Estudi cinemàtic del mecanisme a la Cardan

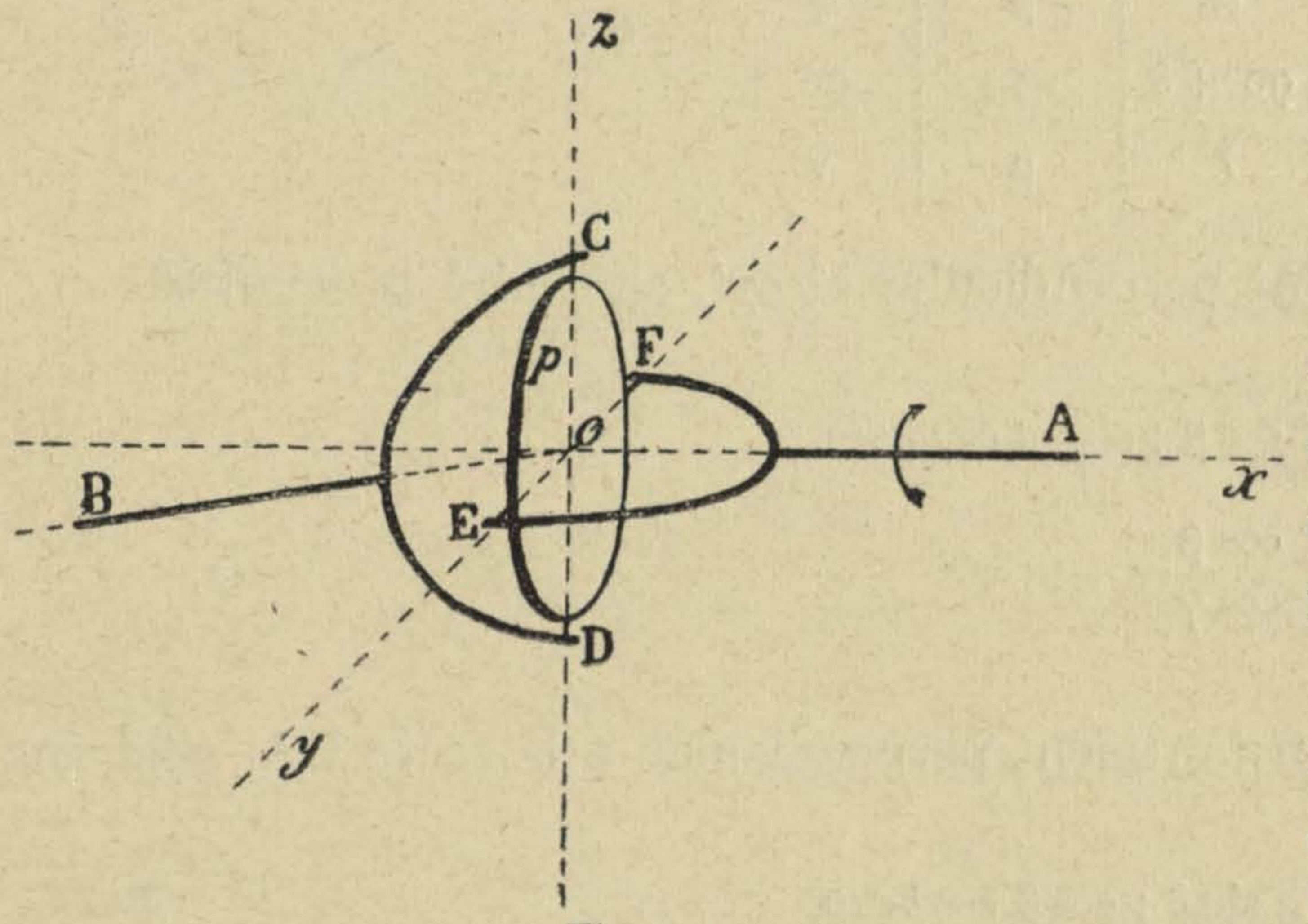

Figura 1.ª

I

Considerem un mecanisme d'aquesta classe com el representat esquemàticament en la fig. 1.ª No'l descriurem per ésser de sobres conegut.

El disc p pot girar al voltant dels eixos EF i CD, perpendiculars entre ells, i fixos respectivament a les forquilles EAF i CBD. Ademés EF és perpendicular al eix OA, i CD, al OB. Les forquilles EAF i CBD poden girar respectivament al voltant dels eixos OA i OB, que formen un angle de $90^o+\delta$, sent δ agut. Donant a la forquilla EAB un moviment de rotació en el sentit indicat per la sageta i amb una velocitat angular constant ω, ¿quin moviment adquiriràn les altres parts de l'aparell, és a dir, el disc p i la forquilla CBD?

Per a averiguar això, suposarem que, al començar el moviment, l'eix EF està en el plànol determinat per OA i OB i que, en conseqüencia, l'eix CD és perpendicular al plànol de OA, OB i EF. Havent suposat això, pendrem els tres eixos OA, OB i OF com a eixos coordenats fixos, anomenant-los respectivament ox, oy i oz. A més suposarem un altre sistema d'eixos movibles ox', oy', oz' invariablement units al disc p, i que, al començar el moviment, coincideixen amb els fixos. Si determinem el moviment d'aquest triedre movible respecte als eixos fixos, podrem deduir fàcilment tot lo relatiu al moviment de dites dues peces del mecanisme considerat. Però el moviment de dit triedre movible quedarà ben conegut, quan coneguem els angles que les seves arestes formen en cada instant amb els eixos fixos. Per aquest motiu els anem a determinar primer que tot.

II

Els angles que les rectes ox', oy', oz' i OB formen amb els eixos coordenats fixos estàn indicats en el següent quadre:

	x	y	z
y'	90°	ωt	$90^\circ - \omega t$
z'	α	β	γ
OB	$90^\circ + \delta$	δ	90°
x'	λ	μ	ν

Com que l'eix oz' és constantment perpendicular al oy', se tindrà la igualtat

$$\cos \omega t \cos \beta + \sin \omega t \cos \gamma = o,$$

d'on

$$\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = -\operatorname{tg} \omega t. \qquad (1)$$

A més, essent també l'eix oz' constantment perpendicular a la recta OA, tindrem:

$$-\cos \alpha \sin \delta + \cos \beta \cos \delta = 0,$$

d'on

$$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \delta. \qquad (2)$$

També es complirà la condició

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \qquad (3)$$

De les igualtats (1), (2) i (3) fàcilment deduirem les expressions de $\cos \alpha$, $\cos \beta$ i $\cos \gamma$. En efecte, de (1) i (2) es dedueix

$$\frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} = -\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \omega t}, \qquad (4)$$

i, per tant, es podrà escriure

$$\frac{\cos \beta}{1} = \frac{\cos \gamma}{-\cot \omega t} = \frac{\cos \alpha}{\cot \delta} \; ; \quad \frac{1}{1 + \cot^2 \omega t + \cot^2 \delta} = \frac{\cos^2 \beta}{1} = \frac{\cos^2 \gamma}{\cot^2 \omega t} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cot^2 \delta},$$

d'on

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \cot^2 \omega t + \cot^2 \delta}$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{\cot^2 \omega t}{1 + \cot^2 \omega t + \cot^2 \delta}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cot^2 \delta}{1 + \cot^2 \omega t + \cot^2 \delta}.$$

Posant $\frac{1}{\text{sen}^2 \omega t}$ en lloc de $1 + \cot^2 \omega t$ i les cotangents en funció de les respectives tangents, i extraient l'arrel quadrada, resulta

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sin \omega t}{\sqrt{\text{tg}^2 \delta + \sin^2 \omega t}} \qquad (5)$$

$$\cos \beta = \pm \frac{\text{tg}\, \delta \sin \omega t}{\sqrt{\text{tg}^2 \delta + \sin^2 \omega t}} \qquad (6)$$

$$\cos \gamma = \pm \frac{\text{tg}\, \delta \cos \omega t}{\sqrt{\text{tg}^2 \delta + \sin^2 \omega t}}. \qquad (7)$$

Com que l'eix ox' ha de ésser sempre perpendicular al oy', tindrem la igualtat següent:

$$\cos \omega t \cos \mu + \sin \omega t \cos \nu = 0,$$

d'on

$$\frac{\cos \mu}{\cos \nu} = -\text{tg}\, \omega t. \qquad (8)$$

A més, essent perpendiculars ox' i oz', tindrem:

$$\cos \lambda \cos \alpha + \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma = 0. \qquad (9)$$

Aquestes igualtats junt amb la

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$$

ens permetràn determinar $\cos \lambda$, $\cos \mu$ i $\cos \nu$. Anem a fer-ho.

De (8) i (9) es dedueix

$$\frac{\cos \lambda}{\cos \nu} - \text{tg}\, \omega t \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} = 0,$$

i tenint en compte (1) (2) i (4), resulta

$$\frac{\cos \lambda}{\cos \nu} - \text{tg}\, \omega t\ \text{tg}\, \delta - \frac{\text{tg}\, \delta}{\text{tg}\, \omega t} = 0,$$

o bé, transformant,
$$\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\omega t\,\cos\omega}, \tag{10}$$

d'on
$$\frac{\cos\lambda}{\operatorname{tg}\delta}=\frac{\cos\nu}{\sin\omega t\,\cos\omega}.$$

Però com
$$\frac{\cos\mu}{\cos\nu}=-\operatorname{tg}\omega t=-\frac{\sin^2\omega t}{\sin\omega t\,\cos\omega},$$

se podrà escriure
$$\frac{\cos\lambda}{\operatorname{tg}\delta}=\frac{\cos\mu}{-\sin^2\omega t}=\frac{\cos\nu}{\sin\omega t\,\cos\omega t}\;;\quad \frac{1}{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^4\omega t+\sin^2\omega t\,\cos^2\omega t}=\frac{\cos^2\lambda}{\operatorname{tg}^2\delta}=\frac{\cos^2\mu}{\sin^4\omega t}=\frac{\cos^2\nu}{\sin^2\omega t\,\cos^2\omega t},$$

de lo qual resulta
$$\cos\lambda=\pm\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}, \tag{11}$$
$$\cos\mu=\pm\frac{\sin^2\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}, \tag{12}$$
$$\cos\nu=\pm\frac{\sin\omega t\,\cos\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}. \tag{13}$$

Anem, ara, a averiguar quin signe s'ha de pendre en cada una de les fórmules (5), (6) i (7), i (11), (12) i (13), suposant que'l sentit de la rotació al voltant de l'eix ox és l'indicat en la fig. 1.ª i recordant que l'angle δ és agut.

Segons la igualtat (2), $\cos\beta$ i $\cos\alpha$ han d'ésser del mateix signe; a més durant la primera quarta part d'una revolució al voltant de l'eix ox, $\cos\alpha$ és evidentment negatiu i com $\sin\omega t$ és positiu, resulta, segons (5) i (6), que per a $\cos\alpha$ i $\cos\beta$ s'ha de pendre el signe negatiu.

Com que durant la primera quarta part d'una revolució al voltant de l'eix ox, $\operatorname{tg}\omega t$ és positiva, de la fórmula (1) es dedueix que $\cos\gamma$ ha de ser de signe contrari a $\cos\beta$ i, per tant, el signe de $\cos\gamma$ serà el positiu. Considerant la mateixa part d'una revolució, se veu desseguida que $\cos\lambda$ ha de ser positiu. Com que $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$ són positius, resulta segons (8) i (10), que $\cos\mu$ tindrà signe negatiu i $\cos\nu$ el tindrà positiu.

Així, doncs, tindrem definitivament

$$\cos\alpha=-\frac{\sin\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}} \tag{14}$$
$$\cos\beta=-\frac{\operatorname{tg}\delta\,\sin\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}} \tag{15}$$
$$\cos\gamma=\frac{\operatorname{tg}\delta\,\cos\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}} \tag{16}$$
$$\cos\lambda=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}} \tag{17}$$
$$\cos\mu=-\frac{\sin^2\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}} \tag{18}$$
$$\cos\nu=\frac{\sin\omega t\,\cos\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}. \tag{19}$$

Si diem T al temps que dura una revolució al voltant de l'eix ox, pot veure's fàcilment que $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ són funcions periòdiques de t tenint per període a T; i que $\cos\lambda$, $\cos\mu$ i $\cos\nu$ també són periòdiques, però tenen per període $\frac{T}{2}$.

III

La velocitat de rotació de la forquilla CBD al voltant de l'eix OB, és evidentment igual a la velocitat de rotació de l'eix oz'. Aquesta podría deduir-se com a cas particular de la velocitat d'un punt qualsevol del disc p que determinarem més endevant, però donat l'interès especial que té des del punt de vista pràctic el conèixer la dita velocitat, la buscarem primer que res.

L'angle que oz' haurà girat al cap d'un temps t, serà evidentment γ, que té per cosinus com ja sabem

$$\cos\gamma = \frac{\operatorname{tg}\delta\cos\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta + \sin^2\omega t}}.$$

El valor de $\frac{d\gamma}{dt}$ serà, doncs, la velocitat angular ω' del moviment de CBD al voltant de OB. Anem a buscar-lo.

Derivant la igualtat anterior, tenim:

$$-\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt} = \frac{-\operatorname{tg}\delta\sin\omega t\,.\,\omega\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t} - \operatorname{tg}\delta\cos\omega t\dfrac{\sin\omega t\cos\omega t\,.\,\omega}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}}{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}$$

$$\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt} = \omega\sin\omega t\ \operatorname{tg}\delta\frac{1+\operatorname{tg}^2\delta}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega\operatorname{tg}\delta\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)}$$

i finalment

$$\omega' = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\omega\sin\delta}{\sin^2\delta+\sin^2\omega t\cos^2\delta}. \qquad (20)$$

D'aquesta igualtat se dedueix que'l valor de ω' és funció periòdica del temps, tenint per període $\frac{T}{2}$. Al comunicar a l'eix OA un moviment de rotació uniforme, el que adquireix OB, en general, no ho serà, sinó que serà periòdic. No obstant, la seva velocitat mitja durant un període $\frac{T}{2}$ és igual a ω, segons se desprèn de l'examen de l'expressió de $\cos\gamma$. En efecte:

2

per $$t=t_0 \,.\, . \quad \cos\gamma_0=\frac{\operatorname{tg}\delta\cos\omega t_0}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t_0}}$$

i per $$t=t_0+\frac{T}{2} \quad \cos\gamma=\frac{-\operatorname{tg}\delta\cos\omega t_0}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t_0}}$$

doncs $\gamma=\gamma_0+\pi$; és a dir, que quan la forquilla EAF ha girat de 180°, igual ha fet la CBD, i, per tant, queda demostrat lo que desitjàvem.

Durant cada període $\frac{T}{2}$, el valor de ω' passa per un màxim i un mínim, i això és el que ara anem a fer veure. Es evident que'ls màxims i mínims de ω' correspondràn respectivament als mínims i màxims del denominador de (20), i aquests, als de $\sin^2 \omega t$. Però

$$\left.\begin{array}{ll} & \sin^2\omega t \text{ serà mínim quan } \omega t=2K\frac{\pi}{2} \\ \text{i} & \sin^2\omega t \text{ serà màxim quan } \omega t=(2K+1)\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{essent K un enter;}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{doncs} & \omega' \text{ serà màxim quan } t=2K\frac{T}{4} \\ \text{i} & \omega' \text{ serà màxim quan } t=(2K+1)\frac{T}{4} \end{array}\right\} \text{essent K enter.}$$

El valor màxim de ω' serà

$$\omega'_{\text{màx}}=\frac{\omega}{\sin\delta}, \tag{21}$$

i el mínim $$\omega'_{\text{mín}}=\omega\sin\delta. \tag{22}$$

Entre $\omega'_{\text{màx}}$ i $\omega'_{\text{mín}}$ hi haurà, doncs, les següents notables relacions:

$$\omega'_{\text{màx}}-\omega'_{\text{mín}}=\frac{\omega}{\sin\delta}\,\omega\sin\delta=\omega\frac{\cos\delta}{\operatorname{tg}\delta} \tag{23}$$

$$\omega'_{\text{màx}}\,\omega'_{\text{mín}}=\omega^2 \quad \text{o bé} \quad \omega=\sqrt{\omega_{\text{màx}}\,\omega'_{\text{mín}}} \tag{24}$$

i $$\frac{\omega'_{\text{mín}}}{\omega'_{\text{màx}}}=\sin^2\delta \quad \text{o bé} \quad \sin\delta=\sqrt{\frac{\omega'_{\text{mín}}}{\omega'_{\text{màx}}}}. \tag{25}$$

Anem a buscar, ara, en quin instant el valor de ω' és igual al de ω.

$$\omega' = \omega \quad \text{quan} \quad \frac{\sin\delta}{\sin^2\delta + \sin^2\omega t\,\cos^2\delta} = 1$$

d'on

$$\sin^2\omega t = \frac{\sin\delta\,(1 - \sin\delta)}{\cos^2\delta} = \frac{\sin\delta}{1 + \sin\delta}$$

$$\sin\omega t = \pm\sqrt{\frac{\sin\delta}{1 + \sin\delta}} \; ; \quad \cos\omega t = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + \sin\delta}}$$

$$\operatorname{tg}\omega t = \pm\sqrt{\sin\delta},$$

igualtat que'ns diu que $\omega' = \omega$ *quan la tangent de l'angle girat per la forquilla* EAF *sigui igual a* $\sqrt{\sin\delta}$.

CASOS PARTICULARS.

1.$^{\text{er}}$ $\delta = 0$. En aquest cas $\omega' = 0$ i, per tant, no hi ha transmissió de moviment.

2.$^{\text{ón}}$ $\delta = 45^{\circ}$. Amb aquest valor de δ, es té

$$\sin\delta = \cos\delta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

i, per tant,

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \sin^2\omega t}.$$

El valor màxim de ω' serà

$$\omega'_{\text{màx}} = \omega\sqrt{2}$$

i el mínim

$$\omega'_{\text{mín}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}.$$

La seva relació valdrà

$$\frac{\omega'_{\text{màx}}}{\omega_{\text{mín}}} = 2,$$

i la seva diferencia

$$\omega_{\text{màx}} - \omega_{\text{mín}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} = \omega'_{\text{mín}}.$$

3.$^{\text{er}}$ $\delta = 90^{\circ}$. En aquest resulta $\omega' = \omega$, i per tant, el moviment al voltant de l'eix OB serà exactament igual que'l que donem al voltant de OA.

Quan l'angle δ difereix poc de 90°, les fórmules (23) i (24) ens diuen que ω' serà *quasi* constantment igual a ω, i per aquest motiu, en la pràctica, se permeten petites desviacions de l'eix OB respecte al OA, encara que's vulgui tenir moviment uniforme.

IV

Anem a estudiar el moviment del disc p en l'espai fent-ho de dues maneres: 1.er, considerant el moviment del plànol $y'oz'$ que li està invariablement unit; i 2.on, estudiant el moviment d'un qualsevol dels seus punts.

1.er Podrem formar-nos càrrec del moviment del plànol $y'oz'$ de tres maneres diferents; *a)* considerant la normal ox' i buscant el seu lloc geomètric; *b)* buscant la superficie envolvent del mateix plànol; i *c)* per la consideració de l'eix instantani de rotació.

a) Les equacions de la normal ox' al plànol $y'oz'$ seràn evidentment

$$\frac{x}{\cos\lambda}=\frac{y}{\cos\mu}=\frac{z}{\cos\nu}$$

o sigui

$$\frac{x}{\operatorname{tg}\delta}=\frac{y}{-\sin^2\omega t}=\frac{z}{\sin\omega t\cos\omega t}. \tag{26}$$

Eliminant el temps, se té

$$\sin^2\omega t=-\frac{y\operatorname{tg}\delta}{x}\quad;\quad\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\delta}=\frac{z^2}{\sin^2\omega t\cos^2\omega t}\quad;\quad\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\delta}=\frac{z^2}{\frac{-y\operatorname{tg}\delta}{x}\left(1+y\frac{\operatorname{tg}\delta}{x}\right)}$$

$$\left(y^2+z^2\right)\operatorname{tg}\delta+xy=0. \tag{27}$$

Equació que'ns dóna el lloc geomètric de les normals al plànol $y'oz'$. Com que és de segon grau, homogenia i té tots els termes de igual paritat respecte a z, representarà un con de 2.ón ordre en què el plànol xoy serà plànol principal. Com que el període dels coeficients que entren en les equacions (26) és $\frac{T}{2}$, aquest con será descrit per la normal ox' en el mateix període. La intersecció d'aquesta superficie amb el plànol xoy és

$$y\,(y\,\text{tg}\,\delta+x)=0$$

o sigui
$$\begin{cases} y=0 \\ y\,\text{tg}\,\delta+x=0\ ; \end{cases}$$

equacions que representen respectivament l'eix de les x, o sigui OA, i una recta inclinada respecte a aquest, pel costat de les y negatives, d'un angle igual a $90^0-\delta$ i que no és altre que la prolongació de OB. Com que el plànol xoy és principal, segons hem dit, aquestes dues rectes són respectivament les generatrius de contacte de dit con amb els plànols zox i zOB.

Les seccions del con paral·leles al plànol yoz són circulars. En efecte, posant $x=d$, resulta

$$(y^2+z^2)\,\text{tg}\,\delta+dy=0 \quad ; \quad x=d$$

equacions d'una circumferencia de centre $\left(d, -\frac{a}{2\,\text{tg}\,\delta}, 0\right)$ i de radi $\frac{a}{2\,\text{tg}\,\delta}$.

Podríem acabar de formar-nos idea d'aqueix con tallant-lo per un plànol perpendicular al seu eix. Tenint en compte que aquest forme un angle de $45^0-\frac{\delta}{2}$ amb ox pel costat de les y negatives, la secció produida per un plànol a la distancia d, serà una el·lipsa que tindrà per semi-eixos els següents:

Semi-eix petit $=d\sqrt{\frac{1-\sin\delta}{1+\sin\delta}}=d\,\text{tg}\left(45-\frac{\delta}{2}\right)$, que estarà situat sobre el plànol xy.

Semi-eix gran $=d\sqrt{\frac{1-\sin\delta}{2\sin\delta}}=d\,\frac{\sin\left(45-\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{\sin\delta}}$. (28)

La distancia focal de la mateixa el·lipsa

$$c=d\left[\frac{1-\sin\delta}{2\sin\delta}-\frac{1-\sin\delta}{1+\sin\delta}\right]=d\,\frac{1-\sin\delta}{\sqrt{2\sin\delta\,(1+\sin\delta)}}=d\sqrt{\frac{1-\sin\delta}{2\sin\delta}}\cdot\sqrt{\frac{1-\sin\delta}{1+\sin\delta}}$$

serà *igual al producte dels semi-eixos dividit per* d.

L'excentricitat valdrà

$$e=\sqrt{\frac{1-\sin\delta}{1+\sin\delta}}=\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right). \qquad (29)$$

b) Per a buscar la superficie envolvent del plànol movible xoy, aplicarem el mètode tan sabut de la derivada respecte al paràmetre.

L'equació normal del plànol $y'oz'$ serà evidentment

$$x\cos\lambda+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$$

d'on

$$2x\operatorname{tg}\delta-2y\sin^2\omega t+z\sin 2\omega t=0 \qquad (30)$$

La seva derivada respecte a ωt dóna

$$z=y\operatorname{tg}2\omega t. \qquad (31)$$

Eliminant la t entre (30) i (31), tenim

$$\sin 2\omega t=\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad ; \quad 2\sin^2\omega t=1-\cos 2\omega t=\frac{\sqrt{y^2+z^2}-y}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad ;$$

$$2x\operatorname{tg}\delta\sqrt{y^2+z^2}-y\sqrt{y^2+z^2}+y^2+z^2=0 \quad ; \quad (y-2x\operatorname{tg}\delta)=\sqrt{y^2+z^2} \quad ; \quad y^2+4x^2\operatorname{tg}^2\delta-4xy\operatorname{tg}\delta=y^2+z^2$$

$$4x^2\operatorname{tg}^2\delta-4xy\operatorname{tg}\delta-z^2=0. \qquad (32)$$

Equació que representa un con de segón ordre en què el plànol xy és principal. Aquest con serà engendrat pel plànol $x'oy'$ en un temps igual a $\frac{T}{2}$ ja que els coeficients de la equació (30) tenen aquest període.

Suposant $z=0$, resulten les rectes $x=0$ i $y=x\operatorname{tg}\delta$ que representen respectivament l'eix de les y, i una recta inclinada respecte a l'eix ox pel costat de les y positives d'un angle igual a δ. Aquestes dues rectes seràn, a més, respectivament generatrius de contacte del plànol $y'oz'$ i d'un altre que passant per o sigui perpendicular a OB.

Si tallem dit con per un plànol perpendicular al seu eix, que coincideix amb el del con de les normals, obtindrem una el·lipsa, els semi-eixos de la qual seràn:

Semi-eix gran $=d\sqrt{\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}}=d\cot\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)$ que està situat en el plànol principal xoy.

Semi-eix petit $=d\sqrt{\dfrac{2\sin\delta}{1-\sin\delta}}=d\dfrac{\sqrt{\sin\delta}}{\sin\left(45^\circ-\dfrac{\delta}{2}\right)}$ paral·lel a *oz*.

La semi-distancia focal és

$$c=d\sqrt{\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}-\frac{2\sin\delta}{1-\sin\delta}}=d\sqrt{\frac{1+\sin\delta-2\sin\delta}{1-\sin\delta}}=d$$

que, com se veu, *no depèn de l'angle* δ.

L'excentricitat serà $\qquad e=\operatorname{tg}\left(45^\circ-\dfrac{\delta}{2}\right).$

Com pot veure's examinant tots aquests valors que acabem de trobar, *el con envolvent del plànol movible y'oz' té les seves generatrius respectivament perpendiculars a les del con de les normals ox'*, cosa que ja es podía preveure.

c) Com que coneixem les trajectories dels punts C i E, serà fàcil trobar l'eix instantani de rotació. Aquest serà evidentment la intersecció dels plànols *y'o*A i *z'o*B. Anem-lo a determinar primer respecte als eixos fixos.

Equació de $\qquad y'o\mathrm{A}\ldots z=y\operatorname{tg}\omega t.$

L'equació de *z'*OB per contenir la recta *oz'*, les equacions de la qual són

$$\frac{x}{-\sin\omega t}=\frac{y}{-\operatorname{tg}\delta\sin\omega t}=\frac{z}{\operatorname{tg}\delta\cos\omega t}\quad \text{o bé}\quad \begin{cases} y-\operatorname{tg}\delta x=0\\ z+\operatorname{tg}\delta\cot\omega t.x=0\end{cases}$$

serà de la forma $\qquad y-\operatorname{tg}\delta.x+\mathrm{K}\,(z+\operatorname{tg}\delta\cot\omega t.x)=0$

Anàlogament per contenir OB que té per equacions

$$\begin{cases} z=0\\ y+\cot\delta x=0,\end{cases}$$

tindrà la forma

$$y+\cot\delta x+\mathrm{K}'z=0.$$

Per tant se verificarà

$$\mathrm{K}=\mathrm{K}'=\frac{\operatorname{tg}\omega t}{\sin^2\delta}$$

i l'equació de z'OB serà

$$y \sin^2 \delta + \sin \delta \cos \delta + \operatorname{tg} \omega t z = 0.$$

Les equacions de l'eix instantani de rotació referit als eixos fixos seràn, doncs,

$$\left.\begin{array}{l} z = y \operatorname{tg} \omega t \\ y \sin^2 \delta + \sin \delta \cos \delta . x + \operatorname{tg} \omega t . z = 0 \end{array}\right\} \quad (33).$$

Quan $t = 2n \frac{T}{4}$, essent n un enter, tenim $\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ y \operatorname{tg} \delta + x = 0 \end{array}\right.$ i l'eix instantani coincideix amb OB. Quan $t = (2n+1) \frac{T}{4}$, resulta $\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$ i coincideix amb OA.

Eliminant la t entre les equacions (33) resulta

$$\sin^2 \delta . y^2 + \sin \delta \cos \delta . xy + z^2 = 0 \quad (34)$$

equació que representarà el lloc geomètric dels eixos instantanis de rotació respecte al triedre fixe.

Aquest lloc geomètric resulta ésser un con de segón ordre en què el plànol xoy és principal. Com que'ls coeficients de les equacions (33) tenen per període $\frac{T}{2}$, dit con serà descrit per l'eix instantani en aquest temps.

Fent $z=0$, resulten les rectes $y=0$ i $y \operatorname{tg} \delta + d = 0$, que representen respectivament l'eix ox i una recta prolongació de OB. Els plànols zoA i zoB seràn respectivament tangents al llarg d'aqueixes rectes. El contorn aparent sobre'l plànol xoy del con, lloc geomètric dels eixos instantanis de rotació, coincideix amb el del cono de les normals al plànol $y'oz'$. Els dos cons seràn tangents al llarg de les generatrius OA i OB, i els dos eixos d'aquestes superficies coincidiràn.

Tallant el con (34) per un plànol perpendicular al seu eix a una distancia d, resulta una el·lipsa que té per semi-eixos:

semi-eix gran $= d \sqrt{\frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta}} = d \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right)$. Situat sobre'l plànol xoy.

» petit $= d \sqrt{\frac{\sin \delta (1 - \sin \delta)}{2}} = d \sin\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right) . \sqrt{\sin \delta}$.

L'excentricitat valdrà

$$e=\sqrt{1-\sin\delta\cos^2\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)}.$$

Anem ara a referir l'eix instantani de rotació als eixos mòbils.

La recta OB per ésser constantment perpendicular a oz', estarà situada en el plànol $x'oy'$ i la seva equació serà la del plànol z'OB. Però

$$\cos\overline{\mathrm{OB}\,.\,ox'}=-\sin\delta\cos\lambda+\cos\delta\cos\mu=-\cos\delta\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\delta+\sin^2\omega t},$$

del qual se dedueix

$$\mathrm{tg}\,\overline{\mathrm{OB}\,.\,x'}=-\frac{\cos\omega t}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\delta+\sin^2\omega t}},$$

per tant l'equació del plànol z'OB serà

$$y'=-\frac{\cos\omega t}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\delta+\sin^2\omega t}}\,x'. \tag{35}$$

La recta OA per ésser perpendicular a oy' estarà situada en el plànol $x'oz'$, i tindrà per equació, per tant, la del plànol y'OA. Però com que

$$\cos\overline{\mathrm{OA}\,.\,ox'}=\cos\lambda=\frac{\mathrm{tg}\,\delta}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\delta+\sin^2\omega t}}\qquad \text{d'on}\qquad \mathrm{tg}\,\lambda=\pm\frac{\sin\omega t}{\mathrm{tg}\,\delta},$$

l'equació de OA, en el plànol $x'oz'$, serà

$$z'=-\frac{\sin\omega t}{\mathrm{tg}\,\delta}\,x'. \tag{36}$$

L'eix instantani de rotació, referit als eixos mòbils tindrà, doncs, per equacions,

$$\left.\begin{aligned} z'&=-\frac{\sin\omega t}{\mathrm{tg}\,\delta}\,x' \\ y'&=-\frac{\cos\omega t}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\delta+\sin^2\omega t}}\,x' \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

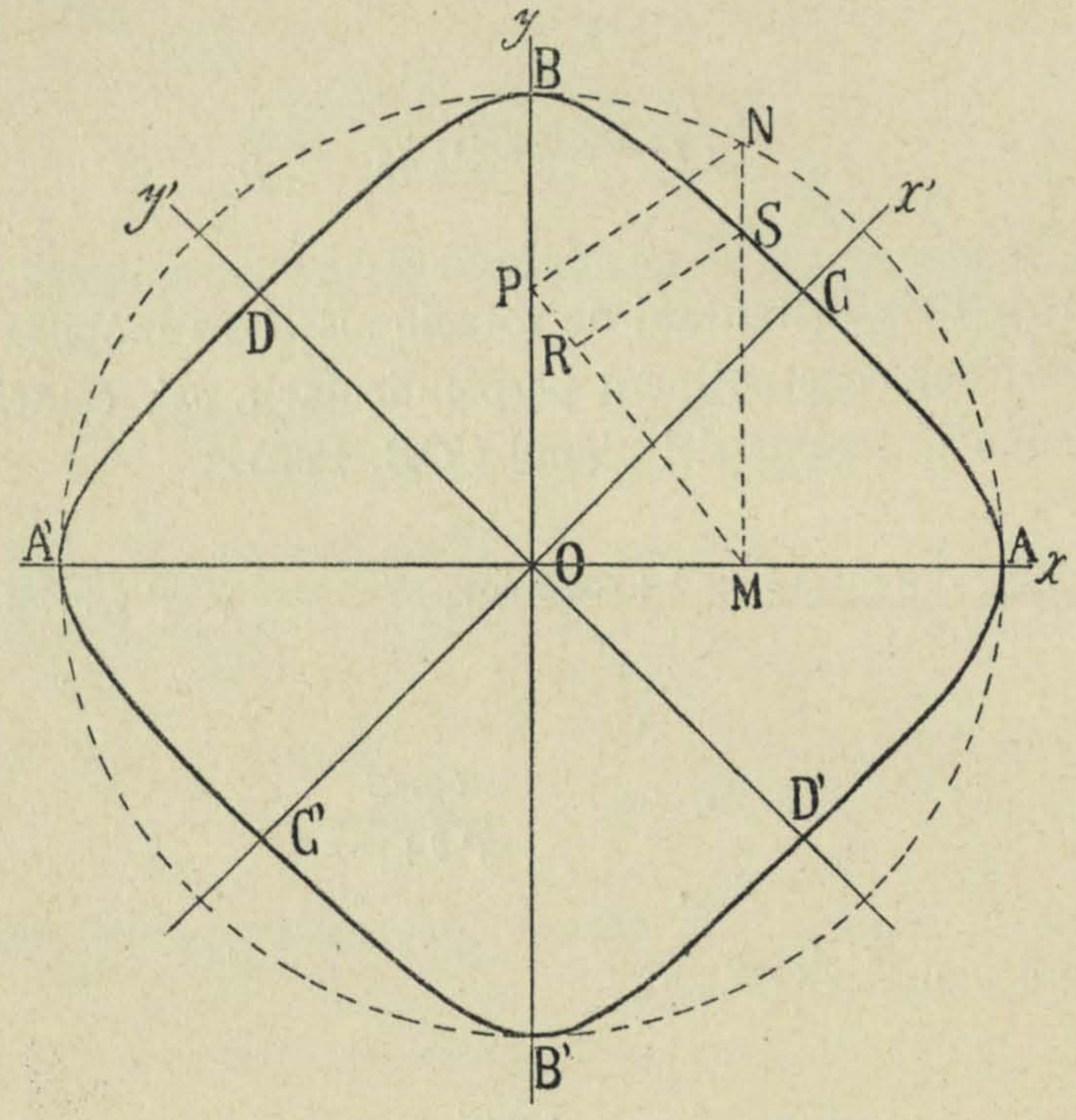

Figura 2.ª

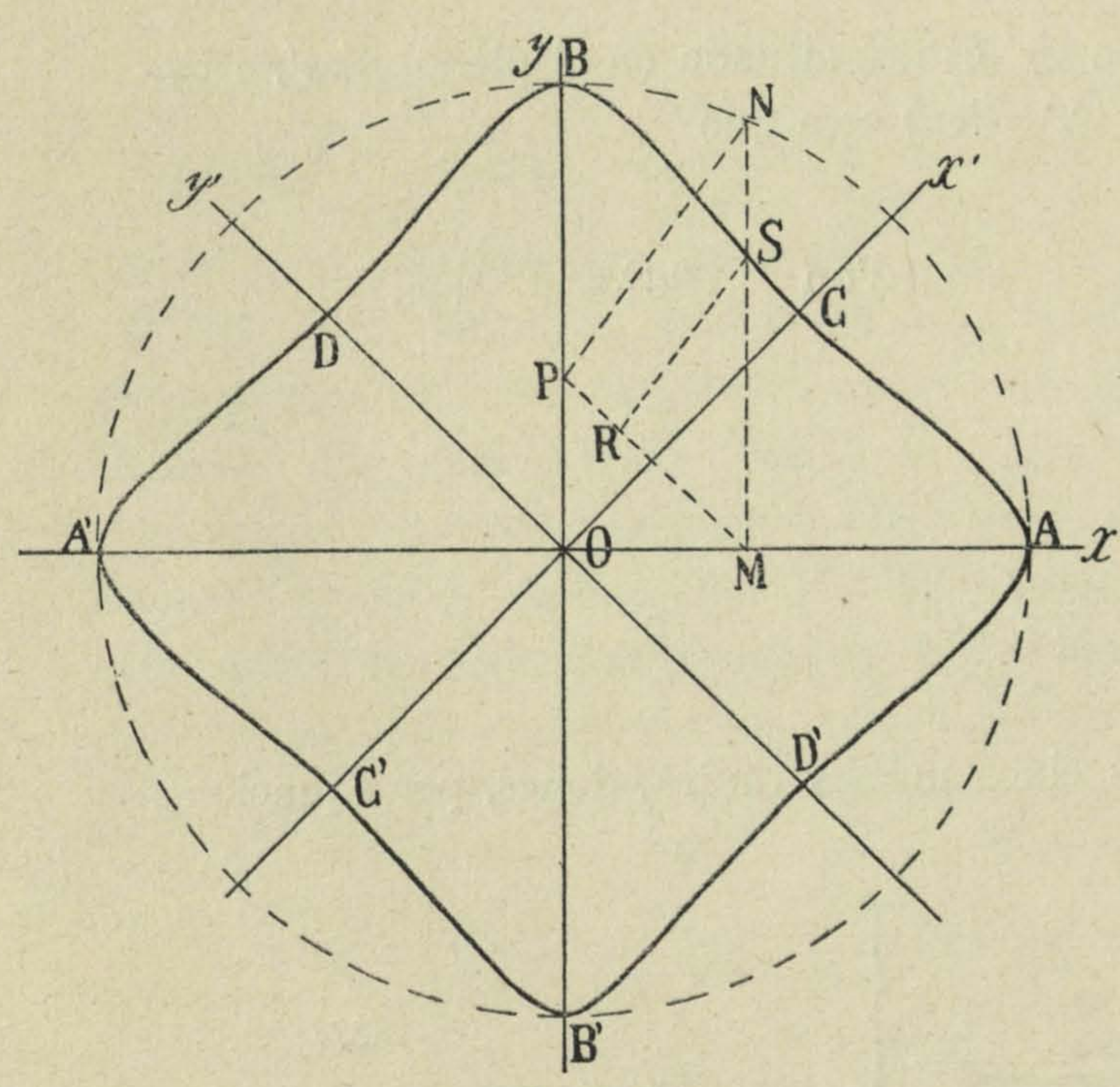

Figura 3.ª

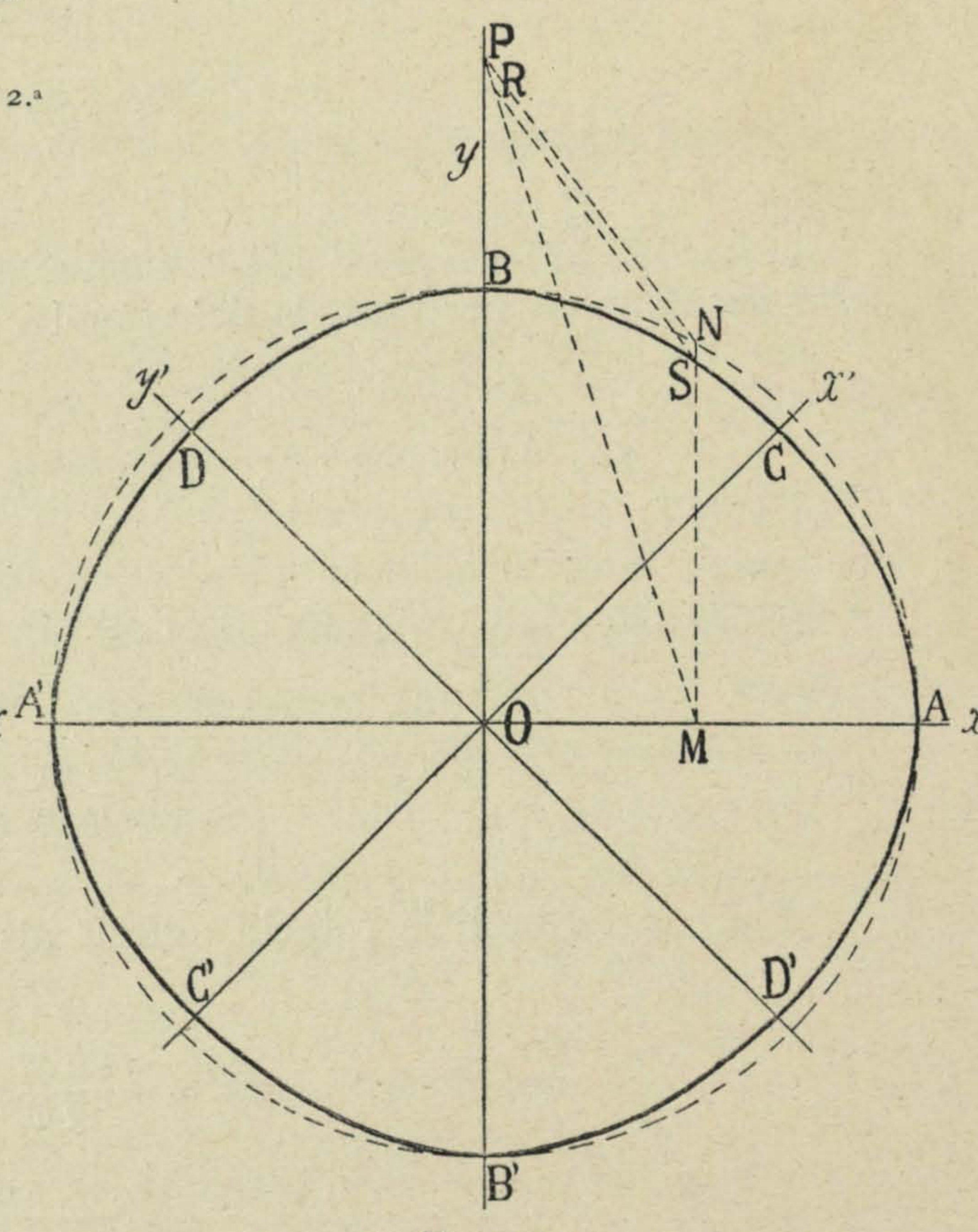

Figura 4.ª

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Quan } t=4n\dfrac{T}{4}, & \text{l'eix instantani vindrà donat per} & \left\{\begin{array}{l} z'=0 \\ y'\operatorname{tg}\delta+x'=0. \end{array}\right. \\
t=(4n+1)\dfrac{T}{4}, & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \left\{\begin{array}{l} z'\operatorname{tg}\delta+x'=0 \\ y'=0. \end{array}\right. \\
t=(4n+2)\dfrac{T}{2}, & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \left\{\begin{array}{l} z'=0 \\ y'\operatorname{tg}\delta-x'=0 \end{array}\right. \\
t=(4n+3)\dfrac{T}{4}, & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & \left\{\begin{array}{l} z'\operatorname{tg}\delta-x'=0 \\ y'=0. \end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (38)$$

Anem, ara, a buscar el lloc geomètric dels eixos instantanis referits al triedre movible, cosa que obtindrem eliminant la t entre les equacions (37)

$$\sin^2\omega t=\frac{z'^2}{x'^2}\operatorname{tg}^2\delta \quad ; \quad \cos^2\omega t=1-\frac{z'^2}{x'^2}\operatorname{tg}^2\delta=\frac{x^2-z^2\operatorname{tg}^2\delta}{x^2} \quad ; \quad y'^2=\frac{(x'^2-z^2\operatorname{tg}^2\delta)}{x'^2\operatorname{tg}^2\delta+z^2\operatorname{tg}^2\delta}x'^2,$$

$$x^{4\prime}-(x^{2\prime}y^{2\prime}+x^{2\prime}z^2+y^{2\prime}z^2)\operatorname{tg}^2\delta=0. \qquad (39)$$

equació que representa un con de quart ordre, en qué els eixos coordenats també són eixos de la superficie.

Tallant aquesta pel plànol $z'oy'$, resulten, com a intersecció, les rectes $\left.\begin{array}{l}x'=0\\y'=0\end{array}\right\}$ i $\left.\begin{array}{l}x'=0\\z'=0\end{array}\right\}$ que representen respectivament els eixos oz' i oy'. Si bé satisfàn l'equació (39), són rectes isolades que no són eixos instantanis.

Si tallem la superficie (39) pel plànol $x'oy'$, resulta, a més de l'eix oy', el primer i tercer dels eixos (38); i si tallem pel plànol $x'oz'$, resulten, a més de l'eix oz', el segón i quart de (38).

Per formar-nos idea perfecta de la forma del con, el tallarem per un plànol perpendicular a l'eix ox' a la distancia d.

Fent això, tenim

$$d^4-(d^2y^2+y^2z^2+z^2d^2)\operatorname{tg}^2\delta=0,$$

o bé

$$y^2z^2+d^2(y^2+z^2)-d^4\cot^2\delta=0,$$

equació que representa una curva de quart ordre de la forma representada respectivament en les figs. 2.ª, 3.ª i 4.ª, segons que $\delta<30^o$, $\delta=30^o$ o $\delta>30^o$. Es a dir, que'*l lloc geomètric dels eixos instantanis de rotació respecte al triedre movible, serà un con que tenint el vèrtex a l'origen, tindrà per base la curva de les figs. 2.ª, 3.ª o 4.ª, situada en un plànol perpendicular a ox', amb el centre en aquesta recta, i tenint els* *eixos paral·lels als coordenats oy' i oz'. En definitiva, el moviment del disc p. queda determinat pel rodament del con movible* $x^4-(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)\operatorname{tg}^2\delta=0$ *sobre'l fixe* $\sin^2\delta\,.\,y^2+\sin\delta\cos\delta\,.\,xy+z^2=0$, amb la condició que en un instant qualsevol la generatriu

$$\left\{\begin{aligned} z' &= -\frac{\sin\omega t}{\operatorname{tg}\delta}x' \\ y' &= -\frac{\cos\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}x', \end{aligned}\right.$$

del primer, coincideix amb la

$$\left\{\begin{aligned} & z=\operatorname{tg}\omega t\,.\,y \\ & y\sin^2\delta+\sin\delta\cos\delta x+\operatorname{tg}\omega t\,.\,z=0 \end{aligned}\right.$$

del segón. En una revolució complerta de la forquilla AEF el con fixe serà descrit dugues vegades, mentre que mòbil només ho serà que una.

2.$^{\text{ón}}$ Suposem un punt invariablement unit al disc p i les coordenades del qual respecte als eixos movibles siguin a, b i c. Les coordenades del mateix punt respecte als eixos fixes seràn

$$x=\frac{a\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}-c\frac{\sin\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}},$$

$$y=-\frac{a\sin^2\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}+b\cos\omega t-c\frac{\operatorname{tg}\delta+\sin\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta-\sin^2\omega t}},$$

$$z=\frac{a\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}+b\sin\omega t+c\frac{\operatorname{tg}\delta\cos\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}},$$

o bé

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a\operatorname{tg}\delta-c\sin\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}, \\ y &= b\cos\omega t-\frac{\sin\omega t\,(a\sin\omega t+c\operatorname{tg}\delta)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}, \\ z &= b\sin\omega t+\frac{\cos\omega t\,(a\sin\omega t+c\operatorname{tg}\delta)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}}. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Eliminant la t entre aquestes equacions, n'obtindrem dues que seràn les de la trajectoria descrita per un punt qualsevol. Però com que el centre del disc és fixe, el punt s'haurà de moure sobre l'esfera que té per equació

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2, \qquad (41)$$

i bastarà eliminar la t entre dues de les equacions (40) per a obtenir una altra equació que junt amb l'anterior ens determinarà dita trajectoria.

Anem a estudiar alguns casos particulars.

1.er El punt està situat sobre ox', i per tant, $b=c=o$.

En aquest cas les equacions (40) se converteixen en

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{a\ \mathrm{tg}\,\delta}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\delta+\sin^2\omega t}} \\ y&=\frac{a\sin^2\omega t}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\delta+\sin^2\omega t}} \\ z&=\frac{a\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}} \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

i la trajectoria del punt és evidentment la intersecció d'una de les fulles del con (27) *amb l'esfera* $x^2+y^2+z^2=a^2$, *i que*, com se sab, *és una rama de la curva anomenada el·lipsa esfèrica*. Un dels semi-eixos d'aquesta serà $b=45^\circ-\frac{\delta}{2}$, i l'altra c se deduirà fàcilment mitjançant (28), resultant

$$\mathrm{tg}\,c=\sqrt{\frac{1-\sin\delta}{2\sin\delta}}=\frac{\sin\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{\sin\delta}}.$$

Eliminant la z entre (27) i $x^2+y^2+z^2=a^2$, obtindrem la projecció d'aquesta curva sobre'l plànol xoy que és un troç de la hipèrbola donada per l'equació

$$x^2-xy^2-a^2\ \mathrm{tg}'\,\delta=0$$

limitat per l'eix ox i la prolongació de OB. Les asimptotes d'aquesta hipèrbola són l'eix oy i una perpendicular a OB per l'origen.

La projecció de dita el·lipsa esfèrica sobre'l plànol $y'oz'$ tindrà per equació

$$(y^2+z^2)^2\mathrm{tg}^2\,\delta+y^2(y^2+z^2-a^2)=0 \qquad (43)$$

obtinguda eliminant la x entre (27) i (41). La forma de la curva corresponent és

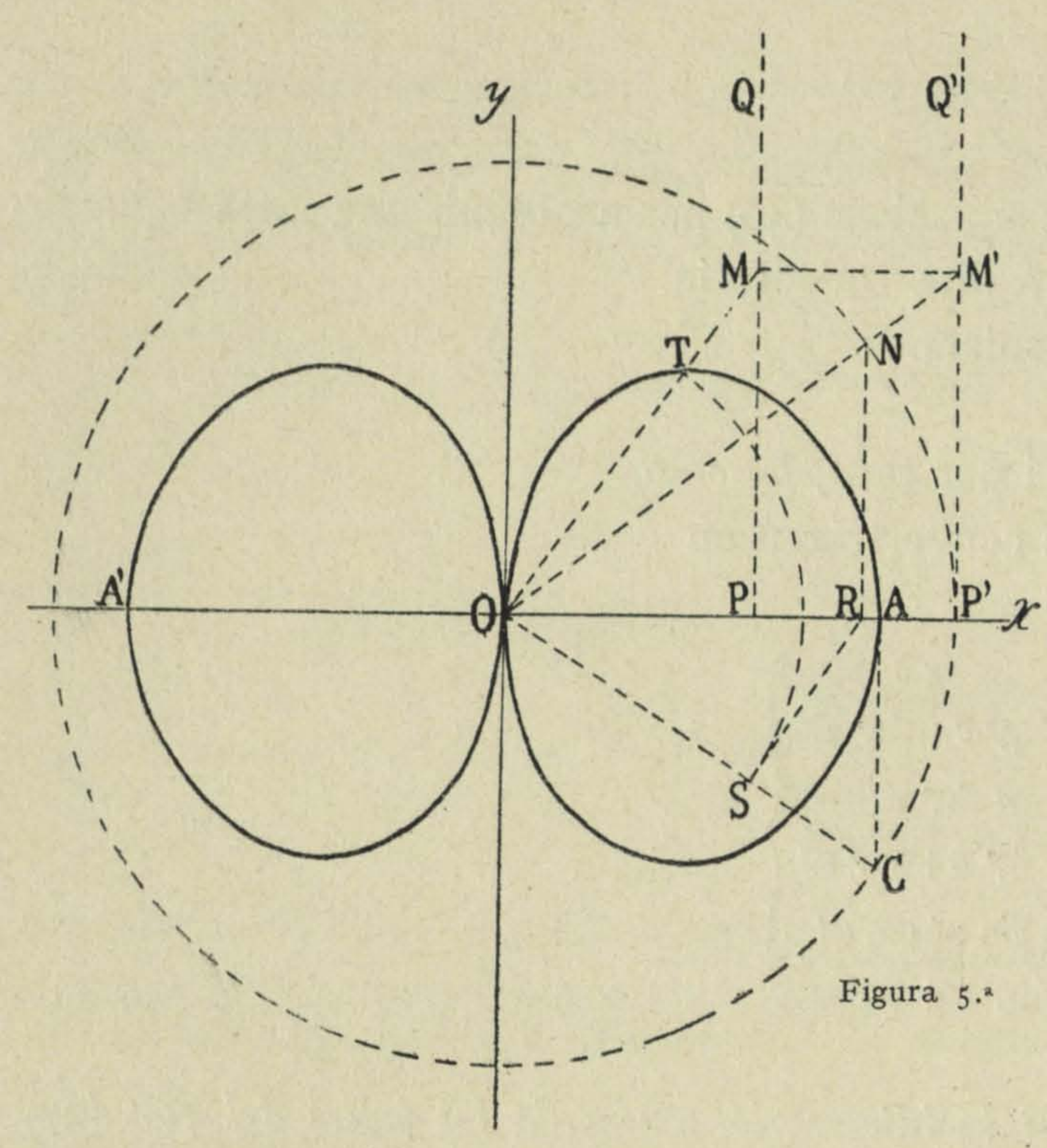

Figura 5.ª

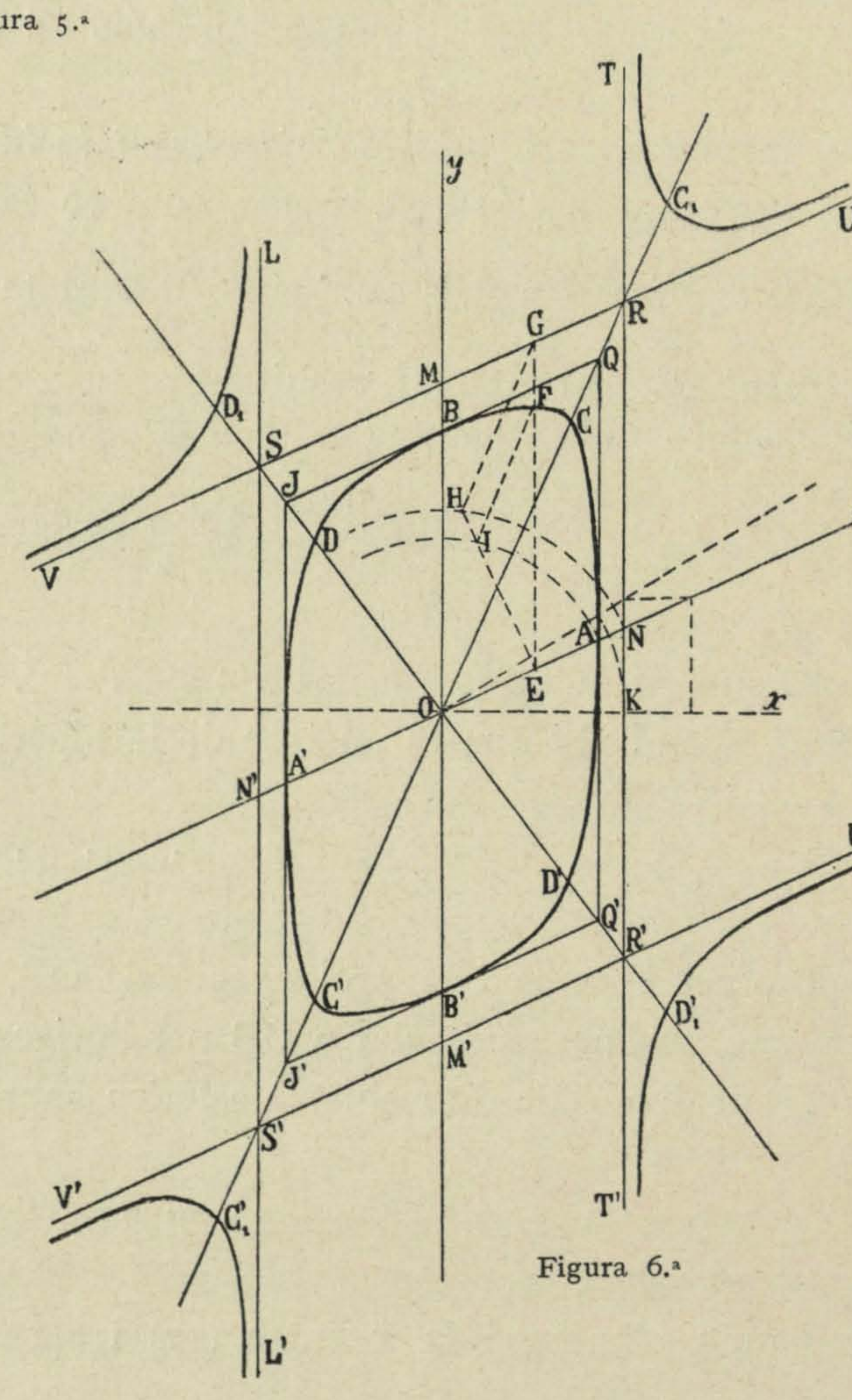

Figura 6.ª

la indicada a la fig. 5.ª; l'òval de l'esquerra és la projecció de la trajectoria del punt (a, o, o) i el de la dreta, la del punt $(-a, o, o)$.

2ón Suposem, ara, un punt del plànol $y'oz'$, o sigui $a=o$. Les fórmules (40) se convertiràn en les següents:

$$\left.\begin{aligned} x&=-c\frac{\sin\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}} \\ y&=b\cos\omega t-c\frac{\operatorname{tg}\delta\sin\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}} \\ z&=b\sin\omega t+c\frac{\operatorname{tg}\delta\cos\omega t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Eliminem la t entre la primera i la segona; de la primera s'obté:

$$\sin^2\omega t=\frac{x^2\operatorname{tg}^2\delta}{c^2-x^2} \quad \text{i} \quad \cos\omega t=\pm\sqrt{\frac{c^2-x^2(1+\operatorname{tg}^2\delta)}{c^2-x^2}};$$

substituint a la segona,

$$y=\pm b\sqrt{\frac{c^2-x^2(1+\operatorname{tg}^2\delta)}{c^2-x^2}}+c\operatorname{tg}\delta.x \quad ; \quad (y-c\operatorname{tg}\delta^2x)^2=6^2\frac{c^2-x^2(1+\operatorname{tg}^2\delta)}{c^2-x^2}$$

o bé

$$(y-c\operatorname{tg}\delta.x)^2\,(c^2-x^2)\cos^2\delta=b^2\,(c^2\cos^2\delta-x^2). \tag{45}$$

equació d'una quàrtica la forma de la qual és la de la curva representada a la fig. 6.ª i que junt amb $x^2+y^2+z^2=b^2+c^2$ ens determina la trajectoria del punt (b, c). S'ha de fer notar que *la projecció de la trajectoria del punt* (b, c) *està representada únicament per l'òval* ABA'B'. Les rames hiperbòliques, si bé satisfàn a l'equació (45), no corresponen a la trajectoria de cap punt.

Amb ajuda de les fórmules (40) pot trobar-se també la velocitat v d'un punt qualsevol, ja que aquest sabem que té per expressió

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Anem-la a buscar en els casos particulars acabats de considerar.

1.^{er} Si $b=c=o$, tenim

$$\frac{dx}{dt}=-a\ \mathrm{tg}\,\delta\,\frac{\sin\omega t\cos\omega t}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\omega$$

$$\frac{dy}{dt}=-a\omega\frac{2\sin\omega t\cos\omega t\,(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)-\sin^2\omega t\,.\,\sin\omega t\cos\omega t}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=-a\omega\frac{2\sin\omega t\cos\omega t\ \mathrm{tg}^2\delta+\sin^3\omega t\cos\omega t}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dz}{dt}=a\omega\frac{(\cos^2\omega t-\sin^2\omega t)\,(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)-\sin\omega t\cos\omega t.\sin\omega t\cos\omega t}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=a\omega\frac{\cos^2\omega t\ \mathrm{tg}^2\delta-\sin^2\omega t\ \mathrm{tg}^2\delta-\sin^4\omega t}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$v^2=a^2\omega^2\frac{\mathrm{tg}^2\delta\sin^2\omega t\cos^2\omega t+4\sin^2\omega t\cos^2\omega t\ \mathrm{tg}^4\delta+\sin^6\omega t\cos^2\omega t+4\sin^4\omega t\cos^2\omega t\ \mathrm{tg}^2\delta+\cos^4\omega t\ \mathrm{tg}^4\delta+}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}$$

$$\frac{+\sin^4\omega t\ \mathrm{tg}^4\delta+\sin^8\omega t-2\sin^2\omega t\cos^2\omega t\ \mathrm{tg}^4\delta-2\cos^2\omega t\sin^4\omega t\ \mathrm{tg}^2\delta+2\sin^6\omega t\ \mathrm{tg}^2\delta}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}.$$

$$v^2=a^2\omega^2\frac{\mathrm{tg}^2\delta\sin^2\omega t\cos^2\omega t+\mathrm{tg}^4\delta+\sin^6\omega t+2\sin^4\omega t\cos^2\omega t\ \mathrm{tg}^2\delta+2\sin^6\omega t\ \mathrm{tg}^2\delta.}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}=$$

$$=a^2\omega^2\frac{\mathrm{tg}^2\delta\sin^2\omega t\,(\cos^2\omega t+2\sin^2\omega t)+\mathrm{tg}^4\delta+\sin^6\omega t}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}=a^2\omega^2\frac{\mathrm{tg}^2\delta\sin^2\omega t+\mathrm{tg}^2\delta\sin^4\omega t+\mathrm{tg}^4\delta+\sin^6\omega t}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)}=$$

$$=a^2\omega^2\frac{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^4\omega t)\,(\sin^2\omega t+\mathrm{tg}^2\delta)}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}=a^2\omega^2\frac{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^4\omega t)}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^2}$$

i finalment

$$v=a\omega\frac{\sqrt{\mathrm{tg}^2\delta+\sin^4\omega t}}{\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t}\tag{46}$$

2.^{on} Suposant $a=0$, tenim,

$$\frac{dx}{dt}=-c\omega\frac{\cos\omega t\ (\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)-\sin^2\omega t\cos\omega t}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}=-c\omega\frac{\cos\omega t\ \mathrm{tg}^2\delta}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\left[b\sin\omega t+c\ \mathrm{tg}\,\delta\frac{\cos\omega t\ \mathrm{tg}^2\delta}{(\mathrm{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\right]\omega$$

$$\frac{dz}{dt}=\left[b\cos\omega t-c\operatorname{tg}\delta\frac{\sin\omega t\,(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)+\sin\omega t\cos^2\omega t}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\right]\omega=\left[b\cos\omega t-c\operatorname{tg}\delta\frac{\sin\omega t\,(\operatorname{tg}^2\delta+1)}{\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\right]\omega$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=c^2\omega^2\frac{\cos^2\omega t\operatorname{tg}^4\delta}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\omega^2\left[b^2\sin^2\omega t+c^2\operatorname{tg}^2\delta\frac{\cos^2\omega t\operatorname{tg}^4\delta}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}+2\,bc\operatorname{tg}^3\delta\frac{\sin\omega t\cos\omega t}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\omega^2\left[b^2\cos^2\omega t+c^2\operatorname{tg}^2\delta\frac{\sin^2\omega t\,(1+\operatorname{tg}^2\delta)^2}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}-2\,bc\frac{\sin\omega t\cos\omega t\operatorname{tg}\delta\,(1+\operatorname{tg}^2\delta)}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$v^2=\omega^2\left[b^2+\frac{c^2\cos^2\omega t\operatorname{tg}^4\delta}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}(1+\operatorname{tg}^2\delta)+\frac{c^2\operatorname{tg}^2\delta\sin^2\omega t\,(1+\operatorname{tg}^2\delta)^2}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}-\frac{2\,bc\sin\omega t\cos\omega t\operatorname{tg}\delta}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\right]=$$

$$=\omega^2\left[b^2+c^2\operatorname{tg}^4\delta+c^2\operatorname{tg}^6\delta+\frac{c^2\operatorname{tg}^2\delta\sin^2\omega t}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}+c^2\operatorname{tg}^4\delta\sin^2\omega t-\frac{2\,bc\sin\omega t\cos\omega t\operatorname{tg}\delta}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\right]=$$

$$=\omega^2\left[b^2+\frac{c^2\operatorname{tg}^2\delta}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^3}(\operatorname{tg}^2\delta+\operatorname{tg}^4\delta+\sin^2\omega t+\operatorname{tg}^2\delta\sin^2\omega t)-2\,bc\frac{\sin\omega t\cos\omega t\operatorname{tg}\delta}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\right]=$$

$$V^2=\omega^2\left[b^2+\frac{c^2\operatorname{tg}^2\delta\,(1+\operatorname{tg}^2\delta)}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^2}-bc\frac{\operatorname{tg}\delta\sin 2\omega t}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

i finalment

$$v=\omega\sqrt{b^2+\frac{c^2\sin^2\delta}{(\sin^2\delta+\sin^2\omega t\cos^2\delta)^2}-bc\frac{\operatorname{tg}\delta\sin 2\omega t}{(\operatorname{tg}^2\delta+\sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}}\,. \tag{47}$$

Cas particular. — Si suposem $b=0$, el punt considerat estarà situat a l'eix oz' i la seva velocitat serà

$$v=c\omega\frac{\sin\delta}{\sin^2\delta+\sin^2\omega t\cos^2\delta}$$

i per tant la velocitat angular d'aquest eix, tindrà per expressió

4

$$\omega' = \frac{v}{c} = \omega \frac{\sin \delta}{\sin^2 \delta + \sin^2 \omega t \cos^2 \delta}$$

resultat ja trobat directament en el capítol II.

V

Anem a fer algunas consideracions sobre les quàrtiques

$$x^2 y^2 + (x^2 + y^2) d^2 - d^4 \cot^2 \delta = 0 \quad ; \quad (x^2 + y^2) \operatorname{tg}^2 \delta + x^2 (x^2 + y^2 - a^2) = 0$$

$$\text{i} \qquad (y - c \operatorname{tg} \delta)^2 (c^2 - x^2) \cos^2 \delta - b^2 (c^2 \cos^2 \delta - x^2) = 0.$$

1.ª $$x^2 y^2 + (x^2 + y^2) d^2 - d^4 \cot^2 \delta = 0 \qquad (48)$$

Aquesta equació canviant x i y respectivament en y i z, representa, com hem vist, la secció produida en el con, lloc geomètric dels eixos instantanis de rotació del disc p, referits als eixos movibles x', y', z', per un plànol perpendicular a l'eix ox', a la distancia d.

Donada la homogeneitat de l'equació respecte a x, y i d, podrem simplificar l'estudi de la curva suposant $d=1$. Així tindrem $x^2y^2+x^2+y^2-\cot^2 \delta=0$ i bastarà multiplicar per d les expressions dels diferents valors de x i y que trobem referents a punts de la curva, per a obtenir els corresponents a l'equació (48).

Per a estudiar l'equació $x^2y^2+x^2+y^2-\cot^2 \delta=0$ (49), comencem per a buscar la naturalesa dels seus punts a l'infinit valent-nos de les asimptotes. Aplicant els procediments coneguts trobem que totes són imaginaries i que tenen per equacions

$$x = \pm i \quad \text{i} \quad y = \pm i,$$

és a dir, que dugues són paral·leles a l'eix oy i les altres ho són al ox. D'aquí se dedueix que'ls punts a l'infinit de la curva són dobles i són precisament els impropis dels eixos coordenats.

De l'examen de l'equació (49) resulta que l'origen de coordenades és el centre de la curva, i que tant els eixos coordenats com les bissectrius dels angles que formen, són eixos de la curva. Aquesta és tallada per xx' i yy', respectivament en els punts A i A', B i B' situats a la distancia $\cot \delta$ de l'origen.

La intersecció de la curva amb les bissectrius dels eixos coordenats la obtindrem fent $y = \pm x$ en l'equació de la curva; tindrem:

$$x^4+2x^2-\cot^2\delta=0 \quad ; \quad x^2=-1\pm\sqrt{1+\cot^2\delta}=-1\pm\frac{1}{\sin\delta}=\frac{-\sin\delta\pm 1}{\sin\delta}.$$

$$x^2=\begin{cases}\dfrac{1-\sin\delta}{\sin\delta}\\[2ex] -\dfrac{1+\sin\delta}{\sin\delta}\end{cases}$$

El valor $-\frac{1+\sin\delta}{\sin\delta}$ dóna valors imaginaris per a x. En canvi el primer ens dóna els valors reals $x=\pm\sqrt{\frac{1-\sin\delta}{\sin\delta}}$. Els punts corresponents C, C′, D i D′ estaràn a una distancia de O, igual a $\sqrt{2\frac{1-\sin\delta}{\sin\delta}}$.

Separant y en la equació considerada, tindrem

$$y=\pm\sqrt{\frac{\cot^2\delta-x^2}{1+x^2}}$$

i desseguida es veu que per $|x|$ superior a $\cot\delta$, la y pren valors imaginaris, i lo mateix passa amb $|y|$. Resulta, doncs, que la curva està tota ella compresa dins d'un quadrat, els costats del qual, paral·lels als eixos coordenats, passen per A, A′, B i B′.

Busquem la primera derivada que serà

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(1+\cot^2\delta)}{\sqrt{(\cot^2\delta-x^2)(1+x^2)^3}}.$$

En els punts B i B′, tenim respectivament $\begin{cases}x=0\\ y=\cot\delta\end{cases}$ i $\begin{cases}x=0\\ y=-\cot\delta,\end{cases}$ $\frac{dy}{dx}$ serà zero i, per tant, la tangent serà paral·lela a l'eix ox. Igualment en els punts A i A′ la tangent és paral·lela a l'eix oy. Com que la curva ha d'estar compresa dins del quadrat abans esmentat, resulta que en dits punts ha d'ésser còncava respecte al centre O.

Per acabar de determinar la forma de la curva, mirarem si hi ha algun punt d'inflexió. Per això busquem la segona derivada i igualem-la a zero.

$$\frac{d^2y}{\delta x^2}=-(1+\cot^2\delta)\frac{(\cot^2\delta-x^2)(1+x^2)^3-x\left[-x(1+x^2)^3+3x(\cot^2\delta-x^2)(1+x^2)^3\right]}{\sqrt{(\cot^2\delta-x^2)^3(1+x^2)^9}}=$$

$$=-(1+\cot^2\delta)\frac{(\cot^2\delta-x^2)(1+x^2)-x^2\left[3(\cot^2\delta-x^2)-(1+x^2)\right]}{\sqrt{(\cot^2\delta-x^2)^3(1+x^2)^5}}$$

$$(\cot^2\delta - x^2)(1+x^2) - x^2[3(\cot^2\delta - x^2) - 1 - x^2] = 0$$

$$3\,\mathrm{tg}^2\,\delta . x^4 - 2x^2 + 1 = 0.$$

Resolent aquesta equació, tindrem els valors de x que corresponen a punts d'inflexió i que són

$$x = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\,\delta}}{3\,\mathrm{tg}^2\,\delta}}. \tag{50}$$

Com que a cada valor de x en corresponen dos d'iguals i de signe contrari per a la y, resultaràn vuit punts d'inflexió. Aquests seràn reals sempre que $1 - 3\,\mathrm{tg}^2\,\delta > 0$ o sigui quan $\delta < 30^o$, i seràn imaginaris en cas contrari. Quan se tingui $\delta = 30^o$, els vuit punts se redueixen a quatre, essent cada un d'aquests la degeneració de dos dels anteriors; en aquest cas, doncs, tindrem quatre punts d'*ondulació* reals. Aquests punts corresponen a $x = \pm 1$, cosa que'ns diu que'ls quatre punts d'ondulació estàn situats sobre les bissectrius dels angles que formen els eixos coordenats.

Resumint, quan $\delta < 30^o$, la forma de la curva serà la indicada a la fig. 2.ª; si $\delta = 30^o$, tindrem la forma de la fig. 3.ª; i finalment quan $\delta > 30$, resulta la curva de la fig. 4.ª.

En el cas $\delta < 30^o$, hi haurà evidentment quatre bitangents reals que, donada la simetría de la curva respecte a les bissectrius, seràn dues a dues respectivament perpendiculars a aquestes. Les equacions de les bitangents podrem trobar-les fàcilment referint la curva a les bissectrius, i això és el que anem a fer.

Les fórmules de transformació seràn

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \quad , \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

per tant, substituint a (49), tindrem

$$x'^4 + y'^4 - 2x'^2 y'^2 + 4x'^2 + 4y'^2 - 4\cot^2\delta = 0 \quad ; \quad y'^4 - 2y'^2(x'^2 - 2) + (x'^4 + 4x'^2 - 4\cot^2\delta) = 0$$

$$y' = \pm\sqrt{x'^2 - 2 \pm \sqrt{(x'^2 - 2)^2 - x'^4 - 4x'^2 + 4\cot^2\delta}} = \pm\sqrt{x'^2 - 2 \pm 2\sqrt{1 + \cot^2\delta} - 2x'^2}. \tag{51}$$

Els quatre valors que, en general, trobem per a y, queden reduits a dos iguals i de signe contrari, quan $1 + \cot^2\delta - 2x'^2 = 0$, o sigui quan

$$x' = \pm\sqrt{\frac{1 + \cot^2\delta}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\sin\delta}, \tag{52}$$

igualtat que no serà més que l'equació de les bitangents paral·leles a l'eix oy'. Anàlogament trobaríem que les altres dues bitangents tenen per equació

$$y' = \pm \frac{1}{\sqrt{2 \sin \delta}}. \tag{53}$$

Si volem les equacions d'aquestes bitangents referides als eixos primitius, bastarà usar les següents fórmules de transformació

$$x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \quad : \quad y' = \frac{y'-x'}{\sqrt{2}},$$

i resultarà:

$$(x+y) \sin \delta \mp 1 = 0, \tag{54}$$

per a les bitangents perpendiculars a la bissectriu CC'; i

$$(y-x) \sin \delta \mp 1 = 0, \tag{55}$$

per a les perpendiculars a la bissectriu DD'.

Anem a buscar, ara, l'expressió del radi de curvatura.

Tenim

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \frac{y^2+1}{x^2+1},$$

i, després de varies simplificacions

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y^2+1)[y^2+x^2-2x^2y^2]}{y^3(x^2+1)^2}.$$

Substituint aquests valors en l'expressió general

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

resulta

$$\rho = \frac{\left[y^2(x^2+1)^2+x^2(y^2+1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{(y^2+1)(x^2+1)(y^2+x^2-2x^2y^2)}. \tag{56}$$

En els punts A i A', B i B', s'obté, fent successivament $\begin{cases} x=\pm\cot\delta \\ y=0 \end{cases}$ i $\begin{cases} x=0 \\ y=\pm\cot\delta, \end{cases}$

$$\rho_A=\frac{1}{2}\sin 2\,\delta.$$

Per a obtenir el radi de curvatura en els punts C i C', D i D', farem $y=x$, resultant

$$\rho_C=\sqrt{2}\,\frac{x(1+x^2)}{1-x^2},$$

i recordant que quan $y=x$, $y=x=\sqrt{\frac{1-\sin\delta}{\sin\delta}}$, tindrem

$$\rho_C=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1-\sin\delta}{\sin\delta}}\,\frac{\frac{1}{\sin\delta}}{\frac{2\sin\delta-1}{\sin\delta}}=\sqrt{2\,\frac{1-\sin\delta}{\sin\delta}}\,\frac{1}{2\sin\delta-1}=\frac{OC}{2\sin\delta-1}.$$

Construcció de la curva. — Figs. 2.ª, 3.ª i 4.ª Construirem una circumferencia de radi igual a $d\cot\delta$ i traçarem dos diàmetres perpendiculars entre ells. Els punts A i A', B i B' d'intersecció d'aquests amb la circumferencia seràn evidentment punts de la curva. Sobre un de dits diàmetres, el B B', per exemple, pendrem la magnitut OP igual a d. Per a buscar el punt de la curva corresponent a una abscissa donada, OM, per exemple, traçarem la recta MN paral·lela a OB, unirem P amb M i N, a partir de M pendrem una magnitut MR igual a OP i des de M traçarem una paral·lela a PN. El punt S d'intersecció d'aquesta amb MN serà el que buscàvem. En efecte, de la construcció es desprèn

$$\frac{SM}{NM}=\frac{RM}{PM}.$$

Però com que $SM=y$, $MN=\sqrt{d^2\cot^2\delta-x^2}$, $RM=d$ i $PM=\sqrt{d^2+x^2}$, se tindrà

$$y=d\,\frac{\sqrt{d^2\cot^2\delta-x2}}{\sqrt{d^2+x^2}},$$

que és l'expressió de la ordenada d'un punt de la curva en funció de l'abscissa (1).

(1) El lloc geomètric dels punts R és una concoide de Nicomedes.

2.ª $$(x^2+y^2)^2 \operatorname{tg}^2 \delta + (x^2+y^2-a^2)\, x^2 = 0. \tag{57}$$

Aquesta equació, canviant $x\ y$ respectivament en $y\ z$, representa, com ja sabem, la projecció sobre'l plànol yoz de la linia descrita per un punt de ox', essent, per tant, la projecció d'una el·lipsa esfèrica.

La curva considerada no té asimptotes paral·leles als eixos coordenats com se pot veure fàcilment. Aplicant els procediments ordinaris per a buscar les no paral·leles, resulta que aquestes totes són imaginaries i passen per l'origen tenint les següents equacions

$$y = \pm ix \quad \text{i} \quad y = \pm \frac{i}{\sin \delta} x.$$

Les equacions $y = \pm ix$ representen dues rectes isòtropes, de lo qual resulta que'ls punts circulars a l'infinit pertanyen a la curva i a més que l'origen és un focus singular. Que'ls punts circulars pertanyen a la curva podía haver-se deduit directament de la seva equació. La *quàrtica considerada és*, doncs, *circular*.

Examinant l'equació (57), desseguida es veu que la curva passa per l'origen, i que'ls eixos coordenats també són eixos de la curva. Fent $y=0$, resulta $y^4=0$, o sigui que l'eix oy té quatre punts comuns amb la curva que coincideixen amb l'origen.

Si fem $y=0$, tenim

$$x^4 \operatorname{tg}^2 \delta + x^2 (x^2 - a^2) = 0,$$

$$x^2 (x^2 \operatorname{tg}^2 \delta + x^2 - a^2) = 0,$$

d'on

$$x = 0 \quad \text{i} \quad x = \pm a \cos \delta.$$

lo qual ens diu que l'eix de les x, a més de l'origen, té comú amb la curva dos punts A i A′ que disten de O la magnitut $a \cos \delta$.

Si referim la curva a coordenades polars, l'equació considerada se convertirà en

$$r^4 \operatorname{tg}^2 \delta + r^2 \cos^2 \theta\, (r^2 - a^2) = 0,$$

o bé

$$r^2 \left[r^2 (\operatorname{tg}^2 \delta + \cos^2 \theta) - a^2 \cos^2 \theta \right] = 0,$$

d'on

$$r^2 = 0 \quad \text{i} \quad r^2 = \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \delta + \cos^2 \theta}. \tag{58}$$

L'equació $r^2=0$ ens diu que l'origen és un punt doble. La segona pot transformar-se com segueix:

$$r^2 = \frac{a^2}{\frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{\cos^2 \theta} + 1} = \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 \delta (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) + 1} = \frac{a^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta + \operatorname{tg}^2 \delta \operatorname{tg}^2 \theta},$$

$$r^2 = \frac{a^2 \cos^2 \delta}{1 + \sin^2 \delta \operatorname{tg}^2 \theta}. \tag{59}$$

Fent variar θ de 0 a 90^0, la r disminueix des de $a \cos \delta$ a 0.

Busquem l'angle V que la tangent a la curva forma amb el radi vector que va al punt de contacte. Tindrem, derivant l'equació (59)

$$r \frac{dr}{d\theta} = -\frac{a^2 \cos^2 \delta}{(1 + \sin^2 \delta \operatorname{tg}^2 \theta)^2} \times \frac{\sin^2 \delta \operatorname{tg} \theta}{(1 + \sin^2 \delta \operatorname{tg}^2 \theta) \cos^2 \theta} = -r^2 \times \frac{\sin^2 \delta \operatorname{tg} \theta}{(1 + \sin^2 \delta \operatorname{tg}^2 \theta) \cos^2 \theta}$$

$$\operatorname{tg} V = \frac{dr}{d\theta} = -\frac{(1 + \sin^2 \delta \operatorname{tg}^2 \theta) \cos^2 \theta}{\sin^2 \delta \operatorname{tg} \theta} = -\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \delta \sin^2 \theta}{\sin^2 \delta \operatorname{tg} \theta} = -\frac{\cos^2 \theta \cos^2 \delta + \sin^2 \delta}{\sin^2 \delta \operatorname{tg} \theta}$$

$$\operatorname{tg} V = -\frac{1 + \cot^2 \delta \cos^2 \theta}{\operatorname{tg} \theta}. \tag{60}$$

Fent variar la θ de 0 a 90^0, tg V varía de $-\infty$ a 0, i, per tant, V variarà continuament de 90^0 a 180^0. Això ens diu que en l'arc de curva corresponent no hi haurà cap punt d'inflexió i com a consequencia, que tot ell serà concau respecte al eix ox. Donada la simetría d'aquesta respecte a ox i oy, podrem dir que constarà de dos òvals, un a la dreta i altre a l'esquerra de oy, que seràn tangents a l'origen. Aquest serà, doncs, un punt *tacnodal* i la curva tindrà dues bitangents reals, paral·leles a l'eix de les x i els punts de contacte de les quals seràn respectivament els més alts i els més baixos. Anem a determinar aquestes rectes.

Agafem l'equació cartesiana i separem x^2; tindrem:

$$x^4 (1 + \operatorname{tg}^2 \delta) + x^2 (2 y^2 \operatorname{tg}^2 \delta + y^2 - a^2) + y^4 \operatorname{tg}^2 \delta = 0.$$

$$x^2 = \frac{-(2 y^2 \operatorname{tg}^2 \delta + y^2 - a^2) \pm \sqrt{(2 y^2 \operatorname{tg}^2 \delta + y^2 - a^2)^2 - 4 y^4 \operatorname{tg}^2 \delta (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)}}{2 (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)}$$

$$x^2 = \frac{-(2 y^2 \operatorname{tg}^2 \delta + y^2 - a^2) \pm \sqrt{y^4 - 2 a^2 y^2 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \delta) + a^4}}{2 (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)} \tag{61}$$

Aquesta fórmula ens dóna per a x quatre valors que's reduiràn a dos quan $y^4 - 2 a^2 y^2 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \delta) + a^4 = 0$. Els valors de y que satisfacin aquesta equació, ens donaràn, evidentment les equacions de les bitangents que busquem. Evidentment tindrem

$$y^2=a^2(1+2\operatorname{tg}^2\delta)\pm\sqrt{a^4(1+2\operatorname{tg}^2\delta)^2-a^4}=a^2(1+2\operatorname{tg}^2\delta)\pm 2a^2\operatorname{tg}\delta\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}$$

$$y^2=a^2\left[1+2\frac{\sin^2\delta}{\cos^2\delta}\pm 2\frac{\sin\delta}{\cos^2\delta}\right]=a^2\frac{1+\sin^2\delta\pm 2\sin\delta}{\cos^2\delta}=a^2\frac{(1\pm\sin\delta)^2}{\cos^2\delta}\quad;\quad y=\pm a\frac{1\pm\sin\delta}{\cos\delta}$$

o sigui

$$y=\pm a\frac{1+\sin\delta}{\cos\delta}=\pm a\cot\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)$$

i

$$y=\pm a\frac{1-\sin\delta}{\cos\delta}=\pm a\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)\qquad(62)$$

lo qual ens diu que hi ha quatre bitangents reals. Busquem, ara, les abscisses dels punts de contacte, substituint els valors anteriors a la igualtat (61). Tindrem

$$x^2=\frac{-(2y^2\operatorname{tg}^2\delta+y^2-a^2)}{2(1+\operatorname{tg}^2\delta)}=-a^2\frac{2[1\pm\sin\delta]^2\operatorname{tg}^2\delta t.(1\pm\sin\delta)^2-\cos^2\delta}{2}=$$

$$\frac{a^2}{2}\cos^2\delta-(1\pm\sin\delta)^2[1+2\operatorname{tg}^2\delta]=a^2\frac{\cos^4\delta-(1+\sin^2\delta\pm 2\sin\delta)(1+\sin^2\delta)}{2\cos^2\delta}=$$

$$=a^2\frac{\cos^4\delta-(1+\sin^2\delta)^2\mp 2\sin\delta(1+\sin^2\delta)}{2\cos^2\delta.}=a^2\frac{(\cos^2\delta-1-\sin^2\delta)\mp\sin\delta(1+\sin^2\delta)}{\cos^2\delta.}=$$

$$=a^2\frac{-2\sin^2\delta\mp\sin\delta(1+\sin^2\delta)}{\cos^2\delta}=a^2\sin\delta\frac{-2\sin\delta\mp(1+\sin^2\delta)}{\cos^2\delta}$$

d'on

$$x^2=-a^2\frac{\sin\delta}{\cos^2\delta}(1+\sin\delta)^2\quad\text{i}\quad x^2=\frac{a^2\sin\delta}{\cos^2\delta}(1-\sin\delta)^2$$

i finalment

$$x=\pm\frac{a(1+\sin\delta)}{\cos\delta}\sqrt{\sin\delta}.i\quad\text{i}\quad x=\pm\frac{a(1-\sin\delta)}{\cos\delta}\sqrt{\sin\delta}.$$

o bé

$$x=\pm a\cot\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{\sin\delta}\,i\quad\text{i}\quad x=\pm a\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{\sin\delta}.$$

Aquestes igualtats ens diuen que hi ha dues bitangents reals $y=\pm a\cot\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)$ que tenen els punts de contacte imaginaris, ja que la llur abscissa és

$$x=\pm a\cot\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{\sin\delta}.i.$$

Les altres bitangents $y=\pm a\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)$ ho són en els punts que tenen per abscissa

$$x=\pm a\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{\sin\delta}.$$

Els radis vectors d'aquests, que, com hem dit abans, són els més alts i més baixos de la curva, tindràn el següent valor:

$$r=a \operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{1+\sin\delta}=a\sqrt{1-\sin\delta}$$

o bé

$$r=\sqrt{2}\,.\; a \sin\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right).$$

Recordant que l'el·lipsa esfèrica, de la qual és projecció la curva que estem estudiant, és intersecció del con (27) amb l'esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, se troba fàcilment que *la ordenada dels punts més alts i més baixos és igual, en valor absolut, a l'eix petit de l'el·lipsa d'intersecció del con amb un plànol perpendicular al seu eix i que sigui tangent a l'esfera.*

Anem a buscar ara l'àrea limitada per un dels dos òvals que constitueixen la curva.

$$\text{Área que busquem}=\mathrm{A}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\cos^2\delta}{1+\sin^2\delta\operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta$$

Suposem el següent canvi de variable, $\sin\delta\operatorname{tg}\theta=z$, tindrem

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{z}{\sin\delta}\;;\quad \frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{dz}{\sin\delta}.\;:\quad \cos^2\theta=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{\sin^2\delta}{\sin^2\delta+z^2}\;;\quad d\theta=\frac{\sin\delta\,dz}{\sin^2\delta+z^2}.$$

$$\mathrm{A}=a^2\int_0^\infty\frac{\cos^2\delta\sin\delta\,dz}{(1+z^2)(z^2+\sin^2\delta)}=a^2\int_0^\infty\frac{\sin\delta\,dz}{z^2+\sin^2\delta}-a^2\sin\delta\int_0^\infty\frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=a^2\left[\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{z}{\sin\delta}\right]_0^\infty-a^2\sin\delta\left[\operatorname{arc}\operatorname{tg}z\right]_0^\infty=\frac{\pi a^2}{2}(1-\sin\delta)$$

i finalment

$$\mathrm{A}=\pi a^2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right). \tag{63}$$

Construcció de la curva. Tracem una circumferencia de radi a i considerem en ella dos diàmetres perpendiculars ox i oy (fig. 5.ª), i dibuixem una recta oc que formi amb ox un angle igual a δ. Tracem la perpendicular CA a ox i el punt A serà de la curva. Prenem la magnitut OP=CA sobre l'eix ox i tracem la perpendicular PQ a ox i igualment tracem la perpendicular P'Q'. Per a buscar el punt de la curva que correspòn a un valor qualsevol de θ, farem com segueix: Dibuixem un radi vector qualsevol OM, pel punt M, d'intersecció amb PQ, tracem una paral·lela a OA que tallarà en M′ a la recta P′Q′; unirem M′ amb O i pel punt N comú amb la circumferencia tracarem una perpendicular NR a ox, per R, una altra RS a OC, i portant la magnitut RS sobre el radi vector considerat OM, obtindrem el punt T que serà el que buscàvem. En efecte, anomenant α l'angle NOA, resulta

$$r = OT = OS = OR\cos\delta = a\cos\alpha\cos\delta. \quad ; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{M'P'}{a} = \frac{MP}{a} = \frac{OP\operatorname{tg}\theta}{a}.$$

Però

$$OP = CA = a\sin\delta \quad ; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\delta\operatorname{tg}\theta}{a} = \sin\delta\operatorname{tg}\theta$$

d'on

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\delta\operatorname{tg}^2\theta}} \quad \text{i} \quad r = \frac{a\cos\delta}{\sqrt{1+\sin^2\delta\operatorname{tg}^2\theta}}.$$

Tenint present que'l radi vector corresponent als punts més alts i més baixos és $r=\sqrt{2}\,a\sin\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)$, i que la seva ordenada és $a\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)$, per una construcció molt senzilla poden trobar-se directament.

3.ª $$(y-c\operatorname{tg}\delta)^2(c^2-x^2)\cos^2\delta-b^2(c^2\cos^2\delta-x^2)=0.$$

Aquesta equació, com hem vist, representa la projecció sobre'l plànol xy de la trajectoria d'un punt del plànol $y'oz'$.

Comencem per a buscar les seves asimptotes. Com se pot veure fàcilment, n'hi ha dugues de paral·leles a l'eix de les y, les equacions de les quals són

$$x=c \quad \text{i} \quad x=-c,$$

representades a la fig. 6 per les rectes TT′ i LL′.

A més, seguint els procediments usuals, se'n troben dugues que no són paral·leles a cap dels eixos coordenats i que tenen les següents equacions:

$$y=c\operatorname{tg}\delta.x+\frac{b}{\cos\delta} \quad \text{i} \quad y=c\operatorname{tg}\delta.x-\frac{b}{\cos\delta} \qquad (65)$$

representades per les rectes UV i U′ V′.

La curva tindrà, doncs, dos punts dobles reals a l'infinit. Per a fer més senzill l'estudi de la curva, la referirem a uns eixos oblics constituïts per l'eix oy antic i per un nou eix ox' que sigui la recta $y=c\ \mathrm{tg}\ \delta . x$. Tindrem evidentment,

$$y-c\ \mathrm{tg}\ \delta=y' \quad , \quad x=x' \cos\alpha=x' \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{x'}{\sqrt{1+c^2\ \mathrm{tg}^2\delta}}$$

$$y'^2\left(c^2-\frac{x'^2}{1+c^2\ \mathrm{tg}^2\delta}\right)\cos^2\delta-b^2\left(c^2\cos^2\delta-\frac{x'^2}{1+c^2\ \mathrm{tg}^2\delta}\right)=0$$

$$y'^2\left[c^2(1+c^2\ \mathrm{tg}^2\delta)-x'^2\right]\cos^2\delta-b^2\left[c^2(1+c^2\ \mathrm{tg}^2\delta)\cos^2\delta-x'^2\right]=0.$$

Suposant $c^2(1+c^2\ \mathrm{tg}^2\delta)=c'^2$, resultarà com equació de la curva considerada referida als nous eixos

$$y'^2(c'^2-x'^2)\cos^2\delta-b^2(c'^2\cos^2\delta-x'^2)=0. \tag{66}$$

De l'examen d'aquesta equació se dedueix desseguida que'ls nous eixos ox' i oy' són diàmetres conjugats de la curva, i que l'origen és el centre.

Les asimptotes TT' i LL' tindràn, referides als nous eixos, les equacions $x'=\pm c'$, i les altres dugues tindràn les següents: $y'=\pm\dfrac{b}{\cos\delta}$.

L'eix oy' tallarà la curva en dos punts B i B' a la distancia b de l'origen; l'altre eix ox' la tallarà en els punts A i A', situats a la distancia $c'\cos\delta$. De manera que tant l'eix ox' com l'oy', tindràn comuns amb la curva dos punts ordinaris a distancia finita i un punt doble a l'infinit.

Com que
$$y'=\pm\frac{b}{\cos\delta}\sqrt{\frac{c'^2\cos^2\delta-x'^2}{c'^2-x'^2}}, \tag{67}$$

únicament obtindrem punts reals de la curva per a $|x'|<|c'\cos\delta|$ o $|x'|>|c'|$. Sempre que x' cumpleixi amb aquestes dues condicions, obtindrem per a la y' dos valors reals, iguals i de signe contrari, que's faràn iguals a zero quan $|x'|=|c'\cos\delta|$. D'això es dedueix que les tangents QQ' i SS' a la curva en els punts $\begin{cases} x'=\pm c'\cos\delta \\ y'=0 \end{cases}$ són paral·leles a l'eix oy'. Igualment trobaríem que s'ha de verificar $|y'|<|b|$ o $|y'|>\left|\dfrac{b}{\cos\delta}\right|$ per a obtenir punts reals de la curva i que les tangents en els punts $\begin{cases} y'=\pm b \\ x'=0 \end{cases}$ són paral·leles a l'eix ox'.

Anem a veure si hi ha punts d'inflexió. Per això busquem la segona derivada i igualem-la a zero; tindrem

$$y' = \frac{b}{\cos\delta}\sqrt{\frac{x'^2 - c'^2\cos^2\delta}{x'^2 - c'^2}}$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{b}{\cos\delta}\,\frac{x'(x'^2 - c'^2) - (x'^2 - c'^2\cos^2\delta)x'}{\sqrt{(x'^2 - c'^2)^3\,(x' - c'^2\cos^2\delta)}} = \frac{bc^2\sin^2\delta}{\cos\delta}\,\frac{x'}{\sqrt{(x'^2 - c'^2)^3\,(x'^2 - c'^2\cos^2\delta)}}$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = -\frac{bc^2\sin^2\delta}{\cos\delta}\,\frac{(x'^2 - c'^2)^3\,(x'^2 - c'^2\cos^2\delta) - x'^2\left[3(x'^2 - c'^2)^2\,(x'^2 - c'^2\cos^2\delta) + (x'^2 - c'^2)^3\right]}{\sqrt{(x'^2 - c'^2)^3\,(x'^2 - c'^2\cos'\delta)}\,(x'^2 - c'^2)^3\,(x'^2 - c'^2\cos^2\delta)}$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{bc^2\sin^2\delta}{\cos\delta}\,\frac{3x'^4 - x'^2(2c'^2\cos^2\delta) + c'^4\cos^2\delta}{\sqrt{(x'^2 - c'^2)^9\,(x'^2 - c'^2\cos^2\delta)^3}}$$

$$3x'^4 - (2c'^2\cos^2\delta)x'^2 + c'^4\cos^2\delta = 0.$$

Les arrels d'aquesta equació són:

$$x = \pm\sqrt{\frac{c'^2\cos^2\delta \pm c'^2\cos\delta\sqrt{4 - \sin^2\delta}}{3}} = \pm c'\sqrt{\frac{\cos\delta}{3}\left(\cos\delta \pm \sqrt{\cos^2\delta + 3}\right)}.$$

Com que $\cos\delta < \sqrt{\cos^2\delta + 3}$, solament hi haurà dues arrels reals que seràn

$$x = \pm c'\sqrt{\frac{\cos\delta}{3}\left(\cos\delta + \sqrt{\cos^2\delta + 3}\right)},$$

però com que aquests valors cumpleixen amb la condició

$$c'\cos\delta < c'\sqrt{\frac{\cos\delta}{3}\left(\cos\delta + \sqrt{\cos^2\delta + 3}\right)} < c',$$

els punts d'inflexió corresponents pertanyen a una porció imaginaria de la curva.

De l'estudi que hem fet de l'equació (64), se dedueix que la curva que estem estudiant estarà constituida per cinc rames tal com segueix:

1.er Un òval inscrit en el paral·lelògram QQ'J'J.

I 2.on Quatre rames hiperbòliques situades en els angles TRU, T'R'U', LSV i L'S'V que formen les quatre asimptotes.

El paral·lelògram QQ'J'J, format per les quatre tangents en els punts A i A', B i B', i el format per les quatre asimptotes, tenen les diagonals coincidents, puix, tant en una figura com en l'altra tenen les següents equacions $y' = \pm\frac{b}{x'\cos\delta}x'$. Anem ara, a trobar la llur intersecció amb la curva. Evidentment tindrem

$$\frac{b^2 x'^2}{c'^2 \cos^2 \delta}\, x'^2 \cos^2 \delta - \frac{b^2\, x'^2}{c'^2 \cos^2 \delta}\, c'^2 \cos^2 \delta - x'^2\, b^2 + b^2 c'^2 \cos^2 \delta = 0$$

$$x'^4 - 2c'^2\, x'^2 + c'^4 \cos^2 \delta = 0$$

$$x'^2 = c'^2 \pm \sqrt{c'^4 - c'^4 \cos^2 \delta} = c'^2\,(1 \pm \sin \delta)$$

$$x' = \pm c' \sqrt{1 \pm \sin \delta} = \begin{cases} \pm\sqrt{2}\, c' \cos\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right) \\[2ex] \pm\sqrt{2}\, c' \sin\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right) \end{cases}$$

$$y' = \pm \frac{b}{c' \cos \delta}\, c' \sqrt{1 \pm \sin \delta} = \pm \frac{b}{\cos \delta} \sqrt{1 \pm \sin \delta} = \begin{cases} \pm\sqrt{2}\, \dfrac{b}{\sin\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right)} \\[4ex] \pm\sqrt{2}\, \dfrac{b}{\cos\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right)} \end{cases}$$

Per als vuit punts d'intersecció de dites diagonals amb les curves tindrem, doncs, les següents coordenades:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Diagonal CC}' \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{C} \begin{cases} \sqrt{2}\, c' \sin\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{b}{\sqrt{2} \cos\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right)} \end{cases} & \mathrm{C}_1 \begin{cases} \sqrt{2}\, c' \cos\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{b}{\sqrt{2} \sin\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right)} \end{cases} \\[6ex] \mathrm{C}' \begin{cases} -\sqrt{2} \sin\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right) \\[2ex] -\dfrac{b}{\sqrt{2} \cos\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right)} \end{cases} & \mathrm{C}'_1 \begin{cases} -\sqrt{2}\, c' \cos\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right) \\[2ex] -\dfrac{b}{\sqrt{2} \sin\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right)} \end{cases} \end{array} \right. \\[12ex] \text{Diagonal DD}' \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{D} \begin{cases} -\sqrt{2}\, c' \sin\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right) \\[2ex] +\dfrac{b}{\sqrt{2} \cos\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right)} \end{cases} & \mathrm{D}_1 \begin{cases} -\sqrt{2}\, c' \cos\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right) \\[2ex] +\dfrac{b}{\sqrt{2} \sin\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right)} \end{cases} \\[6ex] \mathrm{D}' \begin{cases} +\sqrt{2}\, c' \sin\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right) \\[2ex] -\dfrac{b}{\sqrt{2} \cos\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right)} \end{cases} & \mathrm{D}'_1 \begin{cases} +\sqrt{2}\, c' \cos 45 \\[2ex] -\dfrac{b}{\sqrt{2} \sin\left(45^\circ - \dfrac{\delta}{2}\right)} \end{cases} \end{array} \right. \end{array}\right\} \quad (68)$$

Les rectes CC′ i DD′ són també diàmetres conjugats. Considerem la CC_1' l'equació de la qual sabem que és $y = \frac{b}{c' \cos \delta} x$, i prenem un punt qualsevol de la mateixa. Les coordenades d'aquest punt seràn $\left(K_1 \frac{bK}{c' \cos \delta}\right)$ éssent K una quantitat qualsevol. Si traslladem els eixos ox', oy' en aquest punt, l'equació (66) es convertirà en

$$\left(y'' - \frac{bK}{c' \cos \delta}\right)^2 \left[(x''-K)^2 - c'^2\right] \cos^2 \delta - b^2 \left[(x''-K)^2 - c'^2 \cos^2 \delta\right] = 0$$

Fent passar, ara, pel nou origen, una recta paral·lela a la diagonal DD′, que tindrà per equació $y'' = -\frac{b}{c' \cos \delta} x''$, tindrem

$$\left[-\frac{bx''}{c' \cos \delta} - \frac{bK}{c' \cos \delta}\right]^2 \left[(x''-K)^2 - c'^2\right] \cos^2 \delta - b^2 \left[(x''-K)^2 - c'^2 \cos^2 \delta\right] = 0$$

$$(x''+K)^2 \left[(x''-K)^2 - c'^2\right] - c'^2 \left[(x''-K)^2 - c'^2 \cos^2 \delta\right] = 0$$

$$x''^4 - 2\, c'^2\, x''^2 + (K'' - 2\, K^2\, c'^2 + c'^4 \cos^2 \delta) = 0$$

Com que aquesta equació, de quart grau, té les quatre arrels iguals i de signe contrari de dues en dues, resulta que els punts d'intersecció de la recta $y'' = -\frac{bx''}{c' \cos \delta}$ amb la curva estaràn situats a igual distancia del punt considerat sobre la diagonal CC′, lo qual ens demostra allò que desitjàvem.

Segons això, coneixerem les tangents en els punts C, C_1, C′, C_1', D, D_1, D′ i D_1'. Si designem els diàmetres AA′ i BB′ respectivament per α i β, tindrem

$$\alpha^2 + \beta^2 = c'^2 \cos^2 \delta + b^2.$$

Suposant $CC' = \alpha'$ i $DD' = \beta'$, resultarà

$$\alpha'^2 = \left[c'^2 + \frac{b^2}{\cos^2 \delta} + \frac{2bc'}{\cos^2 \delta} \frac{c \operatorname{tg} \delta}{\sqrt{1 + c^2 \operatorname{tg}^2 \delta}}\right] (1 - \sin \delta) = \frac{1 - \sin \delta}{\cos^2 \delta} (c'^2 \cos^2 \delta + b^2 + 2bc \sin \delta),$$

o bé

$$\alpha'^2 = \frac{1}{2 \cos^2\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right)} (c'^2 \cos^2 \delta + b^2 + 2bc^2 \sin \delta),$$

i de la mateixa manera

$$\beta'^2 = \frac{1}{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right)}(c'^2\cos^2\delta + b^2 - 2bc^2\sin\delta),$$

d'on

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = \frac{1}{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right)}(c'^2\cos^2\delta + b^2),$$

i finalment

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha'^2+\beta'^2} = \cos^2\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right). \qquad (69)$$

Suposant $C'C'_1 = \alpha'_1$ i $D'D'_1 = \beta_1$, s'obtindrà mitjançant operacions semblants,

$$\frac{\alpha^2+\beta_2}{\alpha_1'^2+\beta_1'^2} = \sin^2\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right). \qquad (70)$$

Anomenant per Ω l'àrea del paral·lelògram format pels diàmetres conjugats OA i OB, tindrem

$$\Omega = \alpha\beta\cos\alpha = bc\cos\delta.$$

L'àrea Ω' del paral·lelògram format per l'altre parell de diàmetres conjugats OC i OD, evidentment igual al doble de la del format per les coordenades del punt C, serà

$$\Omega' = 2\frac{bc'}{\cos\delta}(1-\sin\delta)\cos\alpha = 2bc\cos\delta\frac{2(1-\sin\delta)}{\cos^2\delta} = \frac{bc\cos\delta}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right)},$$

de lo qual se dedueix

$$\Omega = \Omega'\cos^2\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right). \qquad (71)$$

Si designem per Ω'_1 l'àrea del paral·lelògram format per OC_1 i OD, s'obtindrà, d'una manera semblant,

$$\Omega = \Omega'_1\sin^2\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right). \qquad (72)$$

Les relacions (69), (70), (71) i (72) expressen propietats semblants als teoremes d'Apoloni de l'el·lipsa i hipèrbola.

Construcció de la curva. — Dibuixem dugues rectes xx' i yy' perpendiculars entre elles i la OP que formin l'angle δ amb ox. Amb la magnitut b trobarem desseguida els punts B i B'. Per a buscar A i A', traçarem la recta ox' que formi amb ox un angle α, de manera que $\operatorname{tg}\alpha = c \operatorname{tg}\delta$, pel punt P, situat a la distancia c de o, traçarem una paral·lela a OB i el punt en què aquesta talli a ox' serà A, i desseguida senyalarem la A'. Sobre l'eix ox prenem la magnitut $OK = c$ i tindrem desseguida l'asimptota TT'. Dibuixant les tangents AQ i BQ, podrem senyalar fàcilment el punt R, i per tant l'asimptota UV. Les altres asimptotes ja les podrem dibuixar desseguida.

Per a buscar punts qualsevols de la curva, traçarem amb centre en o dugues circumferencies de radis OA i ON, per un punt E de l'eix ox' traçarem la recta EH perpendicular a ox' i la EG paral·lela a oy. Senyalarem els punts I i E d'intersecció d'aquella amb les dugues circumferencies, i el G d'intersecció d'aquesta amb MR, i traçant per I una paral·lela a HG, el punt F on aquesta talli a EG, serà punt de la curva.

Anem a justificar tot això. En efecte.

$$OA = c' \cos\delta \qquad ON = c',$$

$$\frac{FE}{GE} = \frac{IE}{HE} \quad ; \quad FE = y \quad ; \quad OE = x;$$

$$GE = \frac{b}{\cos\delta} \quad ; \quad IE = \sqrt{c'^2 \cos^2\delta - x^2} \quad ; \quad HE = \sqrt{c'^2 - x^2};$$

per consegüent

$$\frac{y}{\frac{b}{\cos\delta}} = \frac{\sqrt{c'^2 \cos^2\delta - x^2}}{\sqrt{c'^2 - x^2}} \quad \text{o bé} \quad y^2 = \frac{b^2}{\cos^2\delta}\,\frac{c'^2 \cos^2\delta - x^2}{c'^2 - x^2},$$

que és l'equació considerada.

Si el punt E el prenguéssim més enllà de N, començaríem per a traçar tangents a les dues circumferencies, i pendríem les seves magnituts sobre la perpendicular EH, i el restant ho faríem exactament igual. Els punts que així aniríem trobant pertanyeríen a les rames infinites.

ISIDRE PÒLIT.

Facultat de Ciencies, Barcelona.