Sobre'l moviment estacionari d'una corda

1. Me proposo tractar del moviment d'una corda quan tots sos punts descriuen 'a mateixa trajectoria respecte a axis que volten ab velocitat angular constant ω a l'entorn de l'axi de les z.

D'una manera general, Arnoult (*) s'ha ocupat darrerament de l'assumpte. Ens permetrem, però, insistirhi, senyalant de pas un cas particular, que, apart del interès analítich, ofereix la proprietat de que la curva que el fil, en son moviment estacionari, forma, es de molt fàcil realisació.

Pera obtenir les equacions del moviment, bastarà formular el principi de D'Alembert o de l'equilibri entre les forses exteriors donades, les que neixen del moviment relatiu y la d'inercia aplicades a l'element ds.

Direm δ al producte de la densitat per la secció; σ al arch de trajectoria de la corda comptat a partir d'un punt fixe; T la tensió; v la velocitat, igual pera tots els punts de la corda y funció, per consegüent, sols del temps, al que representarem per t; s al arch de la corda comptat a partir d'un punt fixe a la mateixa; r la distancia d'un punt al axi de les z; ρ al radi de primera curvatura; λ, μ, ν als cosinus directors de la binormal, y finalment T, N, N′ les components de la forsa exterior per unitat de massa δds. Ab aquestes notacions, se podrà escriure projectant les forses esmentades sobre la tangent, normal y binormal.

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\left[\frac{dv}{dt}-\mathrm{T}\right]=\frac{d\mathrm{T}}{d\sigma}+\frac{\delta\omega^2}{2}\frac{dr^2}{d\sigma}\\
&\delta[v^2-\rho\mathrm{N}]=\mathrm{T}+\frac{\delta}{2}\left[\omega^2\rho^2\left(\frac{d^2r^2}{d\sigma^2}-2\right)-2\omega v\rho\right]\\
&\omega^2(\lambda x+\mu y)=2\omega v\left(\frac{dx}{d\sigma}\mu-\frac{dy}{d\sigma}\lambda\right)+\mathrm{N}'
\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

(*) Arnoult: *Thèse*. Nancy, 1911.

Ademés, hi ha:

$$\sigma=\int_{0}^{t} v dt+s$$

$$d\sigma^2=dx^2+dy^2+dz^2. \qquad (2)$$

En aquestes equacions, x, y, z son les coordenades d'un punt de la trajectoria.

El sistema de equacions simultànies (1), junt ab la condició d'inextensibilitat (2) formen un conjunt de quatre equacions per determinar x, y, z, T en funció de les dos variables independents σ y t. La solució deu complir ab les condicions de esser δ, en general, funció sols de s, y de esser T positiva.

Les equacions escrites admeten la solució v=constant, convertintse en les d'equilibri d'una corda en les que en lloch de T digués $T-v^2$. Quan $T=N=N'=v=o$ se tenen les equacions diferencials de l'equilibri relatiu de la corda de saltar.

2. Si N' es solament funció de v o sigui de t, l'última equació (1) té la forma

$$S_1=vS_2+N'$$

en la que S_1 y S_2 son funcions solament de σ y en cambi, v y N' ho son sols de t. D'aqueixa relació s'en dedueix que entre v y N' deu haverhi una relació lineal, lo que ve a esser lo mateix que dir que v es constant si N' no fós funció lineal de v. Si ho es, com per exemple,

$$N'=-k_2v+k_1$$

portant aquest valor a la anterior resulta:

$$S_1-k_1=v(S_2-k_2)$$

y aleshores, una de dos, o

$$S_1=k_1 \qquad S_2=k_2 \qquad (3)$$

o v=constant.

L'última de les (1) se desdobla, donchs, en el cas de no esser v constant y esser N' funció lineal de v.

Ara be, la primera de les (3) diu que la projecció de r sobre la binormal a la trajectoria es constant; la segona (3) diu que l'angle que la normal principal forma ab l'axi es també constant.

Si N'=o, *la normal principal perpendicular a la vegada al axi y a la binormal se confón ab* r, *a menys que la binormal sigui paralela al axi, es a dir, que la curva sigui* *plana*. Si no ho es, es a dir, si la curva es torta, en el cas que estem en que $N'=o$, de no esser la velocitat constant, *la curva torta es una hèlice circular*.

Mes aquesta curva podría esser incompatible ab les demés equacions del moviment. Pera analisarho, eliminarem T entre les dues primeres (2). Resulta:

$$\frac{dv}{dt}-T=\frac{1}{\delta}\frac{d}{ds}\delta\,(v^2+2\omega v\rho+\omega^2\rho^2-\rho N)$$

Suposèm T y N funcions sols de v. La equació última té, aleshores, la forma

$$T_1+T_2\frac{dl.\delta}{ds}=o$$

essent T_1 y T_2 funcions sols de t, mentres que $\dfrac{dl.\delta}{ds}$ es funció sols de s. Per consegüent, o $\dfrac{dl.\delta}{ds}$ es constant, o $T_1=T_2=o$. En aquest cas N té que ser una funció de segon grau de v, es a dir:

$$N=\frac{v^2}{\rho}+2\omega v+\omega^2$$

y el moviment ve donat per $\qquad \dfrac{dv}{dt}=T$

Quan N no satisfà la condició anterior, $\dfrac{dl.\delta}{ds}$ es constant, es a dir $\delta=\delta_o e^{ks}$. En aquest cas la velocitat en la trajectoria ve donada per la equació diferencial

$$\frac{dv}{dt}-T=k\,(v^2+\omega^2\rho^2+2\omega v\rho-\rho N)$$

Com cas particular δ pot esser constant, aleshores $k=o$ y la lley del moviment en la trajectoria es

$$\frac{dv}{dt}=T$$

3. Si N' es funció sols de σ la tercera equació (1) es la forma

$$S_1'=vS_2$$

per consegüent, si v no es constant es precís que

$$S_1' = S_2 = o.$$

El valor de N′ no pot per lo tant esser independent, ha d'esser igual a ω^2 multiplicat per la proyecció de r sobre la binormal. La curva, si tota vegada existeix, presenta ademés la proprietat d'estar la normal a angle recte ab l'axi. Quan v es constant tampoch N′ pot esser qualsevulga, donchs té que satisfer a $S_1' = vS_2$.

El cas $N' = o$ ja s'ha vist que porta a una hèlice o a una curva plana. En el cas de la hèlice, suposem T y N funcions sols de σ. La eliminació de T entre les dos primeres equacions (1) du en aquest cas a l'equació

$$\frac{dv}{dt} = [v^2 + 2\omega v\rho + \omega^2\rho^2]\frac{dl.\delta}{ds} - \rho\frac{1}{\delta}\frac{d(N\delta)}{d\sigma} + T$$

de la qual no sembla fàcil trèuren grayres conseqüencies. Però si hi suposem $\delta = \delta_0 e^{ks}$ la equació se simplifica

$$\frac{dv}{dt} - k[v^2 + 2\omega v\rho + \omega^2\rho^2] = T - \rho\frac{dN}{d\sigma} - k\rho N$$

que es de la forma: $$T_1 = S_1$$

essent T_1 funció sols de t_1 y S_1 sols de σ. La equació del moviment en la trajectoria serà donchs:

$$\frac{dv}{dt} = k(v^2 + 2\omega v\rho + \omega^2\rho^2) + k_1$$

ab $k_1 =$ constant. Les components T y N no poden esser qualsevulga. Han de satisfer a la equació

$$T - \rho\frac{dN}{d\sigma} - k\rho N = k_1$$

Si $\delta =$ constant, $k = o$; el moviment es uniformement accelerat o uniforme segons que el valor de k_1 en

$$T - \rho\frac{dN}{d\sigma} = k_1$$

sigui diferent o igual a zero.

4. Considerem ara el cas en que la curva trajectoria es plana. Suposem, en primer lloch, que T y N son funcions sols de v. L'eliminació de T porta, en el cas de suposar $\delta =$ constant $= 1$, a la equació

$$\frac{dv}{dt} - \mathrm{T} - (2\omega v - \mathrm{N}) \frac{d\rho}{d\sigma} - \omega^2 \left[\frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\rho^2 \left(\frac{d^2 r^2}{d\sigma^2} - 2 \right) \right) \right] = 0$$

Aquesta es de la forma: $\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 \mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_2 = 0$

essent T_1 y T_2 funcions de t solament, y S_1 S_2 funcions de σ. De la forma de la equació s'en dedueix (*) que hi deu haver entre les T per lo menys una relació lineal, tal com

$$\mathrm{T}_1 - k_1 \mathrm{T}_2 - k_2 = 0$$

Substituint el valor de T en la fòrmula preanterior, queda

$$\mathrm{T}_2 (k_1 - \mathrm{S}_1) + k_2 - \mathrm{S}_2 = 0$$

Per conseguent, o $\mathrm{T}_2 =$ constant $= -k_3$ y en aquest cas la velocitat es constant en la trajectoria

$$\frac{k_2 - \mathrm{S}_a}{k_1 - \mathrm{S}_1} = k_3 \qquad (4)$$

o be no es constant, però en aquest últim cas se necessita que

$$\mathrm{S}_2 = k_2 \quad , \quad \mathrm{S}_1 = k_1$$

Examinem la compatibilitat d'aquestes dugues equacions, que son

$$\frac{dr^2}{d\sigma} - \frac{d}{d\sigma} \left(\rho^2 \left(\frac{d^2 r^2}{d\sigma^2} - 2 \right) \right) = k^2$$

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = k_1$$

Integrantles y dient k_3 d'una constant arbitraria,

$$r^2 - \rho^2 \left(\frac{d^2 r^2}{d\sigma^2} - 2 \right) = k_2 \sigma + k_3 \qquad (5)$$

$$\rho = k_1 \sigma \quad , \qquad (6)$$

(*) Apell: *Acta Mathematica*, tomo XII.

sense constant arbitraria en la última si se suposa convenientment elegit l'origen de σ.

De (6) posant en lloch de ρ, $\frac{d\alpha}{d\sigma}$ en que $d\alpha$ es l'angle de contingencia y integrant, s'en treu,

$$\sigma = ce^{k_1\alpha} \tag{7}$$

c es una altra constant.

La curva resulta esser, segons aquesta condició, una espiral logarítmica o alguna degeneració de la mateixa. Faltans encara veure si la equació (5) l'admet com solució. Per això ferem lo que's diu a continuació. Derivant l'última equació y recordant que

$$d\sigma = \sec\alpha\ dx = \operatorname{cosec}\alpha\ dy$$

se podràn escriure, després de dos integracions, les equacions següents en les que a y b son constants

$$x-a = \frac{ck_1e^{k_1\alpha}(k_1\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)}{k_1^2+1}$$

$$y-b = \frac{ck_1e^{k_1\alpha}(k_1\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)}{k_1^2+1}$$

De tals valors se ve a deduir

$$r^2 = x^2+y^2 = \frac{c^2k_1^2e^{2k_1\alpha}}{k_1^2+1} + A$$

essent A una funció de α que no conté $e^{k_1\alpha}$ sino solament termes en $e^{2k_1\alpha}$, sen α y cos α. Cambiant σ per la variable α en la equació (5) y portanthi els valors de ρ y σ en funció de α trets de les fórmules (6) y (7), resulta:

$$-\frac{d^2r^2}{d\alpha^2} + k_1\frac{dr^2}{d\alpha} + r^2 + 2k_1^2c^2e^{2k_1\alpha} = k_2ce^{k_1\alpha} + k_3$$

Aquesta equació substituinthi el valor de r trobat abans té que tornarse una identitat en α. Es fàcil veure que duenthi el valor esmentat de r^2, el coeficient de $e^{2k_1\alpha}$ es:

$$\frac{3c^2k_1^2}{k_1^2+1}$$

Això té que esser, per lo tant, zero, y com que c no ho es, ha de serho k_1. Mes aleshores $\frac{d\rho}{d\sigma}=o$, $\rho=$ constant y la curva es un cercle. La equació (5) pot escriures:

$$-k^2\frac{d^2r^2}{d\sigma^2}+r^2+2k^2=k_2\sigma+k_3$$

Per altra part, la equació d'una circumferencia el centre de la qual dista d del origen y el radi de la qual es k, té la forma següent en la que φ es constant:

$$r^2=d^2+k^2-2dk\cos\left(\frac{\sigma}{k}+\varphi_0\right)$$

Aquesta equació no pot satisfer a la anterior, a menys que

$$k_2=d=o$$

El centre de la circumferencia trajectoria es, en resumen, l'origen.

Resulta així que, *si la massa per unitat de longitut es uniforme, solament pot moures el fil ab moviment no uniforme dins de sa trajectoria quan es aquesta una circumferencia de la que l'origen en sigui el centre.* La lley del moviment en la circumferencia es

$$\frac{dv}{dt}-T=o$$

La tensió resulta esser la mateixa per tots els punts a l'hora.

Suposem, en segon lloch, que essent T y N funcions de v com ara mateix, hi hagi entre T_1 y T_2 dos equacions lineals independents. Això equival a suposar constants a abdues. Mes suposar T_2 constant, significa v constant, a menys que N fos tal, que $2\omega v-N=$ const, $=k_2$. En aquest cas, el moviment segons la lley $\frac{dv}{dt}-T=k_1$ es possible en la curva (4).

Es a dir, suposant T y N funcions sols de v, el moviment que examinem es, en general, impossible si v no es constant. Se exceptúa el cas d'una circumferencia ab centre a l'origen y la curva (4) quan $N=2\omega v+k_2$.

5. Passem a analisar ara el cas d'una curva plana, ab $\delta=1$ quan T y N son

funcions sols de σ. El resultat de eliminar T entre les dues primeres equacions (1) es:

$$\frac{dv}{dt}-2\omega v\frac{d\rho}{d\sigma}-T+N\frac{d\rho}{d\sigma}-\omega^2[A]=0$$

havent posat abreviadament

$$A=\frac{1}{2}\frac{dr^2}{d\sigma}-\frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma}\left(\rho^2\left(\frac{d^2r^2}{d\sigma^2}-2\right)\right)$$

El resultat de la eliminació té per consegüent la forma:

$$T_1-T_2S_1-S_2=0$$

com en el cas anterior, però les lletres tenen aquí diferent significació. Se pot en conseqüencia fer un anàlisis semblant del que en resulta que, o v es constant en la trajectoria

$$\frac{S_2-k_2}{S_1-k_1}=k_3$$

o be, admesa la compatibilitat de $S_1=k_1$ y $S_2=k_2$ per lo qual T y N no poden esser qualsevulga, ja que entre elles hi ha una relació donada per la naturalesa del moviment, la trajectoria es una espiral logarítmica

$$S_1=k_1$$

o alguna degeneració seva.

Els cassos en que T y N son la suma d'una funció de v y altra de σ porten a conseqüencies per l'istil. Si v no es constant, la trajectoria es una espiral logarítmica o alguna degeneració d'ella; les components de la forsa en aquest cas no poden tampoch ser arbitraries.

Finalment, siguin T y N productes de funcions v y σ: $T=T_vT_\sigma$; $N=N_vN_\sigma$. El resultat de eliminar T entre les dues primeres (1) es:

$$\frac{dv}{dt}-T_vT_\sigma-2\omega v\frac{d\rho}{d\sigma}+N_vN_\sigma\frac{d\rho}{d\sigma}-\omega(A)$$

equació de la forma

$$T_1-T_2S_1-T_3S_2+T_4S_3+S_4=0$$

Aquí caldría considerar diferents cassos segons el número de relacions lineals independents que pot haverhi entre les T, número que pot variar entre 1 y 4 inclusius. Si es 1, v es constant; si dos, T_v y N_v han de satisfer a la equació que resulta de eliminar v entre les equacions lineals a que satisfan les T; aleshores les S en satisfan també tres, per conseguent T_σ y N_σ han de satisfer a dos, y resulta eliminantles d'entre les tres a que satisfan les S la equació de la trajectoria; si n'hi ha tres de equacions entre les T, n'hi haurà dos entre les S, les tres primeres imposen valors a T_v y N_v, eliminantles queda la equació del moviment en la trajectoria, les dos relacions lineals entre les S imposen una relació entre T_σ y N_σ. Finalment si hi ha quatre relacions entre les T, v es constant

6. Una aplicació interessant de les fórmules anteriors y que anem a tractar en lo que segueix, es la trajectoria relativa d'una corda sense fi que gira al voltant d'un cilindre de revolució per la part exterior o interior del mateix, sensa lliscar en la part en contacte ab el cilindre. Es molt fàcil de realisar materialment el cas; basta cloure una cadena de relotje de manera que no tingui extrems y penjarla del bras. Quan se fa de manera que la cadena tombi al voltant del bras, aquella adopta la forma d'un 8.

Prescindint de la gravetat, les úniques forses aplicades son les del moviment relatiu, o siguin la centrífuga ordinaria y la composta. Fent donchs en les dues primeres fórmules (1), $T=N=0$, tindrem les equacions diferencials del moviment.

De la discussió que acabem de fer n'ha resultat que quan $T=N=0$ la velocitat deu necessariament haver d'esser constant en una corda uniforme o de densitat y secció constants. En el cas concret que ara'ns ocupa el valor de la velocitat surt desseguida de la condició de no lliscar:

$$v=\omega r_1$$

si r_1 es el radi del cilindre.

Eliminant T entre les dos primeres equacions (1) resulta la equació diferencial de la trajectoria

$$\frac{dr^2}{d\sigma^2}-\frac{d}{d\sigma}\left[\rho^2\left(\frac{d^2r^2}{d\sigma^2}-2\right)-4r_1\rho\right]=0$$

que, integrada, dóna:
$$r^2+\rho^2\left(\frac{d^2r^2}{d\sigma^2}-2\right)-4r_1\rho=\text{constant}$$

Introduinthi la distancia p del origen a la tangent, es fàcil veure, tan sols recordant el valor del radi de curvatura en coordenades polars, que

$$\rho=\frac{2p}{2-\dfrac{d^2r^2}{d\sigma^2}} \tag{8}$$

Per consegüent, anomenant h_1 a la constant d'integració, se podrà escriure:

$$r^2 + 2\rho p + 4r_1 \rho = h_1 \qquad (9)$$

Ara be, recordant que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\frac{dp}{dr}$$

tindrem a l'eliminar ρ:

$$\frac{dp}{p + 2r_1} + \frac{2rdr}{r^2 - h_1} = 0$$

Integrant, y essent k_2 altre constant,

$$(p + 2r_1)(h_1 - r^2) = k_2 \qquad (10)$$

L'adaptació de la curva al cilindre té lloch per $r = r_1$. Per aquest valor de r, la curva es tangent al cilindre y

$$p = -r_1$$

Se pren el signe — per la rahò següent: L'adaptació sense lliscar, exigeix que, contant los angles polars θ positivament en sentit del moviment dels axis, y les σ positivament en el sentit del moviment en la trajectoria relativa, $d\theta$ y $d\sigma$ siguin de signe contrari en tot l'arch d'adaptació. Per altra banda, essent $p = r^2 \frac{d\theta}{d\sigma}$, p té que esser negatiu per $r = r_1$. Introduint aquesta condició en la fórmula (10) se expressarà k_2 en funció de h_1:

$$k_2 = r_1 (h_1 - r_1^2)$$

y la equació de la trajectoria será

$$(p + 2r_1)(h_1 - r^2) = r_1 (h_1 - r_1^2)$$

La constant h_1 que intervé en aquesta fórmula, podrà venir determinada, per exemple, per esser una donada la longitut total de la corda.

El no intervenirhi ω o sigui la velocitat angular dels axis, ens diu que la forma de la trajectoria relativa per una longitud donada, es independent de la velocitat de rotació dels axis. Vol dir que, penjant com s'ha dit la cadena del bras, *si's fa tombar més depressa la forma geomètrica resta invariable.*

Aquesta propietat de la curva resulta immediatament del fet d'esser la forsa centrífuga $\omega^2 r$, y la de Coriolis $2\ \omega^2 r_1$. Abdues varíen del mateix modo ab el quadrat de la velocitat angular ω, de modo que sa resultant, o forsa exterior en lo moviment relatiu, al aumentar o disminuir ω varía en valor absolut com ω^2 però no cambía ni en direcció ni en sentit. Y, com aquella resultant es equilibrada per la forsa tangencial $\frac{dT'}{d\sigma}$ y la normal centrípeta $\frac{T'}{\rho}$ essent $T'=T-v^2$, en resulta que T' aumenta o disminueix del mateix modo y la forma de la curva resta invariable. La tensió, en cambi, aumenta com el quadrat de ω.

La equació de la curva en coordenades polars resulta d'una quadratura com segueix. Sigui q el cateto que no es p del triangle rectangle que determinen r, la tangent en son extrem y p.

Tindrem:
$$\frac{p}{q} = \frac{r d\theta}{dr}$$

D'ahont, per esser
$$q^2 = r^2 - p^2$$

sortirà
$$d\theta = \pm \frac{p dr}{r\sqrt{r^2-p^2}}$$

Prenent l'origen de θ en el radi $r=r_1$ y posant $r_1^2=z_1$ y $r^2=z$,

$$\pm\frac{\theta}{r_1} = \int_{z_1}^{z} \frac{2z-z_1-h_1}{2z\sqrt{R}} dr$$

essent
$$R = (z-z_1)\left[z^2-(2h_1+3z_1)z+(h_1+z_1)^2\right] = (z-z_1)(z-z_a)(z-z_b)$$

ab
$$\begin{matrix} z_b \\ z_a \end{matrix} = h_1+\frac{3}{2}z_1 \pm \sqrt{h_1 z_1+\frac{5}{4}z_1^2}$$

En aqueixa fórmula el signe + correspòn a z_b, el — a z_a

Pera discutir la forma de la curva, recordarem abans les limitacions a que estàn subjectes les coordenades.

Son dues. En primer lloch, es precís que'ls valors de z compleixin

$$R \geq o$$

En segon lloch, T ha de esser positiva. Ara be, de la segona de les equacions (1) en surt, tenint en compte (8) y (9).

$$\frac{T}{\omega^2} = h_1 + 2z_1 - z$$

Així donchs, si el primer membre ha de esser igual o major que zero,

$$z \leq h_1 + 2z_1$$

En la discussió se podràn distingir dos cassos; primer:

$$h_1 > z_1$$

y segon: $$h_1 < z_1$$

Primer cas. Les tres arrels z_1, z_a y z_b de $R=o$ son reals y positives. Tenen lloch les desigualtats següents

$$z_b > z_a > z_1,$$

la curva està compresa en la corona $r=r_1$, $r=\sqrt{z_a}$. Es tangent, per aquestos valors límits de r a les circumferencies que son la vora de la corona.

Hi ha un punt per lo que p s'anula, y es aquell quina z ve donada per

$$r^2_p = z_p = \frac{h_1 + z_1}{2}$$

valor de z evidentment comprès entre z_1 y z_a.

La curva, sortint de $r=r_1$ al arribar a la distancia $\sqrt{z_a}$ de l'origen, se continúa per altre branca simètrica de la anterior respecte de $\sqrt{z_a}$ (doble signe devant de θ).

Quan la nova branca arriba a la distancia r_1 de l'origen, se continúa per altre congruent ab la primera y simètrica d'aquella respecte de r_1. Y així successivament.

La trajectoria resulta formada per infinitat de branques simètriques o congruents.

Cada dos branques simètriques respecte del radi màxim se tallen formant llàs. En efecte, per de prompte, allí ahont p s'anula, ρ val, segons la fórmula 9.

$$\frac{h_1 - z_1}{8r_1};$$

la curva passa, donchs, en aquell punt de còncava a convexe respecte de l'origen, o viceversa, segons el sentit en que se segueixi. Ademès, el radi de curvatura en qualsevol punt ve donat per

$$2r_1\,\rho = \frac{(h_1 - z)^2}{h_1 - z_1},$$

com z es mínim per $z = z_1$, el radi de curvatura es aleshores màxim y arriba a valer

$$\rho_1 = \frac{h_1 - z_1}{2r_1}$$

A partir de $r = r_1$ el radi de curvatura baixa d'una manera continuada; per el punt en que ρ s'anula es la quarta part del valor anterior y's fa mínim, sensa anularse

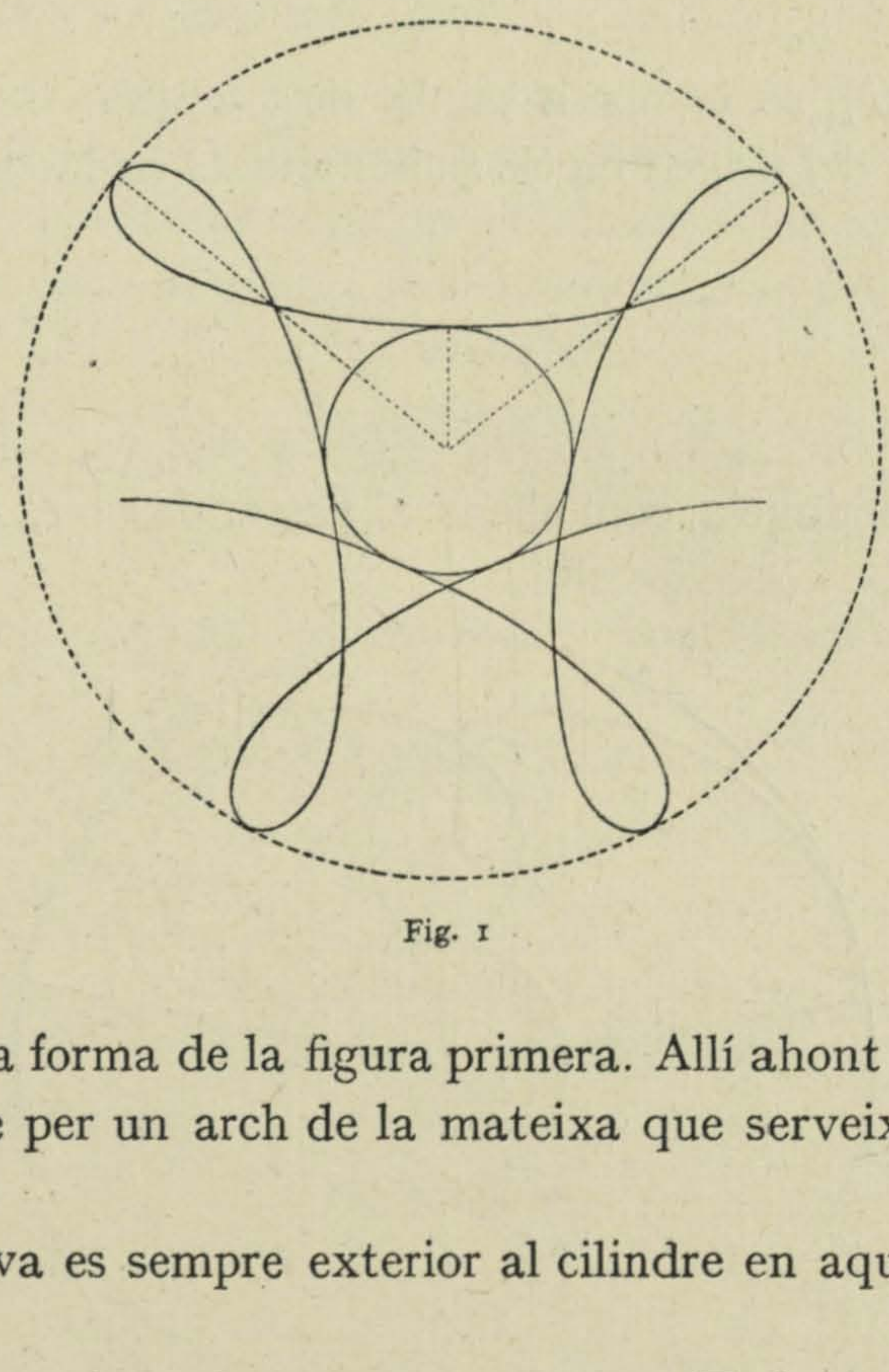

Fig. 1

per $z = z_a$. La curva té la forma de la figura primera. Allí ahont es tangent a la circumferencia pot continuarse per un arch de la mateixa que serveixi de curva d'adaptació al cilindre.

Per lo demés, la curva es sempre exterior al cilindre en aquest cas.

Segon cas. $h_1 < z_1$.

L'arrel z_a de $R = 0$ es més petita que r_1; per que $\sqrt{R}$ sigui real es precís que

$$z_b > z_1 > z_a$$

La variable pot variar sols entre z_1 y z_a. La trajectoria es interior al cilindre.

La primera desigualtat entre les dos últimes imposa un límit inferior a h_1. En efecte, suposem h_1 negatiu y sigui h' son valor absolut. El valor més gran admisible per h' s'obtindrà suposant

$$z_b = z_1$$

o siga

$$\frac{3}{2} z_1 - h' + \sqrt{z_1 \left(\frac{5}{4} z_1 - h' \right)} = z_1$$

d'ahont

$$h' = z_1$$

Per consegüent, en aquest segon cas, te lloch la següent doble limitació

$$-z_1 < h_1 < z_1$$

La trajectoria (fig. 2.ª), se composa també de branques congruents, passa de còncava a convexe respecte del origen en els punts situats en la circumferencia del radi r_p en que

$$r_p^2 = z_p = \frac{z_1 - h'}{2},$$

y el radi de curvatura disminueix, com abans, al passar de $r = r_1$, ahont es màxim, a $r = r_a$

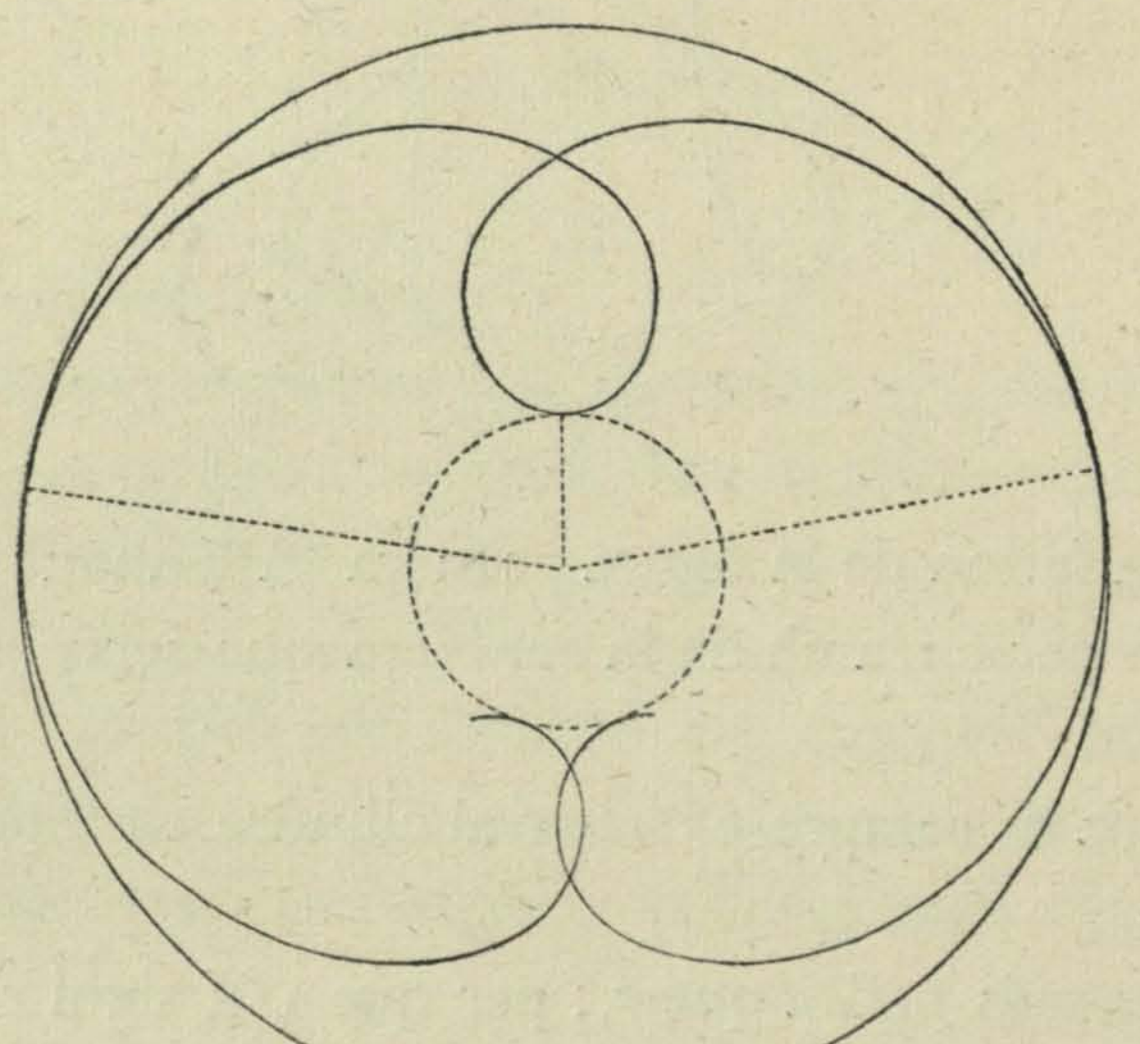

Fig. 2

ahont es mínim. No hi ha inflexions, perque'l radi de curvatura ni aquí, ni en lo cas anterior pot ferse infinit. Ni tampoch anularse, donchs el valor de $z=h'$ que anula ρ no es admisible quan $h_1<z_1$ per esser h' més petita que z_a y aquesta mínima.

Quan $h_1=-z_1$, $z_b=z_1$ y $z_a=o$. Prenent l'origen de θ corresponent al radi mínim cero, la equació de la curva es en aquest cas,

$$\pm\theta=l.\frac{r_1-r}{r_1+r}$$

El radi de curvatura baixa desde r_1 fins a $\frac{r_1}{4}$ quan la curva passa per l'origen. La trajectoria es asintòtica al cilindre. Està formada per dos branques infinites simètriques respecte de la tangent comú en l'origen que es un punt de parada pera cada branca y de retrocés pera el conjunt d'abdues.

Finalment, el cas $h_1=z_1$ correspòn a la circumferencia $r=r_1$, com se dedueix, no de la integral, sinó del valor de p en funció de r.

7. Les quadratures poden expressarse ab ajuda de les funcions elíptiques del modo que's treu a continuació. Prescindint del doble signe que precedeix a θ, ja que les branques són simètriques, la quadratura que dona θ es descomposable en dues:

$$\frac{\theta}{r_1}=\int_{z_1}^{z}\frac{dz}{\sqrt{R}}-\frac{h_1+z_1}{2}\int_{z_1}^{z}\frac{dz}{\sqrt{R}}$$

Pera operar ab les funcions de Weierstrass, se comensarà per cambiar de variable, posant:

$$z=\sqrt[3]{4}x+j$$

ab

$$j=\frac{2h_1+4z_1}{3} \qquad \text{(I)}$$

Les tres arrels en x de $R=o$ són e_1, e_2, e_3; suposant $e_1>e_2>e_3$; en el primer cas $(h_1>z_1)$ venen donades per

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{4}e_1&=z_b-j\\ \sqrt[3]{4}e_2&=z_a-j\\ \sqrt[3]{4}e_3&=z_1-j\end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

y en el segon cas $-z_1<h_1<z_1$ per

$$\sqrt[3]{4e_1} = z_b - j$$

$$\sqrt[3]{4e_2} = z_1 - j$$

$$\sqrt[3]{4e_3} = z_a - j$$

Ab el cambi de variable R se torna

$$R = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

ab

$$-\frac{1}{4} g_2 = e_2 e_3 + e_1 e_2 + e_2 e_3$$

$$\frac{1}{4} g_3 = e_1 e_2 e_3$$

Considerem ara la integral

$$u = \int_{e_3}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

La variable x varía decreixent de e_2 a e_3. Per altra part, x satisfà l'equació diferencial

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{R} = \sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}$$

Ara be, la funció p (I) de Weierstrass satisfà a

$$\frac{dp}{dI} = \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}$$

Posant donchs

$$x = p \tag{I}$$

y tenint compte de l'expressió anterior, se té

$$dI = du$$

Per consegüent

$$I = u + \text{constant.}$$

Pera determinar el valor de aquesta constant, s'observarà que, per $x = e_3$, $u = o$, y, en cambi, de $e_3 = p$ (I) en surt $I = w_2$ essent w_2 el semiperíode imaginari de p (I). Així, donchs

$$I = u + w_2$$

Derminant u per l'equació

$$r^2 = \sqrt[3]{4}\wp(u+w_2)+j$$

tindrém, en fí
$$\frac{\theta}{\sqrt[3]{4r_1}} = u - \frac{h_1+z_1}{2}\int_{w_2}^{1}\frac{du}{\sqrt[3]{4}\wp(u)+j}$$

Pera resoldre l'última quadratura, comensarem per determinar v, donat per

$$\frac{-j}{\sqrt[3]{4}} = \wp(v)$$

El valor de v ha de ser purament imaginari, donchs les arrels $e_1\ e_2\ e_3$ són reals y $\frac{-j}{\sqrt[3]{4}}$ es inferior a la més petita de les arrels e_3. El valor de $\wp'(v)$ es imaginari pur y negatiu.

$$\wp'(v) = -\sqrt{4(\wp(v)-e_1)(\wp(v)-e_2)(\wp(v)-e_3)}$$
$$= -ir_1\, r_a\, r_b = -ir_1(h_1+z_1)$$

Recordant ara que

$$\int_{w_2}^{1}\frac{du}{\wp(u)-\wp(v)} = \frac{-1}{\wp'(v)}\left[2u\zeta(v)+l\frac{\sigma(1-v)\,\sigma(w_2+v)}{\sigma(1+v)\,\sigma(w_2-v)}\right]$$

tindrem
$$\theta = \left[\sqrt[3]{4r_1} - i\zeta(v)\right]u - \frac{i}{2}l.\frac{\sigma(u+w_2+v)\,\sigma(w_2-v)}{\sigma(u+w_2+v)\,\sigma(w_2-v)}$$

Pera poder servirme de les tables en el càlcul de u y v convé passar a les funcions de Jacobi. De les dos desigualtats

$$\wp(u)-e_3 = \frac{e_1-e_3}{sn^2\left(u\sqrt{e_1-e_3}\right)}$$

y
$$\wp(u)-e_3 = \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\wp(u+w_2)-e_3} = \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{r^2-r_1^2}\sqrt[3]{4}$$

s'en pot treure, igualant els segons membres

$$sn^2\left(u\sqrt{e_1-e_3}\right) = \frac{r^2-r_1^2}{r_a^2-r_1^2} \qquad \text{(III)}$$

5

Pera la curva interior, en lloch de r_1 hi ha que posar r_a. Lo mateix succeheix en les fórmules III, V, X y XVII que segueixen.

Entrant en les taules de la integral de primera especie de Legendre ab els valors de α y φ definits per

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \tag{IV}$$

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{r^2 - r_1^2}{r_a^2 - r_1^2} \tag{V}$$

se troba en les taules (per exemple de Jahnke) el valor de

$$\sqrt{e_1 - e_3}\, u \tag{VI}$$

d'ahont se calcula u.

Les taules d'integrals elípticas complertas K poden servir per el càlcul dels semiperíods w_1 y w_2, ja que es ben sapigut que

$$w_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}} \tag{VII}$$

$$w_2 = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}} \tag{VIII}$$

El càlcul de v se podrà fer com se indica tot seguit. De

$$sn^2 v \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{e_1 - e_3}{p(v) - e_3} = \frac{r_b^2 - r_1^2}{-r_1^2}$$

s'en treu, posant $v\sqrt{e_1 - e_3} = iv'$

$$r_1^2\, sn^2\, iv' = -(r_b^2 - r_1^2)$$

Mes recordant que

$$sn\, iv' = i\frac{sn\,(v' \mid K_1',\, iK)}{cn\,(v' \mid K_1',\, iK)} = i\frac{\overline{sn}\, v'}{\overline{cn}\, v'}$$

tindrem

$$\overline{sn}^2\, v' = \frac{r_b^2 - r_1^2}{r_b^2}$$

Entrant a les taules ab els arguments α' y φ' definits per

$$\operatorname{sen}^2 \alpha' = 1 - k^2 \tag{IX}$$

$$\operatorname{sen}^2 \varphi' = \frac{r_b^2 - r_1^2}{r_b^2} \qquad \text{(X)}$$

trobarem v' o sigui

$$\frac{v\sqrt{e_1 - e_3}}{i} \qquad \text{(XI)}$$

Una vegada calculats v y diferents valors de u per els corresponents de r, pot trobarse θ. Mes la serie ordinaria per a ζ y fins les de la funció σ no convergeixen massa depressa. Pera facilitar el càlcul numèrich, transformarem com a seguit s'indica l'expressió de θ.

En primer lloch, se recordarà que (*)

$$\sigma(a + w_2) = \sigma(w_2)\, \sigma_3(a)\, e^{\zeta(w_2)\, a}$$

$$= \sigma(w_2)\, e^{h(w_2) a + \frac{1}{2} \frac{h(w_1)}{w_1} a^2} \frac{\vartheta_0(a)}{\vartheta_0(o)}$$

essent

$$\vartheta_0(a) = 1 - 2q \cos \frac{\pi a}{w_1} + 2q^4 \cos \frac{2\pi a}{w_1} - 2q^9 \cos^3 \frac{\pi a}{w_1} + \ldots..$$

$$q = e^{i\pi \frac{w_2}{w_1}} = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

De la funció q n'hi ha taules.

Substituint en el valor de θ les σ per les δ, resulta:

$$\frac{\sigma(u - v + w_2)\, \sigma(v + w_2)}{\sigma(u + v + w_2)\, \sigma(-v + w_2)} = \frac{\vartheta_0(u - v)}{\vartheta_0(u + v)}\, e^{-2\frac{\zeta(w_1)}{w_1} uv}$$

Per consegüent

$$\theta = \left[\sqrt[3]{4r_1} + i\left[\frac{v}{w_1}\zeta(w_1) - \zeta(v)\right]\right] u - \frac{i}{2}\, l \frac{\vartheta_0(u - v)}{\vartheta_0(u + v)}$$

Ara be, recordant que v es imaginaria pura, se pot escriure

$$\frac{\vartheta_0(u - v)}{\vartheta_0(u + v)} = \frac{A + iB}{A - iB} = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} + i \frac{2AB}{B^2 + A^2}$$

$$= \cos J + i \operatorname{sen} J = e^{iJ}$$

(*) Vegis, per exemple, *Principales formules de la théorie des fonctions elliptiques*, París, 1900, y qualsevol tractat de funcions elíptiques.

NOTA. — Seguint estrictament la notació més corrent deuría escríures $2w_1 a$ en lloch de a en $\vartheta_0(a)$.

ab

$$A = 1 - 2q \cos h \frac{\pi}{w_1} v'' \cos \frac{\pi}{w_1} u + 2q^4 \cos h \frac{2\pi}{w_1} v'' \cos \frac{2\pi}{w_1} u - \ldots \quad \text{(XII)}$$

$$B = -2q \operatorname{sen} h \frac{\pi}{w_1} v'' \operatorname{sen} \frac{\pi}{w_1} u + 2q^4 \operatorname{sen} h \frac{2\pi}{w_1} v'' \operatorname{sen} \frac{2\pi}{w_1} u - \ldots \quad \text{(XIII)}$$

$$\sqrt{e_1 - e_3}\, v'' = v'$$

Ab els valors de v^1 y u poden calcularse A y B per aquestes fórmules que són molt convergents. Coneguts A y B, se'n pot treure J per la fórmula

$$tg J = \frac{2AB}{A^2 - B^2} \quad \text{(XIV)}$$

y el valor de θ resulta

$$\theta = \left[\sqrt[3]{4} r_1 + i \left(\frac{v}{w_1} \zeta(w_1) - \zeta(v) \right) \right] u + \frac{1}{2} J$$

Encara, la serie que dóna ζ (v) no es sobradament convergent. Mes se recordarà que

$$\zeta(a) = \frac{\sigma'(a)}{\sigma(a)} = \frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)} + \frac{\zeta(w_1)}{2w_1} a$$

essent

$$\vartheta_1(a) = 2q^{\frac{1}{4}} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi a}{2w_1} - q^2 \operatorname{sen} \frac{3\pi a}{2w_1} + q^6 \operatorname{sen} \frac{5\pi a}{2w_1} - \ldots \right)$$

Substituint en lloch de a, $iv'' = v$, queda:

$$\theta = \left[\sqrt[3]{4} r_1 - \pi V \right] u + \frac{1}{2} J$$

essent

$$V = \frac{1}{2w_1} \frac{\cos h \frac{\pi v''}{2w_1} - 3q^2 \cos h \frac{3\pi v''}{2w_1} + \ldots}{\operatorname{sen} h \frac{\pi v''}{2w_1} - q^2 \operatorname{sen} h \frac{3\pi v''}{2w_1} + \ldots} \quad \text{(XV)}$$

Numerador y denominador d'aqueix valor de V són també molt convergents. Ab el valor de v'' se pot calcular V.

Si θ s'expressa en graus, minuts y segons, així com J, el valor de θ serà

$$\theta = 180 \left[\frac{\sqrt[3]{4}}{\pi} r_1 - V \right] u + \frac{1}{2} J \quad \text{(XVI)}$$

La serie de fórmules de I a XIV indica, com pot procedirse en el càlcul numèrich de punts de la trajectoria, partint de valors donats de r_1 y h_1, dels quals se dedueixen r_a y r_b.

Per $r=r_a$, $u=w_1$, $J=o$, $\theta=\theta_1$.

$$\theta_1 = 180\left[\frac{\sqrt[3]{4}}{\pi}r_1 - V\right]w_1$$

Pel valor de z tal que z_b-z sigui meitat geomètrica entre z_b-z_a y z_b-z_1, $u=\frac{w_1}{2}$. Aquesta propietat resulta immediatament d'esser

$$p\left(\frac{w_1}{2}+w_2\right)=e_1-\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}$$

Finalment, calcularem la fórmula que dóna la longitut a contar de $r=r_1$.

Es fàcil veure que

$$d\sigma=\frac{rdr}{q}=\frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{z-p^2}}$$

Portant a aquesta expressió el valor de p y integrant,

$$\sigma=\frac{1}{2}\int_{z_1}^{z}\frac{(h_1-z)\,dz}{\sqrt{R}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(h_1-j)\,u-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\int_{w_2}^{1}\sqrt[3]{4}p\,(u)\,du$$

o be

$$\frac{2\sigma}{\sqrt[3]{4}}=(h_1-j)\,u-\sqrt[3]{4}\,(\zeta\,(w_2)-\zeta\,(u+w_2))$$

Pel teorema d'adició de la funció ζ, se té

$$\zeta\,(u+w_2)=\zeta\,(u)+\zeta\,(w_2)+\frac{1}{2}\frac{p'\,(u)}{p\,(u)-e_3}$$

estant u compresa entre o y w_1, p' es real y negativa. Però,

$$\frac{\sqrt[3]{4}p'\,(u)}{p\,(u)-e_3}=-\sqrt{\frac{(r_a^2-r^2)\,(r_b^2-r^2)}{r^2-r_1^2}},$$

per consegüent,

$$\frac{2\sigma}{\sqrt[3]{4}}=(h_1-j)\,u-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(r_b^2-r^2)\,(r_1-r^2_b)}{r^2-r_1}}+\sqrt[3]{4}\zeta\,(u) \qquad \text{(XVII)}$$

Pel càlcul de $\zeta(u)$ se pot acudir a la fórmula

$$\zeta(w) = \frac{\zeta(w_1)}{w_1} u + \frac{\vartheta'_1(u)}{\vartheta_1(u)}$$

en el que

$$\frac{\zeta(w_1)}{w_1} = -e_3 - \frac{2\pi^2}{w_1^2} \Sigma \frac{q^n}{(1-q^n)^2}; \quad n = 1, 3, 5.....$$

$$\frac{\vartheta'_1(u)}{\vartheta_1(u)} = \frac{\pi}{2w_1} \frac{\cos\frac{\pi u}{2w_1} - 3q^2 \cos\frac{3\pi u}{2w_1} + ...}{\operatorname{sen}\frac{\pi u}{2w_1} - q^2 \operatorname{sen}\frac{3\pi u}{2w_1} + ...}$$

La longitut l de una branca, de $r=r_1$ a $r=r_2$, es:

$$l = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\left(h_1 - j + \sqrt[3]{4}\frac{\zeta(w_1)}{w^1}\right) w_1$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\left(h_1 - r_1^2 - \sqrt[3]{4}\frac{2\pi^2}{w_1^2}\Sigma\frac{q^n}{(1-q^n)^2}\right) w_1$$

La longitut L de la corda sense fí, que pràcticament realisa la trajectoria al penjar la corda d'un cilindre, serà igual a un número enter de vegades $2l$ més el mateix número de vegades $2\pi r_1 - 2\theta_1$, expressant θ_1 en radiants

$$\frac{L}{2n} = l + \pi r_1 - \theta_1$$

8. Les curves objecte d'aquest treball nostre, depenen de dos paràmetres, que poden esser, per exemple, r_1^2 y h_1 ó r_1 y L, r_1 y r_a, etc. Ara be, les curves per les que'l quocient dels dos paràmetres determinants té el mateix valor, són homotètiques respecte del origen. Posant

$$\frac{r_1^2}{h^1} = X$$

se pot dir que'l conjunt de les curves possibles se composa de la serie infinita obtinguda fent variar X de 1 a 0 (curves exteriors) y de 1 a —1 (curves interiors), més la infinitat de curves homotètiques d'aquèllas respecte del origen. A mesura que h_1 o r_1 aumentan, θ_1 aumenta en el cas de curva exterior a la circunferencia de radi r_1, tendint a $\frac{\pi}{2}$ en el límit. Quan, al esser $h_1 < z_1$, h_1 o r_a disminueixen, θ_1, aumenta sense límit finit.

A tota curva exterior definida per els valors r_a y r_1 s'hi pot fer correspondre una curva interior que'n podriem dir conjugada, per la que $r_1{}^1 = r_a$ y $r_a{}^1 = r_1$ indicant ab cantitats accentuades les que's refereixen a la curva interior. Construida la primera, l'altre en surt mitjansant les fórmules

$$r^1 = r$$

$$\theta^1 = \theta + \sqrt[3]{4}\,(r_a - r_1)\,u$$

$$l^1 = l + \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\,w_1\,(z_a - z_1 - (h_1 + h^1))$$

En efecte: de les fórmules que donen z_a y z_b se'n dedueix, eliminant h_1 que z_b es el doble de la suma de la meitat aritmètica y la geomètrica de z_1 y z_a, es a dir:

$$\frac{z_b}{2} = \frac{z_1 + z_a}{2} + \sqrt{z_1 z_a}$$

Per això, al passar d'una curva a sa conjugada permutant r_1 y r_a, z_b no altera; les tres arrels de $R = o$ són les mateixes per abdúes curves y en conseqüencia, els valors de j, v, w_1, w_2, u y J són els mateixos també. D'aquí'n surt desseguida lo que volíam demostrar, no més que restan els valors de θ^1 y θ d'una part, de l^1 y l de l'altra.

Del valor de z_a ne surt además

$$h_1 = z_a - z_1 \pm \sqrt{z_1 z_a}\ ;$$

el signe + convé sol devant del radical si les arrels de $z^2 - (2h_1 + 3z_1)\,z + (h_1 + z_1)^2 = o$ han d'esser z_a y z_b. Permutant z_1 y z_a,

$$h_1{}^1 = z_1 - z_a \pm \sqrt{z_1 z_a}$$

Aquí s'ha de pendre el signe — devant del radical si les arrels de $z^2 - (2h_1{}^1 + 3z_a)\,z + (h_1{}^1 + z_a)^2 = o$ han d'esser z_1 y z_b. El signe + en el valor de h_1 fa $h_1 > z_1$ y el — en $h^1{}_1$ fa $-z_1 < h_1{}^1 < z_1$; abdúes solucions convenen.

La figura 1 representa una curva exterior y la 2 la seva conjugada. Responen als següents valors dels paràmetres que s'indiquen en el quadro que segueix ahont hi ha calculats també els valors d'algunes coordenades y altres elements utilisats en el dibuixar la curva

	Exterior	Interior conjugada
r_1	1 cm.	3,5 cm.
r_a	3,5 »	1 »
r_b	4,5 »	4,5 »
r_p	2,80 »	1,5 »
h_1	14,75 »	— 7,75 »
j	11,17 »	11,17 »
ρ_1	6,87 »	2,85 »
ρ_a	0,23 »	0,54 »
ρ_p	1,71 »	0,71 »
θ_1	—50° 27′	80° 27′
θ_p	—56° 51′	—22° 10′
l	3,2 cm.	7,3 cm.

9. Per terminar, expressarem $x+iy$ en funció uniforme de u. Per això, se recordarà que

$$r^2 = \sqrt[3]{4}\left[\wp(u+w_2) - \wp(v)\right] =$$

$$-\sqrt[3]{4}\,\frac{\sigma(u+w_2+v)\,\sigma(u+w_2-v)}{\sigma^2(u+w_2)\,\sigma^2(v)}$$

del que'n surt

$$r^2 e^{2i\theta} = (x+iy)^2 = -\sqrt[3]{4}\,e^{2i\left[\sqrt[3]{4}\,r_1 - i\zeta(v)\right]u}\,\frac{\sigma^2(u+w_2-v)\,\sigma(w_2+v)}{\sigma^2(u+w_2)\,\sigma(w_2-v)\,\sigma^2(v)}$$

$$= -\sqrt[3]{4}\,e^{2v\zeta(w_2)+2\left(\sqrt[3]{4}\,r_1 - i\zeta(v)\right)u}\,\frac{\sigma^2(u+w_2-v)}{\sigma^2(u+w_2)\,\sigma^2(v)}$$

y extrayentne l'arrel quadrada,

$$x+iy = i\sqrt[3]{2}\,\frac{\sigma(u+w_2-v)}{\sigma(u+w_2)\,\sigma(v)}\,e^{i\left(v\zeta(w_2)+\left(\sqrt[3]{4}\,r_1 - ih(v)\right)u\right)}$$

La funció $x+iy$ resulta, així, doblement periòdica de segona especie ab multiplicadors constants μ y μ', corresponents als pseudoperíodes $2w_1$ y $2w_2$, en que μ y μ' venen donats per:

$$l.\mu = i\left[\sqrt[3]{4}\,r_1 - i\zeta(v)\right]w_1 - 2\zeta(w_1)\,v$$

$$l\mu' = i\left[\sqrt[3]{4}\,r_1 - i\zeta(v)\right]w_2 - 2\zeta(w_2)\,v$$

Aquests multiplicadors no són especials, ja que

$$w_1\, l\mu' - w_2\, l\mu = 2v\left(w_2\, \zeta(w_1) - w_1\, \zeta(w_2)\right) = \pi i v$$

Pel càlcul numèrich, podrà ventatjosament adoptar $x+iy$ la forma:

$$x+iy = i\sqrt[3]{2}\,\frac{\vartheta_0(u-v)}{\vartheta_0(u)}\, e^{\frac{1}{2}\frac{\zeta(w_1)}{w_1}v^2 + u\left(i\left(\sqrt[3]{4}\, r_1 - i\zeta(v)\right) - v\,\frac{\zeta(w_1)}{w_1}\right)}$$

Obtingut el valor de $x+iy$ se pot procedir al exàmen de si, per valors especials de les constants determinatrius de la curva, no fóra aquesta algèbrica. Pera això, fóra necessari que prescindint d'un factor independent de u, se pogués posar $x+iy$ en la forma

$$\frac{\sigma(u+w_2-v)}{\sigma(u+w_2)\,\sigma(v)}\, e^{v\frac{\zeta(w_2)}{w_2}(u+w_2)}$$

essent, però, v donat per $\qquad v = \dfrac{2n}{m} w_2$

en que n y m són sencers. Es cosa sapiguda, que en efecte, la funció elíptica que s'acaba d'escriure es funció algèbrica de $p(u+w_2)$ y ses derivades, per conseguent, en el nostre cas, resultaría $x+iy$ funció algèbrica de x^2+y^2.

Mes pera això se necessiten dugues condicions. La primera, servintse de la notació de Halphen (*) es:

$$\psi_m(v) = 0 \qquad (a)$$

y la segona, en nostre cas, se pot escriure

(*) Halphen: *Fonctions elliptiques*, tomo 1.er, ps. 96 y 220.

$$i\left(\sqrt[3]{4}\,r_1 - i\zeta(v)\right) = \frac{2n}{m}\zeta(w_2) \qquad (b)$$

Ara be, d'aquesta última se deduiex que, si hi ha una curva algèbrica, es necessariament tancada y tal, que l'angle $2\vartheta_1$ es igual a les $\frac{n}{m}$ parts de la circumferencia, es a dir, que la curva se tanca després de repetirse m vegades y donar n voltes a la circumferencia del radi r_1. En efecte: la condició de tancada després de n' voltes haventse repetit m' vegades es:

$$2\vartheta_1 = \frac{n'}{m'}360 = 2w_1\frac{180}{\pi}\left[\sqrt[3]{4}\,r_1 + i\left[\frac{v}{w_1}h(w_1) - h(v)\right]\right]$$

Ara be, admetem que la curva es algèbrica y que $v = \frac{2n}{m}w_2$, tindrem

$$i\frac{n'}{m'} = \frac{w_1}{\pi}\left[i\left[\sqrt[3]{4}\,r_1 - i\zeta(v)\right] - \frac{2n}{m}\frac{w_2}{w_1}\zeta(w_1)\right]$$

o sigui, per lo que ja s'ha dit

$$i\pi\frac{n'}{m'} = \frac{2n}{m}\left[w_1\zeta(w_2) - w_2\zeta(w_1)\right] = \frac{2n}{m}\frac{\pi i}{2}$$

o be

$$\frac{n'}{m'} = \frac{n}{m}$$

com voliam probar.

No obstant, la evident possibilitat d'esser una curva tancada ab totes ses homotètiques, en general no serà algèbrica, perque les condicions (*a*) y (*b*) han de tenir lloch per un sol valor de $\frac{h_1}{r_1}$ essent n y m sencers. Així, per exemple, considerem el cas $n=1$, $m=4$. Demostrarem com el valor de v que tanca la curva no es la meitat de w_2. En efecte, si ho fos, deurien complirse (*a*) y (*b*) que demostrarem esser incompatibles. A l'efecte, recordarem que

$$p\left(\frac{w_2}{2}\right)=e_3-\sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_1-e_3}$$

La (a) pot substituirse en el cas de curva exterior, per

$$-j=z_1-j-\sqrt{(z_a-z_1)(z_b-z_1)}$$

d'ahont

$$\frac{1}{z_1}=\frac{1}{z_a}+\frac{1}{z_b} \qquad (c)$$

Per altra banda, essent m parell e igual a 2×2, la condició (b) pot esser substituída per una altra (*). Si $m=2q$, de

$$\psi_q(v)=\frac{\sigma(qv)}{\sigma(v)^{q^2}}$$

se dedueix

$$\zeta(v)-\frac{1}{q}\zeta(qv)=-\frac{1}{q^2}\frac{\psi_q'(v)}{\psi_q(v)}$$

Mes $q\frac{w_2}{2}=w_2$ en nostre cas, y además, $\zeta(qv)=\zeta(w_2)$, per lo tant (b) se converteix en

$$i\sqrt[3]{4}\,r_1=\frac{1}{4}\frac{\psi'_2\left(\frac{w_2}{2}\right)}{\psi_2\left(\frac{w_2}{2}\right)}$$

Y, com que

$$\psi_2(v)=-p'(v)$$

resulta

$$i\sqrt[3]{4}\,r_1=\frac{p''(v)}{p'(v)}=\frac{p'(v)+p'(2v)}{p(v)-p(2v)}=\frac{p'(v)}{p(v)-e_3}$$

$$=\frac{ir_1(h_1+z_1)}{\frac{z_1}{\sqrt[3]{4}}}$$

d'ahont

$$h_1=3z_1$$

condició incompatible ab la (c).

(*) Halphen: *Fonctions elliptiques*, tomo II, p. 280.

Un anàlisis semblant demostra la impossibilitat de que sía algèbrica la curva interior per $m=4$. Per consegüent resulten així una infinitat de curves *trascendents* y *tancades*.

Febrer de 1912

E. TERRADAS

Institut, Barcelona