les ondes de la telegrafía sense fils per aquest fet de miratge associat a la capa de Heaviside.

Estudiant la propagació d'ondes per un medi heterogèni d'aquesta classe, ha trobat l'esmentat autor que'ls raigs s'incurven cap a la terra, i aquesta curvatura depèn de la longitut d'onda.

Ara bé, de dia es pot admetre que'ls raigs no arriben a reflexar-se en la capa de Heaviside, sinó que's transmeten per pura refracció com els del miratge. I pot succeir, com aquí, que vagin a certes regions i a altres no arribin segons la longitut d'onda empleada, de la qual depèn la velocitat de propagació.

De nit, se desfàn els ions fonent-se altra vegada en molècules neutres, i queda sols la capa de Heaviside.

No hi ha dubte de que la teoría és molt atraient; l'autor l'aplica a l'explicació de les perturbacions observades al despuntar el Sol i al pondre's; aleshores, en efecte, té lloc el pas de l'ionisació a la no ionisació. També la presencia perturbadora de muntanyes s'adapta bé a la teoría d'Eccles, i certes altres perturbacions les atribueix a l'existencia de regions perturbadores, com a bacs de boira per la llum ordinaria.

Tals, són, avui, les explicacions de la transmissió de les ondes de Maxwell-Hertz; dels fets que hem indicat al començament, i que són dels més interessants en la telegrafía sense fils.

De les altres comunicacions interessants en l'esmentat Congrés, citarem que Millikan, modificant la llei de caiguda de les gotes en el mètode de mesura de la càrrega d'un electròn (1), ha trobat que amb un error que no arriba a una dècima, se té per valor d'aquella carga

$$e = 4{,}777 \times 10^{-10} \text{ unitats electroestàtiques.}$$

Cal també citar que de certes mesures del efecte fotoelectric, o il·luminació de metalls per llum ultravioleta i consegüent desprendiment d'electrons, fetes ab diferents gruixos, Robinson ha pogut comprovar, que, si la capa metàlica és tant prima, que no arriba al camí lliure dels electrons, se separen aquests directament, amb gran velocitat. Mes si el gruix aumenta, succeeix que, moltes vegades un electròn xoca contra una molècula neutra i la ionisa, separant-se'n altres electrons. Així, el nombre d'electrons aumenta ràpidament per lleugeres variacions de gruix, mes la velocitat d'emissió és més petita. — E. T.

Periòdics

REVUE PHILOSOPHIQUE. — L. Dugas: *L'oubli et la personnalité*, octobre, 1912.

Sobre la moderna posició científica que considera a l'oblit, no com a font de disgregació de l'esperit, ni tant sols com a funció absolutament oposada a la memoria, ha bastit M. L. Dugas l'interessant article sobre l'oblit i la personalitat que'ns proposem ara extractar.

La dificultat que inclou l'estudi d'aquesta funció, neix en gran part de la poca precisió del terme. Entre les varies classificacions, algunes d'elles discutibles, que de l'oblit han sigut donades — accidental i momentani, absolut i definitiu, individual i social, normal i patològic, etc. — se fixa Dugas sobre aquesta última.

L'oblit patològic resulta d'una perdua sens

(1) Vegi's Mañas, *Tratado de Química*. — Barcelona.

compensació, «és una disminució del pensament, que compromet la unitat del jo, romp l'equilibri mental, essent un començament de disolució, de desorganisació psíquica». Representa la forma coneguda de l'oblit. En canvi, pot aquest considerar-se com a normal i beneficiós «quan en lloc d'atacar l'integritat del jo, és l'acte, instintiu o reflexiu, per el qual aquell realisa felisment la seva unitat». En aquest cas sembla que l'esperit se defensi eliminant sensacions i percepcions davant d'un aplec confús d'elles en la conciencia. No obstant, encara admetent tal classificació, afegim nosaltres, que és una dificultat insuperable el determinar si tal o qual oblit es beneficiós o al contrari, perjudicial.

Pertanyi a la classe que's vulga, continúa Dugas, l'oblit té una grossa transcendencia en la vida entera de l'esperit; ja que fins tractant-se d'un oblit particular, representa la perdua d'un valor que havía existit ja en nosaltres, que havía format part de nostre «síntesis psíquica»; per això ens intriga i té una punta de dolor, quan volent fer actual un estat o percepció anterior, no podem en cap manera realisar aquest desig.

L'oblit normal, que podríem tractar de definir segons el criteri de l'autor, com la desaparició d'un *sistema* de sensacions, percepcions o idees que representa una simplificació útil per a l'esperit, no és sempre, com hem ja apuntat, la negació de la memoria, ans bé pot ser-ne la condició. «El record és la elecció entre els fenòmens del passat acullint els uns i separant els altres», és a dir, suposa un determinat nombre de fenòmens que s'obliden.

L'oblit devé encadenat a la evolució de l'esperit. Cada nou estat del jo — i sabut que aquest se transforma a cada instant — representa una serie de noves adquisicions, de canvis, per lo que com més profundes siguin aquests darrers major serà el nombre de percepcions, idees, etc., de què haurem de privar-nos, d'arrencar i llençar de nosaltres; el tenir molta memoria, doncs, — prenent-ho en sentit de persistencia de nostres adquisicions espirituals — serà un obstacle per a nostre desenvolviment, facilitant-lo en canvi, tot allò que representi flexibilitat, la inconciencia del trànsit, especialment quan aquest derrer estat perdura aprés de la nova posició adquirida: la memoria representa lo que perdura, l'oblit lo que pereix en nosaltres.

Estudía el fenomen de constitució de dues memories, en el cas més corrent i notable de individus normals, en els que sembla com si haguessin una memoria especial per a cada un dels seus estats, de tal manera, que en cada estat s'oblida el *sistema* d'idees de l'estat anterior, cobrant-se al tornar a la posició inicial. Aquestes memories especials corresponents a personalitats secundaries, s'excloeixen unes a les altres; els oblits corresponents a ella no seràn doncs definitius. Així passa que a certs subjectes en estat d'ubriaguesa tenen, per exemple, un llenguatge, sempre el mateix, però diferent del que tenen en estat normal. An el retorn a un estat qne creien haver oblidat, se deu la frase vulgar de «Sembla que fos ahir...!»

Un altre cas notable entre'ls fenòmens a què dona lloc l'oblit, ès la desaparició de la conciencia de l'obra que ha sigut escrita. Se cita en aquest punt el cas de Newton oblidant el seu descubriment del càlcul diferencial, i el testimoni de Goethe, Zola, Goncourt, Flaubert i George Sand. Dugas ho explica per un fenomen psíquic, anàleg a l'excreció en la vida animal. «L'esperit expulsa naturalment els seus productes elaborats, usats, les idees o sentiments dels quals ha agotat l'interès i per als que no experimenta més que indiferencia, sacietat i disgust.» Sobre l'efecte de l'obra escrita, sobre nostres idees, és notable el conegut cas de Goethe, lliurant-se d'aquella tendencia al suicidi, aprés la producció del Werther.

De què l'oblit aparegui en tot passatge d'un estat d'esperit a l'altre, ne treu la conseqüencia, que la memoria no pot disgregar-se a peces; lo que desapareixerà serà un sistema de sensacions, no una sola d'elles. La memoria, inclòs en la seva disgregació és sempre sintètica. L'oblit i el record per tant són «estats sintomàtics del jo tot enter, o d'un dels seus aspectes al menys.

Finalment l'estudi de la memoria i del oblit, revelant-nos l'evolució del nostre jo, ens ensenya que «nostre ser actual, és fet, no solament de l'eliminació de sers o de formes de ser que hauríem pogut o volgut esser, sinó també del ser o de les formes del ser que havem estat i que no som ja, que havem sobrepassat i oblidat, car nostre ser individual se composa més de morts que de vius. — P. G.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON, 1912. — G. N. Watson: *A Theory of Asymptotic Series.*

La teoría de les series asimptòtiques tractada per Poincaré (*Méthodes nouvelles*), i més analíticament per Borel, formen, amb aquest treball un complet còs de doctrina. En efecte, si una serie asimptòtica de les tractades per Poincaré no determina una funció analítica única i si la sumació de les series de Borel exigeix conèixer completament ses funcions associades, l'autor resolt amb molta elegancia aqueixes dificultats per la consideració de certes quantitats que venen a omplir en les series asimptòtiques el paper del radi de convergencia en els desenrotllos convergents.

La serie considerada és

$$f(\alpha) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + R_n$$

on

$$| a_n | \leq A\Gamma(kn+1)\rho^n$$

$$| R_n x^{n+1} | \leq B\Gamma(ln+1)\sigma^n.$$

Les quantitats A i B són anomenades constants del desenrotllo i les k, l, ρ, σ són dites característiques de la funció $f(\alpha)$, anomenant-se respectivament grau, grau extern (outergrade), radi, radi extern.

Definides les característiques, l'autor prova quatre teoremes generals que formen el còs de sa teoría i que serveixen per a deduir de les característiques d'una certa funció, les d'altra funció d'aquesta, dintre de condicions molt amples. Això constitueix la part primera del treball. — F. RUBIO.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT, 1912. — O. Karman: *Mechanismus des Flüssigskeits und Luftwiderstandes.*

L'autor creu veure el mecanisme de la resistencia que experimenta un sòlid al moure's al través d'un flúid, en la serie de terbolins que's formen al seu darrera. Examinant l'estabilitat d'una doble serie de terbolins, a distancies l els d'una mateixa serie, i a distancia h les dues series, en un medi flúid perfecte, treu: 1.er Que la figura dels terbolins es conserva estacionaria, animada tota d'una traslació rectilinea segons la direcció comú de les series quan van els terbolins de cada serie a parel's o intercalats. 2.on Que la primera configuració és inestable, mes no la segona, quan la distancia entre les series, dividida per la que separa dos terbolins d'una mateixa serie és 0,283.

En vista d'aqueix resultat d'estabilitat (que sigui dit de passada, examina l'autor per una forma particular de solució de les equacions del moviment pertorbat, una forma ondulatoria que li permet introduir un criteri especial d'estabilitat), l'autor conclou que és l'única forma possible del sistema de terbolins que's formen darrera del còs en moviment uniforme en un líquid. Presenta diferentes fotografíes obtingudes en la superficie de l'aigua, en la que s'ha tirat polvos de licopodi, les quals demostren efectivament la presencia dels esmentats terbolins d'una manera bastant d'acord amb la teoría.

L'autor calcula després la força de resistencia, per una aplicació del teorema de l'impuls aplicat al temps que separa la formació de dos terbolins seguits, d'una mateixa renglera, expressant que la serie d'increments de l'impuls en aquest temps que reb un volum convenientment limitat de líquid, és zero. Aquests impulsos provenen de l'acció exterior que arrastra el còs al través del líquid, de la variació de velocitats en tot el volum considerat, dels impulsos de la pressió hidràulica en els contorns i dels increments d'impuls deguts al atravessar les superficies límits. Y troba per la resistencia, finalment, la fórmula referida a la unitat de la dimensió d del còs:

$$R=\left(0{,}799\frac{u}{U}-0{,}323\left(\frac{u}{U}\right)^2\right)\frac{l}{d}$$

en què u és la velocitat en què's mouen les rengleres de terbolins i U la del còs. Deduint de la pràctica, per certs casos els valors de $\frac{u}{U}$ i $\frac{l}{d}$, l'autor troba concordancia entre'ls seus resultats teòrics i els deduits experimentalment por O. Föppl i Eiffel.

La formació de terbolins d'una i altra renglera, és un fenomen periòdic. Es el que dona lloc al xiular d'un bastó al moure's ràpidament en l'aire, al xisclet del vent passant per les escletxes, als sons de les arpes eòliques, etc.

— Abraham: *Die Gravitationsfeld.*

Exposició purament fenomenològica d'un camp gravitatori, en el què segons l'hipòtesis de Einstein, el potencial gravitatori és funció de la velocitat de la llum c en el punt corresponent o viceversa.

Les equacions hipotètiques fan dependre les components de la tensió del medi, la densitat de l'impuls i de l'energía d'una certa funció w de c.

Admès això, se suposa ademés que l'energía E d'una massa puntual en el punt en què el potencial gravitatori és ψ, és de la forma $E = M\psi(c)$.

Suposa, ademés, l'autor, la validesa de les equacions de Lagrange, de les que's dedueix tot seguit, que la Lagrangiana L és funció homogènea de la velocitat v del punt i de ψ.

Introduint una nova hipòtesis, a saber, que la massa en repòs no depèn més que de M, logra demostrar que $\psi = c$.

Sense més hipòtesis resulta calculable la força que experimenta una massa puntual en el camp d'una altra a la distancia r, i's troba una llei de la forma

$$\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r^3}$$

essent $\frac{B}{A}$ molt petit.

— Hilbert: *Bregündung der elementare Strahlungsvorgänge.*

L'eminent matemàtic de Göttingen, ha pogut demostrar d'una manera rigorosa una de les lleis fonamentals de la Física, llei enunciada per Kirchhoff i de la que s'en havíen donat moltes demostracions, mes cap de bona.

Hilbert demostra lo que és el fonament de la llei de Kirchhoff, el qual fonament se pot presentar en la forma aquesta: Dient η i α dels coeficients d'emissió i absorció, q la velocitat de la llum, la funció

$$\varphi=\frac{\eta}{\alpha}q^2$$

és independent del còs que's consideri i funció sols de la temperatura i longitut de onda.

Hilbert, per a demostrar tant important llei, calcula la densitat de la radiació rebuda en un element de volum, al través de totes les trajectories donades pel principi de Fermat:

$$\int\frac{ds}{q}=\text{mínimum}.$$

De la densitat de la energía en treu la que absorbeix l'element dv, i aquesta quantitat la iguala a la emesa pel mateix element en el mateix temps. La equació d'equilibri adopta la forma

$$4\pi\varphi-\int\frac{\alpha_1}{q_1^2}K\,\varphi_1\,dv_1=0$$

en la que K és la funció simètrica

$$\frac{e^{\int_{xyz}^{x_1y_1z_1}\alpha\,ds}}{\frac{d\sigma}{d\chi}}\,q^2$$

essent $d\sigma$ l'element de superficie d'onda normal als raigs que emanen d'un punt sots l'angle sòlid $d\chi$.

L'integral s'entén estesa a tot l'espai que'ls raigs atravessen, espai que no és sols l'inclòs per les parets del medi aon té lloc la radiació, ja que hi ha reflexions en les mateixes, i un mateix raig pot atravessar-lo varies vegades.

Hilbert suposa les parets o completament absorbents o reflectants perfectes. La condició d'absorbencia, és, per a Hilbert

$$\int_{xyz}^{x^1y^1z^1}\alpha\,ds=\infty$$

essent $x^1y^1z^1$ un punt de la paret.

Demostra primer que la equació integral anterior té la solució $\varphi=$ constant, d'un modo directe.

Demostra després que la solució és única. El constant significa independent de l'espai i del temps, clar és que vol dir funció de la temperatura i longitut d'onda. En aquesta segona part de la demostració, examina Hilbert les singularitats del nucli, les quals són de dugues maneres. Al confondre's els punts xyz, $x^1y^1z^1$ s'obtenen les de la primera classe, a l'arribar xyz a un foco de les extremals trajectories o raigs, se té l'altra.

Apoiant-se en el teorema conegut de que'ls valors propis d'un sistema d'equacions diferencials lineals sense punts singulars no s'acumulen en lo finit, pot referir l'espai recobert pels raigs a l'espai senzill, demostrant la fórmula següent, en què la ratlleta fa referencia a espai recobert:

$$\int\int\frac{\alpha\alpha_1}{q^2q_1^2}K\varphi(\varphi_1-\varphi)\,dv\,d\bar{v}_1$$
$$=\int\int\frac{\alpha\alpha_1}{q^2q_1^2}K\varphi(\varphi_1-\varphi)\,d\bar{v}\,dv_1$$

D'aquesta i del fet d'existir la solució $\varphi=$ constant ne surt que necessariament tota solució és de la mateixa forma.

Calcula Hilbert en el mateix i celebrat treball, l'emissió al través d'un element de superficie, i en dedueix la fórmula coneguda del brill, que és el fonament del teorema de Kirchhoff: el *poder emissiu* dividit per l'*absorbent* és independent del còs que's consideri.

Finalment, explica com, mitjançant l'introducció de fons i ulls se poden atacar i formular els problemes de moviment, la resolució dels quals queda referida a la d'una equació integral no homogènea.

—Nernst: *Energie-inhalt der Gase.*

La calor específica dels sòlids ha sigut objecte d'estudis especials, per lo que fa referencia a temperatures extremes, per part dels químics de l'escola de Nernst; els quals l'han relacionat amb la teoría dels quanta amb contraposició de l'equirepartició. Deixant els líquids per complicats, Nernst, se pregunta si els gasos satisfaràn o no a lleis semblats, i troba, que per grans intèrvals de temperatura, les calors específiques dels gasos resulten de l'equirepartició de l'energía, mes creu que a temperatures extremes hi deu haver desviacions. Si s'aplica als gasos la fórmula de Nernst o la de Einstein deduida de la temperatura dels quanta, se troba que ha d'aumentar el calor específic, per exemple, per l'helium a 4000° en que comença a brillar sa linea roja. Mes fins a 2000° no ha sigut possible observar cap variació. Ademés, hi ha que comptar en que probablement els graus de llibertat augmenten amb la temperatura, i en els gasos momatònics, per exemple, intervé la rotació al créixer aquella.

— Smoluchowsky: *Experimentell nachweisbare, der üblichen Thermodynamik widersprechende Molekular-phänomene.*

El conegut físic de Lemberg presenta un examen dels moviments experimentals i fets que semblen contradir el segón principi de la Termodinàmica, o sigui la impossibilitat d'un perpetuum mobile de segona especie. Passa en revista en especial el moviment brownià y l'opalescencia dels gasos a l'aproximar-se al punt crític, i en dedueix, que si bé en petit és possible el perpetuum mobile, en el sentit de que poden imaginar-se no sols sers intel·ligents (esprit de Maxwell), sinó mecanismes que automàticament facin passar calor dels còssos frets als més calents sense gasto de treball (1), per la constitució molecular dels dits mecanismes aquesta aglomeració de treball procedent de res no pot esser continuada, a la manera com un jugador pot fer més o menys sorts, mes amb el temps no pot guanyar. Proposa, en conseqüencia, modificar un dels enunciats corrents del segón principi, deixant-lo en la forma següent en què lo nou és la paraula subratllada.

«Es impossible d'un modo *continuat* obtenir treball útil a costa de la calor d'un còs a temperatura més baixa.» — E. T.

—Born i v. Karman: *Schwingungen in Raumgittern.*

Els autors se proposen en aquest treball investigar les oscil·lacions naturals de les molècules posades en els vèrtices d'una reixa cúbica, i comparar-les amb les vibracions elàstiques i dels raigs ultraroigs, per modificar la fórmula de Einstein sobre'ls calors específics.

Cada molècula se suposa actuada per les demés veïnes per forces quasi elàstiques. Examinant primer el cas relativament senzill de estar les molècules en una recta a distancies iguals a. El cas de l'espai, se pot dir que'l treuen per analogía.

En el cas lineal que acabem de dir, si la longitut de l'onda se suposa molt gran en comparació de les distancies intramoleculars, se té el cas de les vibracions longitudinals d'una corda, lo que'ls permet relacionar les constants del problema a les constants elàstiques. Lo mateix fan en l'espai.

Si l'onda, es al revés, petita i comparable amb a, troben els autors en el cas lineal, que l'espectre és limitat per una freqüencia màxima ν_0, freqüencia que ve a tenir el caràcter de vibració normal o propia. Extès a l'espai, surten cinc freqüencies que són molt semblants a les dels ultraroigs restants de la silvina, sal, espat fluor, havent determinat altres constants pels valors elàstics com abans s'ha dit.

Després evalúen, en un sistema indefinidament extès la funció $N(\nu)$ la que representa la densitat de molècules les freqüencies de les quals estàn compreses entre ν i $\nu + d\nu$. Un cop trobada, fan l'hipòtesis de Plank, sobre la distribució d'energía, segons la ν. Lo que'ls permet evaluar l'energía (purament mecànica) que toca a les molècules que vibren entre ν i $\nu + d\nu$. Una integració, per totes les freqüencies de o a ν_0 en el cas lineal, y pel mateix límit en virtut de noves hipòtesis en el cas de l'espai, els permet calcular l'energía per unitat de volum, i per conseqüent el calor específic. Resulta una fórmula que s'acorda amb els fets millor que la de Einstein.

Els autors acaben fent una crítica molt adequada de la teoría dels quanta, dient que si bé no ofereix grans dificultats la teoría dels quanta pels ressonadors elèctrics, al passar d'aquestos a les molècules, se necessita una mica de fantasía per admetre-la.

MATHEMATISCHE ANNALEN, 1912. — Hilbert: *Begründung der Kinetischen Gastheorie.*

Treball per l'estil de l'anterior, en què se resol la fórmula fonamental de Maxwell Boltzmann per una serie d'aproximacions successives, determinant les funcions termes de la serie per certes equacions integrals.

L'equació fonamental de Maxwell Boltzmann es la que expressa la variació de la densitat F de punts en l'espai de sis dimensions

(1) Per exemple, una roda d'aletes penjada d'un fil que pugui torçar-se i amb un gallet que impedeixi el retrocés, al ser ferides les aletes per les molècules girarà i acumularà energía potencial del fet de la torsió, etc.

(tres d'espai, tres de velocitat) que representa l'estat del gas, variació deguda als xocs suposats perfectament elàstics de molècules esfèriques de diàmetre σ. Es una equació integral respecte a F

$$\int\int \frac{1}{2}\sigma^2 \left[F^1 F_1{}^1 - F F_1\right] W\, dw_1\, ds =$$

$$= X\frac{\delta F}{\delta \xi} + Y\frac{\delta F}{\delta \eta} + Z\frac{\delta F}{\delta \zeta} + \xi\frac{\delta F}{\delta \alpha} + \eta\frac{\delta F}{\delta \xi} + \zeta\frac{\delta F}{\delta z} + \frac{\delta F}{\delta t}$$

equació en la que $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ son les components de la velocitat de dugues molècules al xocar, $\xi^1 = \xi + \bar{x}W$, $\eta^1 = \eta + \bar{y}W$, etc., les components després del xoc,

$$W = \bar{x}(\xi_1 - \xi) + \bar{y}(\eta_1 - \eta) + \bar{z}(\zeta_1 - \zeta);$$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ cosenos directors de la normal comú a les molècules en el moment del xoc;

$$dw = d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1;$$

X, Y, Z les components de la força externa; *ds* l'element de la superficie esfèrica de radi $1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$; x, y, z coordenades de la molècula. L'integració respecte a les $\xi_1, \eta_1\ \zeta_1$ té que pendre's de $-\infty$ a $+\infty$ per cada una. F és, naturalment, funció de $x, y, z, \zeta, \eta, \xi$.

Per a resoldre aquesta equació, que és la clau de tota la teoría cinètica dels gasos, Hilbert posa $F = \frac{G}{\lambda}$ i suposa G desenrotllat segons les potencies de λ

$$G = \varphi + \psi\lambda + \chi\lambda^2 + \ldots$$

Les diferentes aproximacions de F seràn:

$$\frac{\varphi}{\lambda},\ \frac{\varphi}{\lambda} + \psi,\ \frac{\varphi}{\lambda} + \psi + \chi\lambda \ldots \text{ etc.}$$

Substituint i igualant iguals potencies de λ, se troba primer

$$\varphi = ae^{-b\,((\xi - u)^2 + (\eta - v)^2 + (\zeta - w)^2)}$$

essent a, b, u, v, w funcions arbitraries de x, y, z, t, les dues primeres no poden ser negatives.

La segona funció ve donada per una equació integral de segona especie, la homogènea corresponent de la qual té cinc solucions, les quals, com és ben sabut, exigeixen certes condicions d'ortogonalitat en aquella, que són, justament, les hidrodinàmiques, l'equació de continuitat, i la d'estat, condicions d'ortogonalitat que venen imposades a les a, b, u, v, w, determinant-se d'aqueix modo, completament el primer terme φ, amb la sola intervenció de cinc funcions arbitraries de x, y, z (valors de a, b, u, v, w per $t = 0$). De una manera anàloga, la tercera equació d'aproximacions successives, imposa condicions a ψ mitjançant les quals és soluble l'equació integral en X, etc.

Cada vegada s'introdueixen així cinc funcions arbitraries, mes totes plegades depenen sols de cinc funcions arbitraries, per exemple, de les cinc primeres, que poden ser, per $t = 0$, els valors de la densitat, temperatura i velocitat com a funcions de x, y, z.

Tal és la exposició formal del fonament de la teoría cinètica dels gasos, segons Lorentz. El pas que ha donat Hilbert en l'exposició lògica dels fonaments de la Física tant en la teoría de la radiació com en la Cinètica, pot calificar-se de pas de gegant.

— Mac Millan: *Reducció d'un sistema de series de potencies a un sistema equivalent de polinomis.*

Comença l'autor per demostrar que si

$$F_i\,(x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots, \mu_p) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

és un sistema de n series de potencies, se poden determinar altres dues series Φ_{ki} i un polinomi P_k, tals que

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ki} F_i + F_k = P_k.$$

Aquest teorema, és una generalisació d'un de Weierstrass pel cas d'una sola serie. Per demostrar-lo, l'autor troba en un sistema de polinomis homogenis, una propietat semblant a la enunciada, la qual estén després a un sistema de series sense paràmetres, de la qual extensió ne surt finalment el teorema anterior.

Aprofitant certa arbitrarietat en el mètode de determinació de P_k, obté un sistema de igualtats semblants a (1) donant a K els valors $1, \ldots, n$. Els sistemes d'equacions:

$$P_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \quad \text{i el } F_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

són equivalents.

La reducció del sistema de series al de polinomis pot fer-se de infinites maneres que porten a infinites determinacions de les series Φ_{ki} i dels polinomis P_k (els coeficients dels quals són a la vegada series de potencies de $\mu_1, \ldots, \mu_n$); ara be: resulta sempre possible fer que aquests coeficients i aquelles series siguin convergents amb tal de que ho siguin les series propostes.

Si G és una serie i Q_k un polinomi definits en el texte, basta que en l'equació

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ki} F_i + G_k = Q_k$$

se compleixin les condicions dites de convergencia perquè s'compleixin també en (1). Ara be, si es designen per

$$L \text{ i } L_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

certes series formades de manera que dominin a (*) les

$$G_k \text{ i } F_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

respectivament, i es demostra que l'equació

$$\sum_{i=1}^{n} \Lambda L_i + L = \pi$$

admet una solució en Λ tal que totes les Λ_i, $(i = 1, \ldots, n)$ són series convergents que fan convergents els coeficients de π, basta determinar les Φ_i de l'equació (2), de manera que siguin dominades per Λ_i (i per tant convergents) perquè el polinomi Q_k que correspòn, sigui dominat per π i tingui també convergents sos coeficients.—P. PEÑALVER.

(*) Es a dir, que siguin *majorants per*,..., segons locució francesa.

— Chapman: *Sobre sumabilitat de series de funcions de Legendre.*

L'autor modifica i estén certes proposicions anteriors sobre la sumabilitat de la serie

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{1} f(y) P_n(y)\, dy,$$

quan $f(x)$ satisfà certa condició especial ademés de continua. Fundant-se en la sumabilitat i integrabilitat, sota certes condicions de

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(x) P_n(y)$$

l'autor demostra el següent teorema: Si $f(x)$ és integrable entre -1 i $+1$ (Lebesgue) i $\Sigma\, n_n(x, y)$ satisfà determinades condiciones quan *a)* la serie

$$\Sigma \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x, y) f(y)\, dy$$

és sumable (C, k) (pel mètode de Cèsaro de orde k) en tot interval ($\alpha\, \beta$) que exclueixi el punt x, la serie

$$\Sigma \int_{-1}^{1} u_n(x, y) f(y)\, dy \qquad (-1 \leqq x \leqq +1)$$

serà també sumable (C k), y aleshores la suma es

$$k_1 f(x+0) + k_2 f(x-0),$$

amb la condició *b)* que o bé $f(x)$ és de variació limitada en les proximitats de x o *c)* la serie $\Sigma u_x(x\, y)$ és absolutament integrable (C K) prop de x.

La condició *a)* es compleix sempre que $k > \frac{1}{2}$; si además $k > 1$, té lloc la *c)*, per tant, el teorema és immediatament aplicable; mes si $1 > k > \frac{1}{2}$, perquè ho sigui es precís que $f(x)$ satisfaci *b)*. Tant en un com en l'altre cas $K_1 = K_2 = \frac{1}{2}$ per consegüent, si $f(x)$ és continua (*) la suma de la serie (1) és justament $f(x)$.

Perquè el teorema general sigui veritat quan $0 < s < k < \frac{1}{2}$ l'autor demostra que n'hi ha prou amb que $f(x)$ ademés de tenir una integral de Lebesgue i complir *b)* se pugui expressar en la forma

$$\frac{g(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}s+\frac{3}{4}}},$$

essent $g(x)$ de variació limitada prop dels extrems de l'intèrval $(-1, +1)$. Llavors la serie (1) representa també a $f(x)$, sempre que x sigui interior a aquest intèrval. Amb certes restriccions se demostra semblantment la representació pels mateixos valors de k quan x és un extrem de l'intèrval. — P. PEÑALVER.

— Birkhoff (G. D): *Sobre el desenrotllo de la funció de Green.*

Generalisació de certs resultats de Hilb i aplicació d'un teorema abans demostrat (**). La funció de Green G $(x\xi, \lambda,)$ associada a la equació lineal

$$\frac{d^u u}{dx^u} + p_2 \frac{d^{u-2} u}{dx^{u-2}} + \ldots + p_u u + \lambda u = 0$$

i subjecte a certes condicions inicials pot desenrotllar-se en serie uniformement convergent

$$\sum_i \frac{u_i(x)\, v_i(\xi)}{\lambda_i - \lambda},$$

on $u_i(x)$ i $v_i(x)$ són les funcions característiques pertanyents a l'equació i condició dada i a les adjuntes, i λ_i els valors pro pis. — P. PEÑALVER.

— Prasad: *Sobre el mètode de Gauss de descomposició d'una funció entera homogènea en funcions esfèriques.*

L'autor, arrenca de la fórmula de Gauss

$$\varphi(x, y, z) = \gamma^{(2m)} + r^2 \gamma^{(2m-2)} + \ldots + r^{2m} \gamma^{(0)}$$

en que $2m$ és el grau de la funció φ proposta, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ i les γ són funcions esfèriques. Amb una fórmula de Hobson de $\gamma^{(2m-2\mu)}$ sobre

$$\varphi(x, y, z) =$$
$$= \sum_{\mu=0}^{m} \frac{(4m - 4\mu + 1)\, r^{4m-2\mu+1} \left\{ \overset{\mu}{\underset{\alpha}{\Delta}} \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \right\} \frac{1}{r}}{2\mu(2\mu-2)\ldots 2 . (4m - 2\mu + 1)(4m - 2\mu - 1)\ldots 1}$$

on és

$$\alpha = \frac{\delta}{\delta x}, \quad \beta = \frac{\delta}{\delta y}, \quad \gamma = \frac{\delta}{\delta z}, \quad \Delta_\alpha = \frac{\delta^2}{\delta \alpha^2} + \frac{\delta^2}{\delta \beta^2} + \frac{\delta^2}{\delta \gamma^2}$$

i $\overset{\mu}{\underset{\alpha}{\Delta}}$ la potencia simbòlica μ de Δ_α. — P. PEÑALVER.

— Gronwall T. H.: *Sobre'l principi de Gibbs i les sumes trigonomètriques:*

$$\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \ldots + \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx.$$

Per referir-se el principi de Gibbs a les sumes parcials $s_n(x)$ de la serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x),$$

de les quals són casos particulars les sumes parcials $\varphi_n(x)$ de la serie

$$\varphi(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu} \operatorname{sen} \nu x,$$

(*) O discontinua regular de 1.ª especie.

(**) Transactions of the American Mathematical Society; t. 9 (1908); p. 373-395.

comensa Mr. Gronwall establint com preliminar, alguns teoremes que relacionen els màxims de $\varphi_n(x)$, dels quals dedueix la demostració del següent, quina certesa fou sospitada per Fejer en un article anterior. El màxim absolut de $|\varphi_n(x)|$, per a valors reials de x, és

$$\varphi_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right),$$

valor que creix amb n i té per límit

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

Per a enunciar el principi de Gibbs, punt capital de l'article, suposa l'autor que a és l'únic punt de discontinuitat de $f(x)$ comprès en l'interval (α, β), i considera una curva C formada pels tres troços següents: el primer i el terç, o sigui per a $\alpha \leq x < a$ i per a $a < x \leq \beta$, pels arcs de la curva $y = f(x)$; el segon, o sigui per a $x = a$, pel segment rectilini paralelo a l'axe y, comprès entre

$$f(a-o) + \frac{f(a+o)-f(a-o)}{\pi} \int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

i

$$f(a+o) - \frac{f(a+o)-f(a-o)}{\pi} \int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

Doncs, bé (*), a tot nombre $\varepsilon > o$, correspon altre $N(\varepsilon)$, tal que per a $n \geq N(\varepsilon)$, las curvas

$$y = s_n(x), \qquad \alpha \leq x \leq \beta$$

se troven en l'interior d'una zona plana, limitada per l'envolvent de les circumferencies de radi ε, quins centres són els punts de C.

Acaba l'article amb la demostració d'un teorema referent als mínims de $\varphi_n(x)$, semblant als abans citats sobre els màxims, ja que també investiga la relació de magnitut entre els distints mínims que corresponen a un mateix valor de n i als diferents valors que pot rebre m, en l'expressió general

$$x = \frac{2m}{n}\pi$$

que dóna els mínims generals de $\varphi_n(x)$. — P. PEÑALVER.

(*) I en això consisteix el principi de Gibbs.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖN. BAYERISCHEN AKADJEMJEN DER WISSENSCHAFTEN.— Laue: *Difracció dels raigs Roentgen.*

Una de les troballes d'enguany ha sigut l'experiment de Laue, de que tot el món físic parla, i que té importancia proporcionada a la fama que ha adquirit. *Els misteriosos raigs X, han revelat l'existencia de l'estructura cristallina!* El fet és el següent: Un feix cilíndric de raig X de menos d'un milímetre de diàmetre, se deixa caure sobre una placa fotogràfica ordinaria després d'atravessar una làmina cristallina de blenda de zinc. En la placa surten una serie de punts negres, voltant la taca principal, punts que formen una figura amb la simetría de l'eix cristalogràfic perpendicular a la placa. Si és quaternari (la blenda cristallisa en la antihemiedria o hemiedria hemimorfa cúbica) la figura presenta dues rectes de simetría perpendiculars; si és trigonal, a cada punt ne corresponen d'altres a 120°, etc., de tal manera, que les figures corresponen a la simetría de l'estructura o xarxa espaial de Bravais, que en aquest cas és holoèdrica, sense intervenir la simetría de cada malla en particular.

L'experiment té ademés importancia extraordinaria per la teoría dels raigs Roentgen. Resultava que no's reflexaven, ni difractaven; el nou experiment ha vingut a fer prodigiosa llum en l'explicació de la seva constitució.

ACTA MATHEMATICA, 1912. — Fabri E.: *Ordre dels punts singulars de la serie de Taylor.*

Essent
$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_n z^n,$$
si la funció
$$\varphi(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\omega+\varepsilon}}z^n,$$
en un arc C del cercle de convergencia de $f(z)$, és finita i continua i tal, que quan $\left\{\begin{matrix}\varepsilon>o\\ \varepsilon<o\end{matrix}\right.$, les dues integrals
$$\int n\varphi(e^{\theta i})\cos n\theta . d\theta, \qquad \int n\varphi(e^{\theta i})\,\mathrm{sen}\, n\theta . d\theta,$$
$\left\{\begin{matrix}\text{són}\\ \text{no són}\end{matrix}\right\}$ finites en tot l'arc C, qualsevol que sigui n, el nombre ω és anomenat per M. Hadamard, ordre de $f(z)$ en l'arc C. Per a definir l'ordre en un punt, suposa l'arc C infinitament petit, i considera com ordre de $f(z)$ sobre'l cercle de convergencia, al major dels ordres en sos punts singulars. Sobre aquests conceptes (ordre d'infinitut en un punt singular i en el cercle de convergencia), versa l'article de M. Fabry, el qual comença per demostrar que existeix un nombre p tal que la serie
$$\sum_{0}^{\infty}\frac{a_n}{n^{p+\varepsilon}} \qquad (1)$$
és $\left\{\begin{matrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}\right\}$ pera tot valor $\left\{\begin{matrix}\text{negatiu}\\ \text{positiu}\end{matrix}\right\}$ de ε i que $\omega-1\leq p\leq\omega$. Considerant després les sumes
$$\int_n=\sum_{1}^{n}\frac{a_n}{n^q}$$
i suposant que's conserven finites, demostra que, ja sigui $q\gtreqless o$, el producte $(1-z)^{q+\varepsilon}f(z)$ tendeix a zero, quan z tendeix a 1 seguint un contorn interior i no tangent al cercle de convergencia. Per altra part, si succeeix que el producte
$$(1-|z|)^{q-\varepsilon}|f(z)| \qquad (o<\varepsilon<q)$$
se conserva finit a les sumes $\int_n$ els hi passa altre tant, e inversament, si $\int_n$ no permaneix finita a qualsevol que sigui n, el producte anterior i també
$$|(1-z)^{q-\varepsilon}f(z)|,$$
podràn excedir a qualsevol quantitat donada.

Considera a continuació la serie
$$\varphi(z)=\frac{f(z)}{1-z}=\Sigma b_n z^n, \qquad (b_n=a_0+a_1+\ldots+a_n)$$
quin ordre Ω comparat amb el de $f(z)$, és tal que $\omega+1\geq\Omega\geq\omega$. Si p és el nombre que figura en l'expressió (1) se verifica además
$$p=\Omega-1.$$

Suposem ara que'l nombre p sigui major que $\omega-\frac{1}{2}$; en tal cas, demostra M. Fabry que no sofreix alteració quan se desenrotlla $f(z)$ en altre cercle tangent interiorment al primitiu de convergencia, en el punt $z=1$. Llavors pot considerarse p com l'ordre d'infinitut en dit punt.

Lo mateix que de $z=1$, pot dirse de qualsevol altre punt $z=e^{\theta i}$ del cercle de convergencia i el límit màxim P dels valors de p corresponents a aqueixos distints punts, és l'ordre d'infinitut màxima en els punts singulars del cercle de convergencia.

Per a obtenir l'ordre d'infinitut de la funció, comença M. Fabry per observar que existeix un nombre Q tal que la serie
$$\sum_{0}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{Q+\varepsilon}}$$
és $\left\{\begin{matrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}\right\}$ per a tot valor $\left\{\begin{matrix}\text{positiu}\\ \text{negatiu}\end{matrix}\right\}$ de ε;

i recordant la significació dels nombres P i ω, resulta clarament que $P \lesseqgtr Q \lesseqgtr \omega$. Si $P < Q$, la serie

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{P+\varepsilon}} z^n$$

pot no permaneixer finita en el cercle de convergencia i llavors hi ha que distingir l'ordre d'infinitut màxima en els punts singulars i l'ordre de la funció en el cercle de convergencia.

Per a definir aqueix, demostra l'autor que existeix un nombre q ($P \lesseqgtr q \lesseqgtr Q$) tal que la serie

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{a_u}{n^{q+\varepsilon}} e^{n\theta i} \qquad (2)$$

és uniformement convergent per a $\varepsilon > o$, i no ho és per a $\varepsilon < o$, corresponent en el primer cas a cada valor de ε, un nombre A tal que

$$\left| \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{q+\varepsilon}} e^{n\theta i} \right| < A$$

qualsevol que sigui θ. Pot dir-se que q és l'ordre d'infinitut de $f(z)$ en l'interior del cercle de convergencia, ordre que por ésser superior al màxim P en els punts singulars.

Si θ sols varía entre θ_0 i θ_1, existeix també un nombre

$$q' \lesseqgtr P \qquad (3)$$

tal que la serie (2) és uniformement convergent en l'arc (θ_0, θ_1), per a $\varepsilon > o$ i no ho és per a $\varepsilon > o$; q' és l'ordre d'infinitut en dit arc. Si aqueix tendeix a zero, tenint per límit $e^{\theta i}$, pot succeir que q' tinga un límit major que l'ordre d'infinitut en aquest punt, en el qual hi ha que distingir llavors dos ordres: un el límit de q', i altre el p, que procedeix de considerar ailladament aquell punt. Però segons (3), per ésser $P \lesseqgtr p$, se té

$$q' \gtreqless p; \qquad \text{i també} \qquad q' \lesseqgtr \omega,$$

essent ω l'ordre en dit punt definit per M. Hadamard.

Termina l'article amb aplicacions de la doctrina exposada en certs exemples generals i particulars. — P. PEÑALVER.

— Buhl (A.): *Sobre la representació de funcions meromorfes.*

Estudi de la prolongació analítica d'una funció meromorfa $F(x)$ (amb pols simples o múltiples), mitjançant el desenrotllo en serie de polinomis depenents d'una funció entera arbitraria. Elegint com a funció sumatriu una exponencial ordinaria, arriba a resultats semblants als ja coneguts de Borel. Prenent com a funció sumatriu la σ, se obté una nova i curiosa prolongació de la funció donada que la representa, amb certa aproximació, en tot el plà. Considerant, després, el cas en que la funció sumatriu arbitraria conté la variable x, arriba amb la sumació exponencial a una representació de $F(x)$ valable en un domini que pot arribar a ser molt extens. En la última part de l'article, demostra que les fórmules de Mittag-Leffler poden deduir-se com a cas particular de les fonamentals abans establertes per l'autor sense auxili de càlcul integral. Aqueixes fórmules fonamentals són dugues; una pel cas en què tots els pols de $F(x)$ són simples, i altra per quan són múltiples. En el primer cas, si $a_1\, a_2 \ldots a_k \ldots$ són els pols de $F(x)$, i $|a_1| < |a_2| < \ldots < |a_k| < \ldots$, sempre que x se suposi interior al cercle C_k el radi del qual és $> |a_k|$ y $< |a_{k+1}|$, se tindrà

$$(A) \quad F(x)\varphi_p(\xi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_{n+p} s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) \times$$

$$\left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1} \frac{A_i}{x-a_i} + \sum_{n=0}^{n=\infty} (\gamma_p \xi^p + \ldots + \gamma_{p+n} \xi^{p+n}) \times$$

$$\cdot\, a_{k,n+1} x^{n+1},$$

on A_i és el residu de $F(x)$ per el pol a_i; $c_m = \gamma_m \xi^m$;

$$\varphi_p(\xi) = \sum_{m=p}^{m=\infty} c_m = \sum_{m-0}^{m=\infty} c_m - \sum_{m=0}^{m=p-1} c_m =$$

$$= f(\xi) - \gamma_0 - \gamma_1 \xi - \ldots - \gamma_{p-1} \xi^{p-1};$$

s_m és el polinomi de grau n que comença el desenrotllo

$$F(x)=\sum_{i=1}^{i=k}\frac{A_i}{x-a_i}+a_{k0}+a_{k1}x+\ldots=$$

$$=\sum_{i=1}^{i=k}A_i\left(-\frac{1}{a_i}-\frac{x}{a_i^2}-\ldots-\frac{x^n}{a_i^{n+1}}+\frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x-a_i)}\right)+$$

$$+a_{k0}+a_{k1}x+\ldots$$

La fórmula (A) és la fonamental de Buhl. Dividint-la per $\varphi_p(\xi)$ i introduint-hi l'hipòtesis de què ξ creix indefinidament seguint tal camí, que $|f(\xi)|$ creix encara més depressa que qualsevulla polinomi, s'obté la fórmula

$$\text{(B)}\qquad F(x)=\lim_{\xi=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_{n+p}s_n}{\varphi_p(\xi)}+$$

$$+\lim_{\xi=\infty}\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\varphi_p\left(\frac{\xi a}{x_i}\right)}{\varphi_p(\xi)}\left(\frac{a_i}{x}\right)^{p-1}\frac{A_i}{x-a_i}.$$

El segón membre pot reduir-se fent pendre a x sols aquells valors que fan

$$\text{(C)}\qquad \lim_{\xi=\infty}\frac{\varphi_p\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{\varphi_p(\xi)}=0$$

o lo que és igual

$$\lim_{\xi=\infty}\frac{f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{f(\xi)}=0,\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

En les regions del pla, en les que's compleixen totes les condicions (C) a l'hora, la fórmula (B) es redueix a

$$\text{(D)}\qquad F(x)=\lim_{\xi=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_{n+p}s_n}{\varphi_p(\xi)}.$$

Prenent com a primera aplicació $f(\xi)=e^{\xi}$, demostra l'autor que una condició (C) és lo mateix que suposar que x resta sempre al mateix costat de l'origen respecte a una certa recta. El conjunt de totes les (C) vol dir que (D) és vàlida en l'interior d'un domini tancat que conté l'origen i està enclòs per segments rectilinis i arcs de cercle, domini que ve a ser el polígon de sumabilitat de Borel quan ξ creix sense mesura conservant-se real.

Aplica després la teoría al cas $f(\xi)=\sigma(\xi)$, essent $2w=2$ y $2w'=2i$ els períodes de $p(\xi)$. Per a satisfer en aqueix cas les condicions (C), escriu

$$\text{(E)}\qquad a_k=\frac{1}{p}(a_{k1}+ia_{k2}),\quad x=\frac{1}{p}(x_1+ix_2),$$

$$\xi_n=\prod_{1}^{n}(a^2_{k1}+a^2_{k2}),$$

essent p enter i positiu; a_{k_1} i a_{k_2} dos enters reals, l'un parell, l'altre senar; x_1 i x_2 dos enters parells. Prenent $\xi=\xi_n$, $\frac{\xi x}{a_i}$ serà un número complexe, les parts real i imaginaria del qual seràn enters parells i les condicions

$$\lim_{\xi=\infty}\frac{\sigma\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{\sigma(\xi)}=0,\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,k)$$

seràn complertes. La fórmula (D), val doncs en aquest cas, en tot punt del pla, les coordenades del qual compleixin la segona condició (E), amb tal que'ls punts singulars a_k de $F(x)$ compleixin la primera de dites condicions. Mes, si bé això no succeirà sempre, el sencer arbitrari p que hi ha en les (E) permet aproximar dites quantitats racionals tant com se vulgui, a qualsevulla valor de x o de a_k donat a priori, lo qual és *pràcticament* la solució del problema.

Després de demostrar la derivabilitat terme a terme del desenrotllo (D), passa Buhl a estudiar el cas en què $c_n=\gamma_n\xi^n$, se substitueix per $\frac{c_n}{x^n}$. Aleshores, la fórmula fonamental (A) se converteix en una altra de la que, com abans, se'n poden fer desapareixer les dugues últimes sigmes, surtint

$$\text{(F)}\qquad F(x)=\lim_{\xi=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_{n+p}s_n}{x^{n+p}\varphi_p\left(\frac{\xi}{x}\right)},$$

com a expressió de la funció donada, sempre que x varíi en cert domini.

Tornant a considerar el còs de funció sumatriu exponencial $f\left(\frac{\xi}{x}\right)=e^{\frac{\xi}{x}}$ i admetent que ξ creix seguint una semirecta oΩ que passa per l'origen o, demostra l'autor que (F) és aplicable en el domini interior al cercle que té el centre en la semirecta oΩ i passa per l'origen i pel punt singular de $F(x)$ que projectant-se ortogonalment sobre la semirecta oΩ se troba més prop de l'origen. Si tots els punts singulars estàn quasi en línia recta amb ell, fent que oΩ sigui perpendicular a aquella, se veu que la regió de sumabilitat pot esser tant gran com se vulgui. — P. PEÑALVER.

— 35 : 1 — 67 — 71). — Fejer (L.): *Una observació sobre la representació aproximada d'una funció analítica en l'interior d'una estrella de Mittag Leffler.*

Recorda l'autor la proposició fonamental de Mittagg Lettler, segons la qual, la funció

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty} a_n x^n,$$

pot representar-se per

$$f(x)=\lim_{n=\infty} F_n(x),$$

en tot domini interior a l'estrella pertanyent a l'element de funció $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$; domini en el què la successió de funcions

$$F_0(x),\ F_1(x)\ldots F_n(x)$$

és uniformement convergent al seu límit.

Pren com a exemple la successió de funcions F que resulta al donar a α en la serie

$$F(\alpha, x)=a_0+\frac{a_1}{1^{\alpha\cdot 1}}x+\frac{a_2}{2^{\alpha\cdot 2}}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{a_\nu}{\nu^{\alpha\cdot\nu}}x^\nu+\ldots,$$

els valors $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ positius i decreixent indefinidament. Amb senzills raonaments, demostra que

$$s_n(x)=\sum_{0}^{n} a_n x^n \quad \text{y} \quad \sigma_n(\alpha_n, x)=\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\frac{a_\nu x^\nu}{\nu^{\alpha_n\cdot\nu}}$$

i prenent $\alpha_n=\frac{1}{n!}$,

surt

$$(1)\qquad \lim_{n=\infty}\left[s_n(x)-\sigma_n(\alpha_n, x)\right]=0;$$

això, uniformement, dintre de qualsevol cercle amb centre en l'origen.

D'altra banda, se té

$$(2)\qquad F(\alpha_n, x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+$$
$$+\sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty}\frac{a_\nu x^\nu}{\nu^{\frac{\nu}{n!}}}-\left[s_n(x)-\sigma_n(\alpha_n, x)\right],$$

i sempre surt

$$f(x)=\lim_{n=\infty}F(\alpha_n, x);$$

mes tenint compte de (1), la (2) pot substituir-se per la següent:

$$\Phi_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty}\frac{a_\nu x^\nu}{\nu^{\frac{\nu}{n!}}}.$$

Així, doncs,

$$(3)\qquad f(x)=\lim_{n=\infty}\Phi_n(x)=\Phi_0(x)+\sum_{1}^{\infty}\left[\Phi_n(x)-\Phi_{n-1}(x)\right].$$

De lo anterior ne resulta que les *funcions transcendents aproximades* $\Phi_n(x)$, *tenen els* n + 1 *primers coeficients de* $\Phi_n(x)$, *iguals als* n + 1 *primers de* f(x).

(Mittag-Leffler en una nota indica que en el volum 23 de les *Acta* ja donà a conèixer una funció amb la mateixa propietat i més senzilla de deduir.) — P. PEÑALVER.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, 1912. — Robert Jenzch: *Uber Integralgleichungen mit positivem Kern.*

L'íntima relació que hi ha entre la teoría dels matrius i les equacions integrals ha sigut l'origen d'aquest treball, on l'autor seguint a Frobenius *(Uber Matrizen aus positivem Elementen,* Berlín, 1909), prova que tot nucli continu i positiu dintre el camp d'integració té una constant propia real positiva λ_0 arrel simple de sa funció determinant $D(\lambda)$ i més petita que qualsevol de les altres. La funció propia que li correspòn és també positiva en l'intèrval d'integració.

El nucli pot esser o no simètric. Si dos nuclis d'aquests (1) y (2) guarden sempre la relació $(1) \geq (2)$, per tots els punts del camp, llurs constants λ_0 corresponents verifiquen la relació inversa

$$\overset{(1)}{\lambda_0} \leq \overset{(2)}{\lambda_0}.$$

Segueix un exemple i una aplicació als desenrotllos de Schmidt. — F. RUBIO.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK, 1911. — H. von Koch: *Sur un nouveau critère de convergence pour les déterminants infinis.*

En un treball presentat fa setze anys a l'Academia de Ciencies de Suecia, donava el autor un criteri per poder assegurar la convergencia d'un determinant infinit; ara el millora substituint com condició necessaria la convergencia de la serie

$$\sum_{r=n}^{2n-1} \sum_{i,k} \overset{(r)}{\alpha}_{iK},$$

per la de la $\displaystyle \sum_{r=n}^{2n-1} \sum_{i,k} \left[\overset{(r)}{\alpha}_{iK}\right]^2,$

evidentment molt més general i favorable. Desseguida aplica el nou criteri a les determinants integrals de Fredholm, i troba l'important conseqüencia següent: *Un determinant infinit ordinari convergent, pot deixar de serho, al ferse integral per un passatge al límit, si no compleix determinada condició.* Segueix un senzill exemple. — F. RUBIO.

GÖTTINGER NACHRICHTEN, 1911. — *Voigt Beiträge zu Lord Rayleich's Theorie der Gitterbengung.*

En l'any 1907, Lord Rayleigh va donar una teoría de la difracció de les reixes, fundada en suposar la superficie de la forma

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} \zeta_k e^{iK_p x}$$

(exceptuant K=0) admetent les lleis dels límits pels còssos reflectors absoluts o transparents, i suposant donades les direccions de difracció per la teoría ordinaria.

Voigt reprèn la teoría, mes suposant que les equacions en els límits són les que corresponen a còssos parcialment refractors, lo que s'acosta més a la realitat.

La ζ se suposa petita respecte de la longitut d'onda, i l'onda d'aproximació en els desenrotllos depèn de les potencies de ζ.