Sobre l'electròmetre de quadrants

Havent observat que als meus alumnes els era dificultosa la deducció de la fórmula del electròmetre en el text (1) que donem enguany a la càtedra d'Electricitat d'aquesta Universitat, vaig proposarme trobar la fórmula més senzillament. El mètode se redueix a establir a priori, com a comprobades per l'experimentació tres simetríes, de les quals, dugues son molt racionalment aplicables, encara que hi hagin potencials de contacte que tenir en compte, previ un reglatge de la posició de l'agulla. He cregut que potser fora útil publicarho, y això es lo que segueix, acabant ab una crítica del mètode de mesura que se seguia fins ara al Laboratori y que es el que porta Damien en el seu llibre de pràctiques de Física.

1. Siguin A y B els potencials dels quadrants, C el de l'agulla. La desviació, a partir de la posició corresponent a A=B=C=0 sigui θ.

Les masses elèctriques funcions lineals dels potencials seràn:

$$M_a = aA + \gamma B + \beta C$$
$$M_b = \gamma A + bB + \alpha C$$
$$M_c = \beta A + \alpha B + cC$$

Els coeficients a, b, c, α, β, γ son funcions de θ que suposarem desenrotllats segons les potencies de θ, (Gouy):

$$a = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1\theta + \gamma_2\theta^2$$

A les derivades de $a \ldots \gamma$ respecte de θ les representarem per $a' \ldots \gamma'$:

$$a' = a_1 + 2a_2\theta$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma' = \gamma_1 + 2\gamma_2\theta$$

(1) Bouasse. *Traité de Physique*, tomo III.

L'energía del sistema dels tres conductors en presencia: A, B, C es W, essent:

$$2W = M_a A + M_b B + M_c C$$

El parell de forces a que està sotmesa l'agulla, es, *tractantse de potencials constants*

$$F = + \frac{dW}{d\theta}$$

de manera que

$$2F = a'A^2 + b'B^2 + c'C^2 + 2\alpha' BC + 2\beta' AC + 2\gamma' AB \qquad (1)$$

Fem ara les tres hipòtesis següents sobre l'electròmetre.

Primera. Si els quadrants estàn al mateix potencial, l'agulla no's mou. Es a dir:

Si $\qquad A = B \ , \ \text{té } F = 0$

qualsevulga que sían A, C y θ.

Segona. Si un quadrant A y l'agulla C estàn al mateix potencial, essent el de l'altre B=D, y l'agulla està desviada θ, el parell que obra sobre d'ella es igual y contrari al parell que obra sobre l'agulla quan el quadrant B y l'agulla C estàn al mateix potencial C, estant l'altre quadrant A al potencial D y l'agulla desviada de $-\theta$ respecte de la posició d'equilibri A=B=C=0. Es a dir, que té lloch lo següent:

Si $\qquad B=C \ , \ A=D \ , \ \theta=\theta, \quad$ el parell es $\quad F$
Si $\qquad A=C \ , \ B=D \ , \ \theta=-\theta \quad$ » » » $\quad -F$

qualsevulga que sigan C, D y θ.

Tercera. En la posició inicial $\theta=0$, si el potencial de l'agulla es la mitja dels potencials dels quadrants, la desviació es nula. Es a dir,

per $\qquad \theta=0, \text{ si } C = \dfrac{A+B}{2} \ , \ \text{se té } F=0$

D'aquestes hipòtesis, la primera suposa un reglatge de l'agulla, depenent de ses distancies als quadrants y de la simetría dels quadrants, que pot arreglarse movent el quadrant mòvil d'una o altra manera. La segona es un reglatge de lo que s'ha de pendre per posició inicial. Ja veurem com es possible, experimentalment, fer que un electròmetre determinat les compleixi. De moment, anem a deduir, ab aquestes tres hipòtesis, la fórmula corrent.

Si en la fórmula (1) s'hi fa $B=A$, resulta

$$A^2(a'+2\gamma'+b')+2AC(\alpha'+\beta')+C^2c'=0$$

Havent d'esser nula, qualsevulga que siguin els valors de A y C, no hi ha més remey que posar

$$\left.\begin{aligned} a'+2\gamma'+b'&=0\\ \alpha'+\beta'&=0\\ c'&=0 \end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Havent de complirse aquestes condicions per tot valor de θ, s'en dedueix:

$$\left.\begin{aligned} a_1+2\gamma_1+b_1&=0\\ \beta_1+\alpha_1&=0\\ c_1&=0 \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned} a_2+2\gamma_2+b_2&=0\\ \beta_2+\alpha_2&=0\\ c_2&=0 \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Pera aplicar la segona hipòtesis a l'equació (1), farem abans la convenció de que $\underline{a}'=a_1-2\,a_2\theta$, ... $\underline{\gamma}'=\gamma_1-2\gamma_2\theta$, ab lo que, se tindrà:

$$C^2(a'+2\beta')+2CD(\gamma'+\alpha')+D^2b'=-\left[C^2(\underline{b}'+2\underline{\alpha}')+2CD(\underline{\gamma}'+\underline{\beta}')+D^2\underline{a}'\right]$$

Y, devent complirse aquesta igualtat per tot valor de C, D y θ, se necessita que

$$\left.\begin{aligned} a_1+b_1+2(\beta_1+\alpha_1)&=0\\ \alpha_1+\beta_1+2\gamma_1&=0\\ a_1+b_1&=0 \end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned} a_2-b_2+2(\beta_2-\alpha_2)&=0\\ \alpha_2-\beta_2&=0\\ a_2-b_2&=0 \end{aligned}\right\}\quad(6)$$

De (3) y (5), desseguida, en surt

$$\left.\begin{aligned} c_1=\gamma_1&=0\\ \alpha_1+\beta_1&=0\\ a_1+b_1&=0 \end{aligned}\right\}\quad(a)$$

De (4) y (6), igualment,

$$\left.\begin{aligned} a_2 = b_2 = -\gamma_2 \\ \alpha_2 = \beta_2 = c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Dels 18 coeficients $a_1 \ldots\ldots \gamma_1$, $a_2 \ldots\ldots \gamma_2$ sols ne queden tres: a_1, α_1 y a_2. El valor de 2F, ab totes aquestes simplificacions, es

$$2F = (A-B)\left[a_1(A+B) - 2\alpha_1 C\right] + 2a_2(A-B)^2\theta \qquad (7)$$

Finalment, introduint la tercera hipòtesis, $a_1 = \alpha_1$, y tenim la fórmula corrent

$$2F = (A-B)\left[A+B-2C\right] + 2a_2(A-B)^2\theta \qquad (8)$$

Es de veure que'l procediment seguit permet d'arribar a una fórmula més general. Suposem, en efecte, vàlides les hipòtesis fetes, mes no aturem el desenrotllo de $a \ldots\ldots \gamma$ segons les potencies de θ. Complintse les dugues primeres hipòtesis per tot valor de θ, fórmules per l'istil de les (3) y (4) hi haurà entre'ls coeficients de tota potencia impar del desenrotllo anterior, de manera que's pot posar, designant els subíndices l'ordre del terme,

$$\begin{aligned} c_{2n-1} = \gamma_{2n-1} = 0 \\ \alpha_{2n-1} + \beta_{2n-1} = 0 \\ a_{2n-1} + b_{2n-1} = 0 \end{aligned}$$

Y, de la mateixa manera, pera tota potencia parella

$$\begin{aligned} a_{2n} = b_{2n} = -\gamma_{2n} \\ \alpha_{2n} = \beta_{2n} = c_{2n} = 0 \end{aligned}$$

Així es que la potencia par $2n-2$ del desenrotllo de 2F segons les potencies de θ es:

$$(2n-1)(A-B)\left[a_{2n-1}(A+B) - 2\alpha_{2n-1}C\right]\theta^{2n-2}$$

y la senàs següent, es $\qquad 2n'\alpha_{2n}(A-B)^2\theta^{2n-1}$

Per consegüent, d'una manera general, se pot escriure

$$2F = (A-B)\left[(A+B)\theta_0 - 2C\theta_2\right] + (A-B)^2\theta_1$$

essent θ_0 y θ_2 funcions parelles de θ ab terme independent no igual a cero, y θ_1 una funció senàs. Aquestos resultats son independents de la tercera hipòtesis que sols introdueix la igualtat dels termes independents en les funcions θ_0 y θ_2.

Hem deduit la fórmula (8) fent tres hipòtesis. Recíprocament, perque la fórmula (8) sigui aplicable, es precís que l'aparell compleixi lo que diuhen aquelles. Si no ho fa, l'us de la fórmula (8) es erròni. Si, en especial, deixa de complirse la tercera, s'ha d'emplear la (7). Més endevant, direm com se pot fer pera que l'electròmetre compleixi les hipòtesis (1) y (2).

2. Si's vol tenir en compte els potencials de contacte en les unions de les piles de carga, patrons, etc., ab l'agulla y'ls quadrants, la fórmula del electròmetre se complica una mica. Mes les dugues primeres hipòtesis, admetent la simetría perfecta de l'aparell, es a dir, igualtat de distancia vertical entre l'agulla y'ls quadrants, igualtat d'aqueixos y posició inicial convenient de l'agulla, semblen igualment racionals. No així la tercera, que no's veu medi de ferla complir. Per aquets motius sembla interessant examinar quina fórmula resulta d'aplicar les dugues primeres hipòtesis en el cas d'existir un potencial de contacte p per l'agulla y p_1 pels quadrants, de manera que el veritable potencial de l'agulla sigui $p+C$ y'ls dels quadrants, $A+p_1$ y $B+p_1$ respectivament.

El parell, en aquest cas, vindrà donat per

$$2F=a'(A+p_1)^2+b'(B+p_1)^2+c'(C+p)^2+2\alpha'(B+p_1)(C+p)+2\beta'(A+p_1)(C+p)+2\gamma'(A+p_1)(B+p_1) \quad (9)$$

La primera condició porta a les mateixes igualtats d'abans (3) y (4). La segona hipòtesis es una identitat de segon grau en C y D. L'igualació a zero dels coeficients dels termes en C^2, D^2 y CD porta a les fórmules 5 y 6 si ha de valer per qualsevol valor de θ. Els termes lineals en C y D y'l terme lliure s'anulan en virtut de les conseqüencies de 3, 4, 5 y 6, que estàn deduides a (*a*) y (*b*). Per consegüent, (*a*) y (*b*) son encara simplificacions acceptables, que, portades a la fórmula (9) la deixen com s'exposa a seguit.

$$2F=(A-B)\left[a_1(A+B)+m-2\alpha_1 C\right]+2a_2(A-B)^2\theta \quad (10)$$

essent

$$m=2p_1-2\alpha_1 p.$$

La fórmula 10 té quatre constants, de les quals una depèn dels potencials de contacte. Apliquem la fórmula 10 als casos més corrents a la pràctica, el procediment anomenat quadrantal y l'idiostàtich. En el primer, se posa l'agulla al potencial C, un dels quadrants al potencial A y l'altre a terra: B = o. La fórmula 20 es:

$$2F = A(a_1 A + m - 2\alpha_1 C) + 2a_2 A^2 \theta \qquad (11)$$

El par F vé equilibrat per la torsió del fil d'aguant. Si el par de torsió es

$$\frac{K}{2}\theta\,,$$

dividint per K el dos membres de (11), després d'haver substituit F per $\frac{K}{2}\theta$, y posant, pera abreviar

$$\frac{a_1}{K} = f\,, \quad \frac{m}{K} = h\,, \quad \frac{\alpha_1}{K} = g\,, \quad \frac{a_2}{K} = l\,,$$

la fórmula següent:

$$\theta_1(1 - 2lA^2) = A(fA + h - 2gC) \qquad (12)$$

En aquesta fórmula θ_1 representa l'angle girat a partir de la posició d'equilibri A = B = C = o.

Si l'agulla se posa en contacte ab el cos a potencial —C, y θ_2 es el nou angle de desvío a partir de la posició A = B = C = o

$$\theta_2(1 - 2lA^2) = A(fA + h + 2gC) \qquad (13)$$

Si el quadrant que comunica ab el cos a potencial A, se'l fa comunicar ara ab el potencial —A,

$$\theta_3(1 - 2lA^2) = -A(-fA + h + 2gC) \qquad (14)$$

De (12), (13) y (14) en surt la següent fórmula:

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2 + \theta_3} = \frac{2g}{f}\frac{C}{A}$$

o siga, si $\frac{2g}{f} = e$, essent e constant instrumental *independent de tot potencial així de càrrega com de contacte,*

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2 + \theta_3} = e\frac{C}{A} \qquad (15)$$

La constant e té un valor bastant proper a 2.

Aquesta fórmula (15) es lo que permet mesurar el quocient $\frac{C}{A}$. Si C y A fossin suficients y l'eletròmetre prou sensible, bastaríen quatre mesures (una pel zero) per tenir $\frac{C}{A}$, si la constant instrumental fos coneguda. Pera determinarla, si no's tenen dos patrons de forsa electromotiu iguals, se pot fer la següent combinació, ideada pel meu amich D. R. Jardí. En una primera serie de quatre mesures,

$$C=D$$
$$A=G$$

En una segona serie

$$C=G$$
$$A=D$$

Multiplicant les fórmules (15) corresponents, el quadrat, el primer membre es el quadrat de e. Experimentalment, la mesura's fa fàcilment prenent per D y G els potencials dels polos extrems d'una pila de càrrega quin mitg estigui a terra.

D'un modo general, pera fer mesures relatives, no cal coneixer la constant e, mes allavores se necessiten dugues series de quatre mesures, en les que A, per exemple, pot esser el mateix, y C y C' els potencials de l'agulla que's comparen.

Com a comprobació de les tres llegides θ_1, θ_2, θ_3, si en una quarta mesura l'agulla's torna al potencial $+C$ y es θ_4 la desviació a partir del zero, s'ha de tenir

$$\theta_1+\theta_4=\theta_2+\theta_3$$

En la conexió dita idiostàtica, se posa l'agulla y un dels quadrants ab contacte ab un cert potencial C, l'altre quadrant a terra. La fórmula (12) serà, donchs

$$\theta_1(1-2lC^2)=hC+(f-2g)C^2$$

Invertint C,

$$\theta_2(1-2lC^2)=-hC+(f-2g)C^2$$

d'ahont

$$\theta_1+\theta_2=\frac{qC^2}{1-2lC^2} \qquad (16)$$

essent $q=f-2g$. Aproximadament, $\theta_1+\theta_2=qC^2$.

Els dos valors de θ_1 y θ_2 se diferencien sols en el terme en hC. Si no hi haguessin potencials de contacte, θ_1 y θ_2 foren iguals. Recíprocament, l'existencia de dits potencials pot collegirse de la diferencia que's trobi entre θ_1 y θ_2.

3. Hem deduit la fórmula general (10) y les especials (15) y (16) de les condicions de simetría formulades en les hipòtesis primera y segona. Ara bé, tot electròmetre de quadrants compleix aquestas condicions? Es fàcil comprobar en un electròmetre qualsevulga, que si l'agulla està mal arreglada y els quadrants de qualsevol manera no's compleix ni l'una ni l'altre. Se necessita un reglatge previ que's fa ab molta facilitat. Se comensa per pujar o baixar l'agulla fins que, posant els quadrants en comunicació entre sí y donantloshi varis potencials A, o,—A, y altres potencials a l'agulla C, o,—C, per los que, se troba la posició en que no hi ha desvíu.

Fet això, se cambia l'orientació de l'agulla o azimut del mirall per A=B=C=o, portant l'imatge mòvil en l'escala a un'altra banda, y's recomensa el tanteig. Si hi ha que tocar altra vegada l'agulla, se retoca simultàniament el quadrant, y així se continúa retocant l'altura de l'agulla y la posició del quadrant mòvil, fins que per tres o quatre diferents azimuts del mirall no hi hagi desviació al fer igual a A,—A, o, el potencial comú als quadrants; C,—C, o indistintament, els de l'agulla. Lograt això, s'ha lograt cumplir la primera condició de simetría.

Pera fer que's compleixi la segona, no hi ha més que variar l'azimut del mirall fins a tant que la desviació a dreta sigui igual a la desviació a esquerra, fent una vegada A=C, B=D y l'altre A=D, B=C. Ni l'un ni l'altre reglatge són llargs; en cambi són tots dos bastant precisos. Fets una vegada, fets per sempre, si l'electròmetre no s'ha de tocar del lloch en que estigui. Igualment, pot determinarse una sola vegada pera sempre la constant *e*.

Tots aquets reglatges y mesures els he fet ab un electròmetre Mascart, ajudat per el meu amic Jardí, a qui agraheixo d'aquí estant el seu preciós concurs. Espero, de totes maneres, que podrem ferlos ab més precisió en l'electròmetre Dolezalek, que ja havem encarregat.

4. Pera terminar, vaig a fer la crítica del mètode de mesura que s'usava al Laboratori de l'Universitat fins ara, y que es el descrit per Damien. Se fa un reglatge preliminar per lograr que per $\theta=0$, $C=0$, $A=-B$ no hi hagi desviació. Aquest reglatge es sols variació d'azimut del mirall; l'agulla y'ls quadrants se regulen a ull. Essent un reglatge per $\theta=0$, se comprèn que res te que veure la simetría introduida ab els termes en θ. Ja no'n faré cas desd'ara, y buscaré directament el par elèctrich independent de θ. La fórmula 9, introduinthi la simetría anterior, imposa solament la condició

$$a_1 + b_1 - 2\gamma_1 = 0$$

Per consegüent:

$$2F = (A+p_1)^2 a_1 + (B+p_1)^2 b_1 + (C+p)^2 c_1 + (a_1+b_1)(A+p_1)(B+p_1) + 2\beta_1(A+p_1)(C+p) + 2\alpha_1(B+p_1)(C+p)$$

El mètode de mesura respòn a les quatre mesures del següent esquema:

Quadrant	A	$-A$
Quadrant	$-A$	$+A$
Agulla	$\overbrace{+C,\,-C}$	$\overbrace{+C,\,-C}$
Desviacions	$\theta_1,\ \theta_2$	$\theta_3,\ \theta_4$

Substituint valors en la fórmula anterior, y sent K la constant de torsió, resulta

$$\theta_1 + \theta_4 - (\theta_2 + \theta_3) = \frac{8C}{K}\left[p_1\beta_1 - \alpha_1 A\right]$$

prescindint de p_1, la mitja anterior queda proporcional a C A. Per consegüent, la manera de procedir es sols vàlida si's despreciа'l potencial de contacte dels quadrants y'l parell elèctric proporcional a θ.

E. Terradas

Institut, Barcelona.