Una representació en l'espai dels feixos de còniques planes

I. El feix de còniques damunt d'una quàdrica

§ 1. — La definició ordinaria de feix de còniques en un pla és el conjunt de còniques tals que dos punts conjugats respecte de dues qualsevulga d'elles, ho són respecte de totes les altres del feix (Torroja, Standt, Steiner, Reye). Així dos punts comuns a dues d'elles, essent conjugats d'ells mateixos respecte d'aqueixes dues, són també conjugats d'ells mateixos respecte de totes les altres, i per això comuns a totes elles. Aquests punts no poden ésser més de quatre diferents. Si solament són tres, totes les còniques del feix són tangents a una mateixa recta que passa per un d'ells; si dos solament, es poden distingir dos casos: o totes les còniques del feix són tangentes a dues rectes que passen per aquests dos punts; o en l'un d'ells totes les còniques tenen un contacte osculatriu de segón ordre; per fi, si les còniques del feix no tenen més que un punt comú, tenen en aquest punt un contacte sobreosculatriu de tercer ordre (1).

En endavant no farem cap distinció entre'ls elements propis o impropis, reals o imaginaris, soposant coneguda l'extensió que les modernes teoríes han concedit a l'antiga idea de punt, recta i pla (2), i fins d'altres figures i formes de grau i ordre superior.

§ 2. — Suposat, doncs, un dels quatre primers casos, podrem unir amb rectes dos qualsevol dels punts d'intersecció, A i B de les dues còniques, amb un punt exterior O

(1) Standt, *Geometrie der Lage*, Beiträge, § 13-22-23-24.

(2) Standt, *Beiträge der Geometrie der Lage*, § 1 al 21. També Torroja, *Geometría de posición*. Moritz Pasch, *Lliçons de Geometría moderna*, traduides al castellà per Álvarez Ude i Rey Pastor.

al llur pla π; i per aquestes dues rectes $OA=a$, i $OB=b$ traçar una superficie de segón ordre que les contingui com a generatrius de diferent sistema.

Si del mateix punt O projectem qualsevulga de les còniques del pla π que passen pels punts A i B, el con projectant tallarà la superficie de segón ordre o quàdrica construida, segons les dues generatrius a i b; i puix és con de segón ordre, ha de tallar també segons altra cònica, puix el conjunt de la intersecció ha d'ésser de quart grau. Aqueixa cònica pot dir-se impropiament la projecció de la primera cònica del pla π donat en la quàdrica proposada (el contrari és més cert); són homològiques, essent O el centre d'homología, i la recta d'intersecció dels seus plans l'eix d'homología. Així mateix, la projecció del punt O com a centre de qualsevulga secció plana de la quàdrica damunt el pla π considerat, és una cònica que passa pels punts A i B, que són les traces en el pla de projecció π de les dues generatrius a i b que passen per O.

§ 3. — Si projectem dues còniques del feix que considerem, obtindrem damunt de la quàdrica dues còniques en diferents plans, els quals es tallaràn segons una recta e. El feix de plans que passa per aqueixa recta e, talla la quàdrica segons còniques, que passen totes pels dos punts C_1 i D_1 d'intersecció de la recta e amb la quàdrica, si e és secant; o són tangents a aqueixa recta e, si e és tangent a la quàdrica, en el mateix punt de contacte amb la superficie. La projecció de les còniques de la superficie quàdrica que passen per C_1 i D_1 damunt del pla π primitiu, serà un conjunt de còniques passant pels dos punts A i B, i així mateix pels punts C i D, projeccions dels punts C_1 i D_1 d'intersecció de e amb la quàdrica; o seràn tangentes a la projecció de e damunt el pla π donat, quan e ho sigui a la quàdrica, essent el punt de contacte del feix en el pla π, la projecció de O, del punt de contacte de l'eix e amb la quàdrica. Si els punts C_1 i D_1 són damunt les generatrius a i b, totes les còniques que hi passen, situades a la quàdrica, són tangents als plans tangents en C_1 i D_1 a la superficie, els quals plans passen per a i b; i així les projeccions damunt el pla π donat, seràn tangents a les interseccions d'aqueix pla π amb els plans tangents en C_1 i D_1 considerats; essent A i B en aqueix cas les projeccions de C_1 i D_1, les còniques del feix en el pla π donat són *bitangents*. Seríen senzillament tangents en el punt A o en el B, si solament un punt C_1 o D_1 estés damunt la generatriu a o la b.

§ 4. — Suposat, en canvi, un qualsevol dels quatre últims casos del § 1, fem passar pel punt de contacte A de les còniques (o per un qualsevol dels dos, si aquestes són bitangents) una recta a qualsevulga fòra del pla π del feix; i prenent un punt V qualsevol d'eixa recta a com a vèrtex, fem passar un con qualsevol tangent en A a les còniques del feix pla π. Els cons projectants, del punt O qualsevol de VA com a centre de projecció, de les còniques del feix tallen el con V, segons la generatriu VA (de contacte dels dos cons V i O), i a més segons el conjunt de còniques que passen per les interseccions C_1 i D_1 de les rectes OC i OD amb el con V, essent C i D els altres dos punts d'intersecció de les còniques del feix pla π, o segons la generatriu VA i el conjunt de còniques tangents en B_1, amb una recta tangent al con V, quan les còniques del feix pla π són bitangents en A i B. Si les còniques del feix pla π tenen en A un contacte osculatriu de segón o tercer ordre, les projeccions de O damunt del con V són també un conjunt de còniques col·locades damunt de plans, i llur recta d'intersecció *e* talla la generatriu VOA, i en el primer cas és secant i en el segón tangent al con V en un punt d'aqueixa generatriu.

§ 5. — Així hem obtingut la substitució del feix pla π per un feix de còniques col·locades damunt d'una superficie de segón ordre, obtingudes per la intersecció d'aqueixa amb els plans d'un feix de primer ordre. Aqueix feix pot ésser secant o tangent, segons el seu eix *e* sigui secant o tangent a la superficie. Aquests feixos de còniques en l'espai hagueren pogut ésser considerats independentment de les consideracions de què ens hem valgut per obtenir-los. Sols per mor de deixar de primer antuvi establerta la relació que lliga els feixos de còniques plans amb els de còniques damunt una superficie de segón ordre, hem fet les observacions anteriors. De les quals resulta que *la projecció d'un punt* O *d'una superficie de segón ordre d'un feix de còniques damunt d'aquella, en un pla π qualsevol, és un feix pla de còniques que passen per les traces de les generatrius que passen per* O *i per les projeccions dels punts d'intersecció de l'eix* e *del feix amb la superficie.* Alguns d'aquests punts es poden confondre segons els casos. Aquest teorema és el recíproc dels que's troben en §§ 2, 3 i 4. Anem, doncs, mitjançant eixa representació o consideració dels feixos simples de còniques damunt d'una superficie de segón ordre, a la demostració dels teoremes més importants corresponents als feixos plans simples de còniques (1).

II. Les propietats projectives

§ 6. — Posem, doncs, una quàdrica i un feix de plans que la talla en un feix de còniques. Una recta *a* qualsevulga de l'espai que no talla l'eix *e* del feix, és tallada pels plans d'aquest segons una alineació projectiva amb el feix dels mateixos. Els

(1) No's tracta, doncs, més que d'una substitució semblant a la que's fa en Geometría de Posició, estudiant les formes projectives i involutives de primera categoría, mitjançant formes damunt de còniques i feixos no desenrotllables de rectes en l'espai. En alguns casos se simplifiquen molt les demostracions; en altres no és així. L'estudi d'aquests feixos, que en el cas de l'esfera es troba en Rouché et Comberousse, s'oferí llegint les *Consideracions geomètriques* (Einige Geometrische Betrachtungen. Jour. de Crelle, I, 1826) de Steiner. La representació dels rets de còniques en el cas general, és més difícil, i en tractarem, si Deu vol, en altre estudi, del qual aquest és preliminar necessari.

punts d'intersecció tindràn per rectes polars respecte de la cònica en el pla de la qual es troben, les interseccions dels seus plans polars respecte de la quàdrica amb els mateixos plans en què es troben. Mes els primers plans passen tots per la recta *a'*, polar, respecte de la superficie de la recta *a* considerada, i també són projectius a l'alineació. Les rectes, doncs, polars que busquem són les interseccions de dos feixos de plans, d'eixos *e* i *a'*, projectius a la mateixa alineació *a*; per això formen un *feix no-desenrotllable* (1) de segón ordre, projectiu amb el feix de plans de les còniques, les directrius del qual són l'eix *e* del feix i la polar *a'* de la recta *a* donada respecte de la quàdrica. Si aqueixes rectes *e* i *a'* es tallen, el feix de polars serà cònic radiat; això passarà quan la recta *a* donada talli la polar *e'*, de l'eix *e* del feix de còniques.

Mes si *a* talla el mateix eix *e*, estarà damunt d'un sol dels plans α d'aqueix, en el qual tindrà un pol A; el feix de polars es redueix aleshores a dos feixos plans de rectes de primer ordre: el primer, col·locat en el pla α de la recta *a* i de l'eix *e*, i té per centre el pol A de la recta *a*, respecte de la cònica en què talla a la quàdrica el pla α que passa per ella, i el segón, el col·locat en el pla polar α'_1, respecte de la quàdrica, del punt d'intersecció A_1 de la recta *a* donada amb l'eix *e*, i té per centre el punt d'intersecció B de l'eix *e* amb el susdit pla α'_1; aquests dos feixos de rectes de primer ordre, també són projectius amb el feix de plans d'eix *e*, determinatiu del feix de còniques damunt de la quàdrica.

§ 7. — Un pla qualsevol π talla els plans del feix segons un feix de rectes de primer ordre, perspectiu al feix de plans determinatiu del feix de còniques que considerem; així mateix serà un feix de rectes de primer ordre, projectiu amb el feix de plans, el de les polars, respecte de la quàdrica d'aquelles rectes d'intersecció de π amb los plans del dit feix determinatiu. Totes aquestes polars passaràn pel pol P' del pla π donat, i estaràn en el pla polar π' del punt d'intersecció P del pla π considerat amb l'eix *e*. Les interseccions d'aqueixes polars amb el pla del feix *e* determinatiu que li correspòn, perquè conté la seva polar (o sia amb el pla que passant per *e* és conjugat a la polar), formen, doncs, una cònica, lloc geomètric dels pols, respecte de les còniques del feix, de les rectes d'intersecció dels seus plans respectius amb el pla π considerat.

Ja hem dit que aquesta cònica és en el pla π', polar del punt d'intersecció P del pla π considerat amb l'eix *e*; afegim que passa pel pol P' del pla π respecte de la quàdrica i pel punt d'intersecció Q amb l'eix *e* del pla polar π' de P. Si el pla π passa per l'eix *e*, la cònica es redueix a sols la recta *e'* polar de l'eix *e*.

---

(1) Hem estimat més aqueixa denominació, encara que negativa, que la d'*alabeat* (castellanisme) o *esquerrà* (gal·licisme), car la idea d'aquests eixams de rectes és negativa.

§ 8. — Canviant el pla π, considerat en l'anterior § 7 obtindrem un número triplement infinit de còniques, llocs geomètrics dels pols, respecte de les còniques d'intersecció dels plans del feix e amb la quàdrica, de les rectes d'intersecció dels mateixos plans amb tots els distints plans de l'espai. Totes aquestes còniques passen pels punts d'intersecció M i N de la polar e' de l'eix e amb la quàdrica; puix els plans que passen per dits punts M i N i l'eix e', $Me=\mu$ i $Ne=\nu$, tallen la superficie segons una parella de rectes cada hu, que passen per M i N i pels dos punts K i L d'intersecció de l'eix e amb la quàdrica, i, per això, els pols, respecte d'aqueixes còniques degenerades en un parell de rectes, de la recta d'intersecció d'un pla π qualsevol amb el $Me=\mu$ o el $Ne=\nu$, es redueix senzillament als punts M i N, com havíem de provar. Però a més, hem vist en el § 7 que la cònica passava per Q, punt d'intersecció amb l'eix e del pla polar π' de $P=(\pi e)$; totes les còniques, doncs, tallen l'eix e del feix; així, doncs, són subjectes a cinc condicions necessaries; també són suficients: puix les còniques en l'espai tenen vuit graus de llibertat (tres del pla en què es troben i cinc en el mateix pla); si, doncs, fixem cinc condicions, queden tres sols graus de llibertat o sia un sistema triplement infinit, com havíem de trobar.

Les superficies de segón ordre no-desenrotllables considerades en el § 6, corresponents a totes les rectes de l'espai, passen per l'eix e del feix que és una directriu comú de totes elles, i també pels punts M i N; com provaríem igualment que en el cas anterior, buscant les polars en els plans $Me=\mu$ i $Ne=\nu$ de qualsevol punt d'intersecció de qualsevulga recta amb els mateixos plans μ i ν. Cinc condicions que redueixen a quatre els nou graus de llibertat d'una quàdrica o superficie de segón ordre no-desenrotllable en l'espai; aquests quatre graus corresponen als quatre d'una recta qualsevulga de l'espai. Aquestes cinc condicions són, doncs, també necessaries i suficients. La discussió del problema invers als dels §§ 6 i 7, que en aquest apuntem, és més propia, quan es tenen més conegudes les propietats generals dels feixos, rets i complexos de còniques i quàdriques; aquí solament convé apuntar-les per indicar la orientació de la teoría que expressem.

§ 9. — Fins aquí hem considerat el feix de còniques, en l'espai general, amb l'eix e secant en dos punts distints K i L a la quàdrica-base del feix. Si l'eix e no és secant, sinó tangent a la superficie, el feix és de còniques tangents. Les superficies no-desenrotllables, considerades en els §§ 6 i 8, són tangentes a la quàdrica en el punt de contacte E de l'eix e del feix amb aquella; puix si anomenem e_1 i e_2 les dues generatrius de diferent sistema en la quàdrica-base, que passen pel seu punt E, en el pla ε, tangent en E, tindrem un feix armònic $(e_1 e_2 e e')$, i qualsevulga que sia la recta a que considerem, segons el § 6, la polar del seu punt P d'intersecció amb el pla ε, que passa per e, respecte a la cònica degenerada en dugues rectes, e_1 i e_2, segons les quals ε talla la quàdrica-base, és la recta m armònica-conjugada de EP respecte de e_1 i e_2; així, doncs, la superficie no-desenrotllable, corresponent a la recta a (§ 6), passa per E, tenint en aquest punt la recta e com a directriu i la m com a generatriu, i totes dugues rectes e i m són en el pla ε, que, per això, serà tangent també a la superficie no-desenrotllable corresponent a la recta a, segons volíem provar. Això solament implica una condició, el passar per e tres condicions, quatre, en total; una menys que en el § 8. Necessitem, doncs, un altra nova condició; ¿quina és aqueixa? Cal afegir la de què la serie o alineació damunt de la recta e dels punts de contacte dels plans tangents a la superficie no-desenrotllable que passen per e (o sia dels plans del feix e determinatiu) i la serie damunt de la recta e' dels pols dels mateixos plans, respecte de la superficie quàdrica-base del feix, siguin perspectives (això passarà sempre, qualsevulga que sigui la superficie no-desenrotllable que passi per e i sia tangent en E al pla ε, puix el punt E és un punt doble d'aqueixes dugues series e i e' considerades) i *el centre* O *de perspectivitat de les mateixes estiguin damunt la superficie no-desenrotllable.* Efectivament: aqueixes dugues series en e i e' de què parlem, són la intersecció de les seves bases amb els plans polars de diferents punts en què la recta a talla els plans del feix e determinatiu, car aquests plans, per ésser polars dels punts de a, contenen les polars d'aquests punts, respecte de la cònica en què talla la quàdrica el pla del feix e determinatiu que passa per ells (§ 6) i tallen e (que és l'eix del segón feix de plans projectiu al d'eix d'a' per formar el feix no-desenrotllable del § 6) segons la serie dels punts de contacte dels plans del feix e amb la superficie no-desenrotllable que considerem; i per ésser polars de punts col·locats damunt dels plans del feix e, han de passar pels pols d'aqueixos plans, col·locats damunt de la recta e' polar de e. Aquest feix de plans té per eix la recta a', polar de a respecte de la quàdrica-base. La intersecció O d'aquesta recta a' amb ε (pla que conté e i e') serà el centre perspectiu de les series e i e' considerades. El pla polar, respecte de la quàdrica, de O, per ésser O punt de a' passa per a, i per ésser O punt de ε passa per E; és, doncs, el pla Ea. La polar de EO serà la recta que passi per E i pel punt P d'intersecció de a amb ε, i les rectes (e_1 e_2 EO EP) formen un feix armònic. Pel que hem dit al principi d'aquest paragraf EO serà la recta m conjugada armònica de EP respecte de e_1 i e_2. Si O, doncs, és damunt de m, generatriu de la superficie no desenrotllable, és damunt d'aqueixa com volíem provar. Aquesta és, doncs, la quinta condició que necessitàvem per conèixer quan una superficie de segón ordre no-desenrotllable que passi per e i sigui tangent en E a ε correspòn, segons el § 6, amb una recta de l'espai desconeguda.

§ 10. — En aquest mateix cas d'ésser l'eix e del feix damunt de la quàdrica tangent a aquesta, podem considerar les condicions satisfetes per les còniques dels §§ 7 i 8. Són totes tangentes a la polar e' de l'eix e en el llur punt E de contacte amb la quàdrica. Això són quatre condicions i, com en el § 8, en necessitem una més per a poder afirmar que una cònica tangent a la polar e' del eix e d'un feix de còniques tangents damunt d'una quàdrica és lloc geomètric dels pols d'un feix de rectes perspectiu al dels plans determinatius respecte de la cònica d'intersecció d'aquests amb la superficie-base. Cal, doncs, afegir que *l'alineació dels pols dels plans determinatius damunt de* e' *i la serie de segón ordre que damunt de la cònica que ens proposen determinen els mateixos plans determinatius, siguin projectives* (ho seràn sempre que la cònica proposada sigui tangent en E a e'), *i perspectives al mateix feix de rectes de primer ordre, el centre* O *del qual es trobarà damunt de la cònica.* Aquest centre O serà el pol del pla ω' que conté el feix de rectes que busquem, corresponent a la cònica proposada. Efectivament: pel § 7, la cònica ha de pasar pel pol O del pla ω', i és el lloc geomètric dels punts d'intersecció dels plans del feix e determinatiu amb les polars de les rectes d'intersecció d'aquests mateixos plans amb ω', polars que passen per O, pol de ω', i col·locades damunt d'un pla $\varkappa'$ que passa per e' polar de l'eix e, puix e conté el centre K del feix de rectes d'intersecció de ω' amb els plans del feix e determinatiu. ¿No és, doncs, clar que les polars que passen per O en el pla $\varkappa'$ de les rectes d'intersecció de ω' amb els plans del feix e determinatiu, han de contenir els pols d'aqueixos plans que passen per les seves polars? I puix els plans passen per e, els seus pols són damunt de e' polar de e. Aquests pols, doncs, són la intersecció amb e' del feix, de centre O i en el pla $\varkappa'$, de les polars de les rectes del feix de centre Q i en el pla ω'. A més aquest feix, de centre O en el pla $\varkappa'$, és projectiu al feix de plans e i al de rectes d'intersecció d'aquests amb $\varkappa'$, els quals determinen la cònica proposada segons el § 7. Verament, doncs, el feix de centre O en el pla $\varkappa'$ talla la cònica proposada i a la polar e' de l'eix e del feix en dugues series de punts, una de segón ordre i altra de primer, projectives; i com que la primera és la mateixa en què el feix e de plans determinatius talla la cònica proposada (§ 7), queda demostrat que la serie dels pols dels plans del feix e determinatiu, damunt de la polar e' de l'eix e, i la de segón ordre damunt de la cònica proposada que determinen els mateixos plans del feix e (puix el seu eix e talla la cònica en el punt E), són perspectives a un mateix feix de rectes de primer ordre, *el centre del qual es troba damunt de la cònica proposada.*

Com a exercici d'aquesta teoría, proposarem, segons la introducció, els teoremes més coneguts de la teoría dels feixos de còniques plans.

III. Aplicació als feixos plans de còniques

§ 11. — *Una recta qualsevulga* s *situada en el pla* π *d'un feix pla de còniques, talla a aquestes en parelles de punts en involució* (Desargues). *Les involucions formades en les diferents rectes del pla són projectives* (1).

Projectant la recta s del punt O (§ 2) com a centre, obtindrem un pla Os que tallarà la superficie-base del feix en l'espai, segons una cònica tallada pel feix de plans determinatiu e segons una involució projectiva amb aquest feix, essent el punt d'intersecció P de l'eix e del feix en l'espai amb el pla Os el centre involutiu. Com que aqueixa cònica passa per O, punt de la quàdrica-base i del pla Os, projectant de O com a centre l'involució trobada, obtindrem un feix de rectes de primer ordre involutiu, projectiu del feix de plans determinatiu, el qual feix tallarà la recta s segons una involució; i com que les còniques del feix damunt de la quàdrica són perspectives o homològiques de les còniques del feix pla, els punts d'intersecció de la recta s amb les còniques del feix pla, són les projeccions de O com a centre dels punts d'intersecció del pla Os amb les còniques del feix damunt de la quàdrica, que són els punts d'intersecció amb les rectes del feix de centre P en el pla Os, de la cònica d'intersecció del pla Os amb la quàdrica; així, doncs, la involució que hem trobat damunt de s, projectant de O com a centre, la involució en la cònica d'intersecció del pla Os amb la quàdrica-base és la mateixa que formen els punts d'intersecció de s amb les còniques del feix pla; i puix la involució del feix, de centre O en el pla Os, és projectiva amb el feix de plans determinatiu, també ho serà la involució damunt de la recta s perspectiva de la primera.

Així apareix ben clar un concepte que sembla un xic fosc en els sistemes simples de còniques en un pla o sia: ¿quines són les formes geomètriques de primer ordre projectives amb les de segón ordre? La resposta serà senzilla si ens servim de la representació del feix en l'espai (V. la nota al peu del § 5); puix no és sinó que els feixos de còniques són projectius al feix de plans determinatiu i a totes les formes que li són projectives. Són així mateix projectius dos feixos de còniques quan són projectius els seus feixos de plans determinatius.

§ 12. — Si busquem les polars d'un mateix punt qualsevol H respecte de les curves d'un feix pla de còniques, trobarem que formen un feix de rectes (Lamé) de primer

(1) Dugues involucions es diuen *projectives* quan ho són els feixos de rectes que les determinen damunt d'una cònica. Aqueixa definició procedeix d'un teorema que diu: «Les series d'elements armònics-conjugats, respecte dels parells d'elements corresponents d'una forma involutiva, d'un element qualsevol de la base de la involució, són projectives entre elles i al feix (o serie) definidor de la involució damunt una cònica.» V. els Tractats de G. de P.

ordre, projectiu del feix de còniques. Puix unint el punt H amb el punt O, trobarem que el conjunt de polars que busquem de H respecte de les còniques del feix pla, són les projeccions de O com a centre de les polars dels diferents punts d'intersecció de la recta HO amb els plans del feix determinatiu, respecte de les còniques d'intersecció dels mateixos plans corresponents amb la quàdrica-base; la raó és la de sempre, o sia la homologia entre les còniques del feix pla i les del feix en l'espai, essent O el centre d'homologia. Mes aqueixes segones polars (§ 6) formen un feix de rectes de segón ordre no-desenrotllable, que té per directrius l'eix e del feix i la polar l' de HO respecte de la superficie-base; a més aquest feix no-desenrotllable passa pel punt O; puix la polar del punt d'intersecció O, de la recta considerada HO, amb el pla Oe del feix determinatiu que passa per O, respecte de la cònica del feix en què talla aquest pla Oe a la superficie-base, per ésser O punt de dita cònica (ja que si és de la superficie i del pla Oe, és punt de la cònica d'intersecció) serà la tangent t en O a dita cònica del feix. Així, doncs, les polars de H que busquem, respecte de les còniques del feix pla π, passen pel punt H′ d'intersecció amb el pla π de la recta OH′, generatriu (millor directriu) del mateix sistema que e i h' de la superficie que conté el feix no-desenrotllable de polars dels punts de OH; car les polars que busquem són les projeccions de rectes que totes tallen OH′, directriu del feix no-desenrotllable que passa per O, com hem dit; passaràn, doncs, totes per H′, traça de OH′, damunt del pla π del feix.

§ 13. — El feix de polars que passa per H′, del punt H, respecte de les còniques del feix en el pla π, és projectiu amb el feix no-desenrotllable de les polars dels punts de la recta OH, respecte de les còniques del feix, damunt la quàdrica-base, car aquests dos feixos de rectes, un de primer ordre i l'altre de segón, no-desenrotllable, són perspectius al mateix temps al feix de plans que passa per OH′ com a eix. Mes aquest feix no-desenrotllable de polars és així mateix perspectiu, i en conseqüencia projectiu amb el feix de plans determinatiu, puix l'eix e d'aquest és una de les directrius d'aquest feix no-desenrotllable de polars; el feix, doncs, que té de centre H′, és projectiu amb el feix de plans e determinatiu. El mateix diríem de qualsevol punt del pla π, com hem dit del punt H: queda, doncs, provat que els feixos de polars dels punts del pla π, respecte de les còniques del feix pla considerat, *són projectius entre ells*, puix ho són al mateix feix de plans e determinatiu. Aqueixa relació projectiva defineix, com ja hem dit, el valor projectiu dels feixos simples de còniques.

Dos casos particulars convé distingir: 1.er si el punt H pertany a la recta AB, la recta h=OH serà tangent a la quàdrica-base, puix serà en el pla de les generatrius a=OA i b=OB que passen per O. El punt H′ és l'armònic conjugat de H respecte de A i B; i les rectes OH′ i h' són, en aquest cas, una sola recta armònica conjugada de la h respecte de a i b. El feix no-desenrotllable de polars, si h' no talla l'eix e del feix de plans determinatiu, no's redueix en aquest cas, encara que ens estalvíem el tenir de trobar la generatriu (o directriu del feix no-desenrotllable de polars) del mateix sistema que l'eix e i la polar h' de h, puix la h' és ja eixa directriu que buscàvem o sia la recta OH'. Si el punt H considerat és el punt A (o el B), el feix de polars és el feix de tangents en dit punt A a les còniques del feix. Heusaquí un altre procediment per definir el valor projectiu d'un feix de còniques; si volguéssim trobar les tangents en els punts B, C i D d'una cònica que passa per ells i per A, donada la tangent en aquest últim punt, vindríem a trobar el mateix procediment que's dóna al principi de la definició de les còniques per lloc geomètric dels punts d'intersecció de dos feixos projectius. El segón cas particular és quan el punt H es troba damunt de CD; en aquest cas aplicaríem ço que hem apuntat al final del § 6 i trobaríem resultats semblants als del primer cas. No cal, doncs, que hi insistim més.

§ 14. — Es clar que si H' és el centre del feix de polars del punt H, respecte de les còniques del feix pla π, així mateix H és el centre del feix de polars de H'. ¿Quan deixarà d'ésser unívoca aquesta correspondencia? Pel que tenim exposat al final del § 6, respecte de la transformació del feix no-desenrotllable de polars dels punts d'una recta, quan aqueixa talla l'eix del feix en l'espai, es veu clar que la correspondencia deixa d'ésser unívoca el punt R, projecció, damunt del pla π, del d'intersecció R_1 de l'eix e amb el pla OAB, tangent en O a la superficie-base; car solament R_1 és el punt de l'eix e que té el pla polar passant per O, i per això és l'únic punt de e amb els dos plans de polars (final del § 6) passant per O: no trobarem, doncs, un feix de polars, sinó solament una polar r' pel punt R, intersecció amb el pla π del pla p'_{-1} polar de R_1 respecte de la superficie-base del feix en l'espai. Puix que R_1 és la intersecció de l'eix e $(=C_1D_1)$ amb el pla Oab (=OAB), el punt R, projecció de R_1 de O com a centre, serà la intersecció de AB i de CD, projecció de C_1D_1. Mes aqueixa inducció, com es veu, no és general; solament per analogía podríem trobar els altres dos punts P (=AC, BD) i Q (=AD, BC), diagonals del quadràngul complert ABCD. Seguirem una marxa millor i més analítica. Hem observat en el § 6 que el feix no-desenrotllable de polars, propi d'una recta a, té per directrius l'eix e i la polar a' de a respecte de la quàdrica-base: quan aqueixes dues rectes es tallen, el feix de polars és cònic o radiat, té per centre el punt d'intersecció M de e i a', i conté, a més d'aquestes dues rectes, els quatre punts en què tallen la quàdrica-base les rectes a i e' polar de l'eix e. Aquests quatre punts són en un pla μ', puix si a' i e es tallen en M, també es tallaràn les seves polars a i e' en el pla polar μ' de M, i així mateix, nomenant ν' el pla que passa per e i a', N, pol de ν' respecte de la quàdrica-base, serà el punt d'intersecció de a i e', polars de a' i e respectivament. El feix cònic passa, com hem dit, per O, un dels punts d'intersecció de *a* amb la quàdrica-base pel cas que tractem de resoldre. Si doncs totes les polars se confonen en una sola recta *p*, el pla O*p* ha de contenir totes les polars dels punts de O*p*, respecte de les còniques d'intersecció amb la quàdrica-base dels plans del feix *e* que passen per dits punts de OP. El feix no-desenrotllable de polars es converteix en dos plans, i com que ja hem descomptat el cas que la recta *a* talli l'eix *e* (la qual cosa ens ha donat el punt R) queda el cas que'l feix sigui cònic-radiat degenerat en dos plans, per la qual cosa es necessita que *a* talli *e'*, o *e* a *a'*, i a més que els dos feixos projectius, d'eixos *e* i *a'*, formats pels plans que passen per *e* i els punts de *a*, i pels plans polars *a'* d'aquests últims punts siguin *perspectius* o sia que'l pla *ea'* sigui doble o corresponent a ell mateix en els dos feixos *e* i *a'*. Per això es necessitarà que'l pla *ea'* talli *a* en un punt E', el pla polar ε' del qual sigui el mateix *a'e*; E' serà, doncs, damunt de $\varepsilon(=ea')$ i per això es necessita que E' sigui punt de la quàdrica-base i ε el seu pla tangent en E', i com que E' és punt de contacte d'un pla tangent ε que passa per *e*, serà punt de la polar *e'*; és, doncs, necessari que *a*(=OP) talli *e'* en un dels dos punts en què *e'* talla la quàdrica-base. Q correspondría a l'altre punt E'_1 d'intersecció de *e'* i la discussió analítica és complerta.

§ 15. — ¿Aquests punts P i Q, projeccions, de O com a centre, dels punts E' i E'_1 en els quals talla *e'* a la quàdrica-base, són els punts d'intersecció dels dos parells de rectes (AC, BD) i (AD, BC) com per analogía havíem ja trobat? Efectivament, puix aquests parells de rectes corresponen a les còniques degenerades en dugues rectes del feix pla π, que hauràn d'ésser les projeccions de dues còniques degenerades del feix damunt de la quàdrica. I ¿quan es convertiràn en dues rectes les còniques damunt de la quàdrica? Quan el pla que les contingui sigui tangent a la superficie. Els plans tangents que passen per *e* són el *e*E' i *e*E'_1 i les còniques degenerades les dues parelles de generatrius que passen per E i E', punts d'intersecció de *e'* amb la superficie. Així, doncs, P i Q són projeccions, de O com a centre, de E i E' damunt del pla π i PQ la projecció de *e'*.

§ 16. — Els pols d'una recta *a*, respecte de les còniques d'un feix pla π, són els punts d'intersecció dels raigs homòlegs dels feixos de polars de dos punts M i N de la mateixa recta *a*, respecte de les còniques del feix. Com que aquests feixos són projectius, alhora el feix de plans determinatiu, es tallaràn segons punts d'una cònica que passa pels tres punts vèrtexs del triangle autopolar PQR comú.

Aquest resultat obtindríem aplicant ço que hem dit en el § 7 de la cònica formada pels pols d'un feix de rectes perspectiu al feix *e* de plans determinatiu, respecte de les còniqes en què aquests tallen a la quàdrica-base. Aquesta cònica passa pels punts E' i E'_1, en què la polar *e'* de *e* talla a la quàdrica (§ 8, on M i N eren aquests punts E' i E'_1) i talla l'eix *e* en el punt R_1 d'intersecció d'aquest amb el pla p'_2 polar del punt d'intersecció R_2 de e amb p_2 (§ 7). A més la cònica conté, com a punt corresponent al pla Oe, el pol de la recta OR_2 respecte de la cònica d'intersecció del mateix Oe amb la quàdrica. Aquest pol sempre estarà damunt de la recta OR tangent en O a dita cònica, qualsevol que sigui el punt R_2; per això la cònica en el pla π, lloc geomètric del pols d'una recta, respecte de les còniques d'un feix pla, passa per P i Q, projeccions de E' i E'_1, i per R, projecció damunt del pla π de qualsevol punt de la recta OR, intersecció dels plans $Oab = OAB$ i $Oe = OC_1D_1 = OCD$, projectant sempre de O com a centre.

Un problema que es confón molt amb el precedent, és el de la determinació dels punts conjugats respecte de totes les còniques del feix pla π, de cada un dels punts d'una recta donada. Resulta ésser la mateixa cònica, lloc geomètric dels pols d'aqueixa recta, respecte de les còniques del feix. Puix si prenem dues còniques del feix i determinem les polars, respecte d'aquestes dues soles còniques, dels punts de la recta que considerem, obtindrem dos feixos projectius de polars (puix ho són a la mateixa alineació dels punts de la recta donada) que'ls punts de intersecció de raigs homòlegs són los punts conjugats que busquem. Formen, doncs, una cònica que passa pels dos pols de la recta donada respecte de les dues còniques del feix que hem escollit. Així mateix hauría de passar pels altres pols de la recta respecte de les altres còniques del feix i queda superposada damunt de la cònica lloc geomètric de pols de la recta respecte de les còniques diverses del feix. Mes la manera d'ésser descrita és molt diferent en cada cas.

§ 17. — Per finir aqueixes consideracions amb un exemple, proposem el següent problema: Trobar el lloc geomètric dels punts d'intersecció de les polars d'un punt amb les còniques del feix, respecte de les quals prenem les polars, o sia *trobar el lloc geomètric dels punts de contacte de les tangents que's poden traçar d'un punt determinat a les còniques d'un feix pla.* La resposta és senzilla: *La projecció de la curva de intersecció de les dues superficies de segón ordre que són: la base del feix de còniques en l'espai, i la que conté les polars dels punts d'una recta respecte de les còniques del feix en l'espai.* La demostració és conseqüencia evident del que hem dit en els §§ 6 i 12. Aqueixa intersecció és en general de quart ordre i passa pel centre O de projecció. La projecció, doncs, lloc geomètric que busquem, és una curva de tercer ordre; la seva intersecció amb una recta qualsevulga, són els punts dobles de la serie de tercer ordre, formada per la involució de Desargues dels punts d'intersecció de la recta amb les còniques del feix, i el feix de polars de Lamé del punt donat, feix que és projectiu amb dita involució pel teorema de Lamé.

ENRIC RAFAEL VERHULST, S. J.

Tortosa, Abril 1914.