (Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft).