Del moviment pertorbat d'una corda

1. Me proposo en aquest treball cercar una forma general pera les equacions dels petits moviments d'una corda que's mou, forma que comprengui com a casos particulars les equacions donades per Routh (1) pera certs casos de les oscilacions d'un fil plà en equilibri, y les de Léauté (2) pera les oscilacions d'un cable teledinàmich.

Comensaré per dir que es lo que entench per petits moviments d'un fil ó corda que's mou. Suposo un fil en moviment perfectament conegut y definit. A un moment, de sobte, intervé qualque perturbació. Y el fil continua moventse ab moviment pertorbat. Diré que es oscilatori o que fa petits moviments, quan els valors dels elements determinants de la forma y estat dinàmich del fil en el moviment pertorbat son poch diferents dels elements determinants de la forma y estat dinàmich en el moviment conegut. Y de tal grau sigui la diferencia que puguin despreciarse, per sa petitesa, els quadrats y productes de les perturbacions.

Arrancaré de les equacions establertes per en Flocquet (3) pera'l moviment d'un fil. Faré us de les següents notacions :

$\mathbf{T}$ component de la forsa exterior per unitat de masa sobre la tangent a la curva en el punt corresponent.

N component de la forsa exterior per unitat de masa sobre la normal principal interna.

B id. id. sobre la binormal.

T tensió.

$\mathfrak{d}$ densitat.

s arch comtat sobre la curva a partir d'un punt de la meteixa. Al passar d'un punt a un altre punt de la curva en un instant determinat, solsament varía s.

ξ, η, ζ, components sobre la tangent, normal y binormal a la curva, en cada punt, de la velocitat absoluta d'aquest punt.

(1) *Dynamik der Systeme Starrer Körper, Höhere Dynamik.* Leipzig 1898.

(2) *Theorie generale des transmissions par câbles metalliques.* Paris 1882.

(3) Flocquet. *Comptes Rendus* 1892.

Vid. també E. Terradas *«Estudios sobre los hilos». Memoria premiada per la R. A. de Ciencies de Barcelona.*

pdt, qdt, rdt, components de la rotació que faría coincidir els axis anteriors per lo punt P y temps t ab els axis per lo punt P y tempts $t + dt$..

ρ radi de primera curvatura.

r_1 la inversa del anterior o sigui la curvatura primera.

p_1 la curvatura segona.

Aquestes cantitats estan lligades entre sí per les equacions d'en Flocquet que ara vaig a escriure,sis cinemàtiques y tres dinàmiques :

$$\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial p_1}{\partial t} = q r_1$$

$$\frac{\partial q}{\partial s} = r p_1 - p r_1$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} - \frac{\partial r_1}{\partial t} = - q p_1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \eta r_1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial s} = r - r_1 + \zeta p_1$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} = - \eta p_1 - q$$

$$\delta \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q\zeta - r\eta \right] = \frac{\partial T}{\partial s} + \delta \mathbf{T}$$

$$\delta \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + r\xi - p\zeta \right] = T r_1 + \delta N$$

$$\delta \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + p\eta - q\xi \right] = \delta B$$

Aquestes equacions son pel moviment no pertorbat. Pero es evident que unes equacions de igual mena poden aplicarse al moviment pertorbat, referint els elements als axis del moviment pertorbat. Podrem suposar, per exemple, que els nous elements van ab una ratlleta a sobre com indicant que's tracta d'elements de la perturbació. Ara bé, el moviment no pertorbat es conegut. El problema consisteix donchs en treure profit d'això pera resoldre les equacions del moviment pertorbat, sempre en el supòsit de que les pertorbacions son petites.

Si $\overline{T}$ es la tensió en el moviment pertorbat, posem

$$\overline{T} = T + T'$$

essent T' petit. Y de la meteixa manera

$$\overline{p}_1 = p_1 + p_1'$$

$$\overline{r}_1 = r_1 + r_1'$$

essent p_1' y r_1' petites.

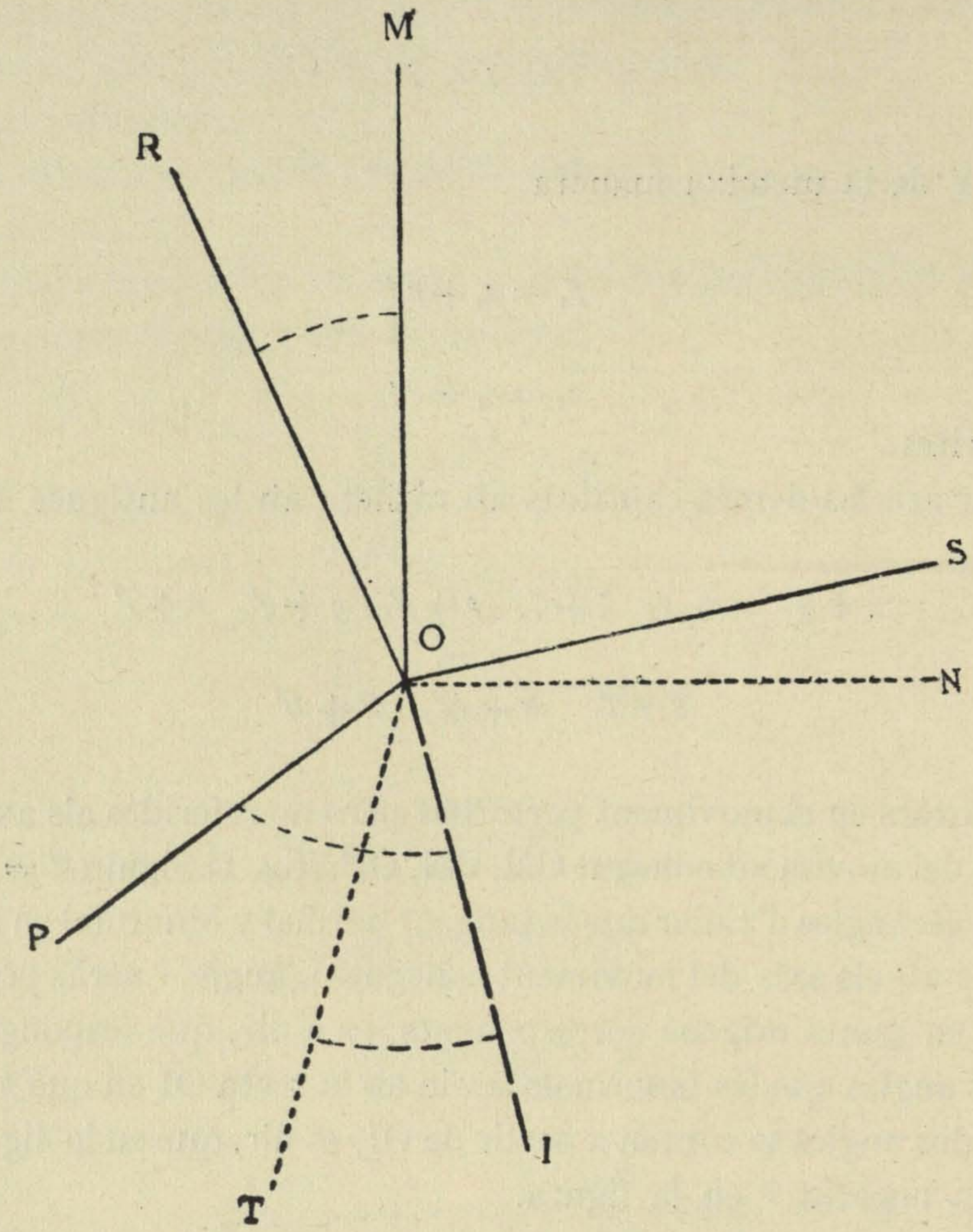
Per relacionar ara les demés cantitats ab ratlleta ab les antigues, soposarem que

$$\xi + \xi', \quad \eta + \eta', \quad \zeta + \zeta', \quad p + p', \quad q + q', \quad r + r'$$

$$\mathrm{T} + \mathrm{T}', \quad N + N', \quad B + B'$$

son les noves cantitats en el moviment pertorbat pero no referides als axis del moviment pertorbat sino als del moviment conegut OM, ON, OP. (fig. 1) Siguin $\theta' = -$ MOR, $\varphi' = -$ TOI, $\psi' = -$ POI els angles d'Euler que la tangent normal y binormal en el moviment pertorbat venen a fer ab els axis del moviment conegut. L'angle θ' serà, per exemple, el de las dos tangents en punts origens corresponents, es a dir, que responguin a la meteixa s ; φ' y ψ' seran els angles que les binormals fassin ab la recta OI en que's tallen els planos normals. Aquets dos angles se conten a partir de OI, es dir, que en la figura son negatius. També hi prenem negatiu θ' en la figura.

Se tracta, en primer lloch, de trovar els valors de $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ etc. en funció dels de $\xi, \xi', \eta, \eta', \zeta, \zeta'$ etc. Com que per tots hi ha transformacions per l'estil, direm $\overline{\mathrm{A}}$ $\overline{\mathrm{B}}$ $\overline{\mathrm{C}}$ a les projeccions de qualsevol vector sobre els axis OR, OS, y OT del moviment pertorbat, y A, B, C a les projeccions sobre els axes de OM, ON, OP del moviment conegut. El problema es el d'un senzill cambi de coordenades. Pera resoldrel comodament y depressa, farem lo següent: El valor d'una component, com $\overline{\mathrm{A}}$ per exemple, se tindrà projectant sobre *O. R* els valors *A*, *B* y *C* presos sobre OM, ON y OP y sumant després les projeccions Pera calcular les projeccions haurem de calcular cada cop els cosinus dels angles que ab OR fassin les rectes OM, ON, OP. D'una mena general, sempre que tinguem que calcular un cosinu, ens fixarem en el triedu determinat per les dugues rectes que fan l'angle y



OI com a tercera aresta, y ens servirem de la fòrmula fundamental de la Trigonometria esfèrica. Axís tením

$$\bar{A} = A \cos\theta' + B \cos\psi' \sin\theta' + C \sin\psi' \sin\theta'$$

$$\bar{B} = -A \cos\varphi' \sin\theta' + B [\sin\varphi' \sin\psi' + \cos\theta']$$

$$\bar{C} = -A \sin\varphi' \sin\theta' - B [\sin\psi' \cos\varphi' + \sin\varphi' \cos\psi' \cos\theta'] + C [\cos\varphi' \cos\psi' - \sin\varphi' \sin\psi' \cos\theta']$$

o bé, dintre de l'aproximació en que portarem tots els càlculs, en que s'deixaran tots els quadrats o productes d'elements pertorbats,

$$\bar{\mathbf{A}} = A + B\,\theta'$$

$$\bar{\mathbf{B}} = -A\,\theta' + B + C(\varphi' + \psi')$$

$$\bar{\mathbf{C}} = -B(\varphi' + \psi') + C$$

Si en totes aquestes fòrmules posem en lloch de A, B y C, $\xi + \xi'$, $\eta + \eta'$ y $\zeta + \zeta'$ en primer lloch, $p + p'$, $q + q'$, $r + r'$ després y $\mathbf{T} + \mathbf{T}'$, $N + N'$ y $B + B'$ finalment, tindrem les següents fòrmules que'ns donen les relacions que volíem

$$\bar{\xi} = \xi + \xi' + \eta\,\theta'$$

$$\bar{\eta} = -\xi\,\theta' + \eta + \eta' + s(\varphi' + \psi')$$

$$\bar{s} = -\eta(\varphi' + \psi') + \zeta + \zeta'$$

$$\bar{p} = p + p' + q\,\theta'$$

$$\bar{q} = -p\,\theta' + q + q' + r(\varphi' + \psi')$$

$$\bar{r} = -q(\varphi' + \psi') + r + r'$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + \mathbf{T}' + M\,\theta'$$

$$\bar{N} = -\mathbf{T}\,\theta' + N + N' + B(\varphi' + \psi')$$

$$\bar{B} = -N(\varphi' + \psi') + B + B'$$

Les rotacions p', q', r' venen donades en funció dels angles θ', φ', ψ' per fòrmules que's troben en molts tractats de Mecànica, y que poden deduirse fàcilment projectant a sobre de quiscun dels axis del moviment primitiu o conegut, les tres rotacions propies dels angles d'Euler, que son la

$$\frac{\partial\,\theta'}{\partial\,t}$$

que té l'axi en la línia de tall dels plans normals y les rotacions

$$\frac{\partial\,\varphi'}{\partial\,t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\,\psi'}{\partial\,t}$$

a sobre les tangents. Donchs :

$$p' = \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \cos \theta'$$

$$q' = - \frac{\partial \theta'}{\partial t} \operatorname{sen} \varphi' + \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \cos \varphi' \operatorname{sen} \theta'$$

$$r' = \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \operatorname{sen} \psi' \operatorname{sen} \theta' + \frac{\partial \theta'}{\partial t} \cos \psi'$$

o sia

$$\left.\begin{aligned} p' &= \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \\ q' &= - \frac{\partial \theta'}{\partial t} \varphi' + \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \theta' \\ r' &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Si are duem els valors de $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\bar{\mathbf{T}}$, $\bar{N}$, y $\bar{B}$ a les equacions de Flocquet per lo moviment pertorbat, tením lo que segueix

$$\frac{\partial p'}{\partial s} + \frac{\partial (q \theta')}{\partial s} - \frac{\partial p'_1}{\partial t} = - p r_1 \theta' + r_1 q' + q r'_1$$

$$\frac{\partial q'}{\partial s} - \frac{\partial (p \theta')}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} r (\varphi' + \psi') = p_1 r' - p_1 q (\varphi' + \psi') + r p'_1 - p' r_1 - q r_1 \theta' - p r'_1$$

$$\frac{\partial r'}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} q (\varphi' + \psi') - \frac{\partial r'_1}{\partial t} = p p_1 \theta' - p_1 q' - p_1 r (\varphi' + \psi') - q p'_1$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial s} + \frac{\partial (\eta \theta')}{\partial s} = \eta' r_1 + \zeta r_1 (\varphi' + \psi') - \xi r_1 \theta' + \eta r_1'$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial s} - \frac{\partial (\xi \theta')}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \zeta (\psi' + \psi') = r' - q (\varphi' + \psi') - \xi r'_1 - r_1 \xi' - r_1 \eta \theta' + \zeta p'_1 - p_1 \zeta' - p_1 \eta (\varphi' + \psi')$$

$$\frac{\partial z'}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \eta (\varphi' + \psi') = - p_1 \xi \theta' - p_1 \eta' - p_1 \zeta (\varphi' + \psi') - \eta p_1' + p \theta' - q' - r (\varphi' + \psi')$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \frac{\partial (\eta \theta')}{\partial t} - - p \theta' \zeta + \zeta q' + r \zeta (\varphi' + \psi') + q \zeta' - q \eta (\varphi' + \psi') + \xi r \theta' - r \eta' - r (\varphi' + \psi') - \eta r'$$

$$+ \eta q (\varphi' + \psi') = \frac{1}{\delta} \frac{\partial T'}{\partial s} + \mathbf{T}' + N \theta'$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \zeta (\varphi' + \psi') - \frac{\partial (\zeta \theta')}{\partial t} + r \xi' + r \eta \theta' + \xi r' - \xi q (\varphi' + \psi') - p \zeta' + p \eta (\varphi' + \psi') - \zeta p' - \zeta p \theta'$$

$$= \frac{1}{\delta} \frac{T r'_1 + T' r_1}{\rho} + N' - \mathbf{T} \theta' + B(\varphi' + \psi')$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \eta (\varphi' + \psi') + p \eta' + p \zeta (\varphi' + \psi') + \eta p' + \eta q \theta' - q \xi' - q \eta \theta' - \xi q' - \xi r (\varphi' + \psi')$$

$$= B' - N (\varphi' + \psi')$$

Ab aquestes nou equacions, afeginthi les (1) podrem fer sortir els valors de ξ', η', ζ', p', q', r', p'_1 r'_1, T', θ', φ' y ψ' en funció de s y t. Y axís quedarà el problema resolt.

2. Vejam are les aplicacions de les fòrmules trobades a cassos particulars. Sia, primer, el cas en que el moviment conegut es pla. Aleshores $B = 0$, $\zeta = p = q = p_1 = 0$. Y tenim per resoldre el moviment pertorbat el següent sistema. En primer lloch

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p'}{\partial s} - \frac{\partial p'_1}{\partial t} = r_1 q' \\ &\frac{\partial q'}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} r (\varphi' + \psi') = r p'_1 - p' r_1 \\ &\frac{\partial r'}{\partial s} - \frac{\partial r'_1}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \quad 2$$

Mes la darrera de les (1) ens dona

$$r' = \frac{\partial \theta'}{\partial t}$$

aleshores la darrera de les (2) fa :

$$r'_1 = \frac{\partial \theta'}{\partial s}$$

Les altres, en segon lloch, son

$$\frac{\partial \xi'}{\partial s} + \theta' \frac{\partial \eta}{\partial s} = \eta' r_1 - \xi r_1 \theta'$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial s} - \theta' \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\partial \theta'}{\partial t} - r_1 \xi' - r_1 \eta \theta'$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \eta (\varphi' + \psi') = - q' - r (\varphi' + \psi') - \eta p'_1$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \theta' \frac{\partial \eta}{\partial t} + \xi r \theta' - r \eta' - r(\varphi' + \psi') = \frac{1}{\delta} \frac{\partial T'}{\partial s} + \mathbf{T}' + N\theta'$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \theta' \frac{\partial \xi}{\partial t} + r(\xi' + \eta \theta') = \frac{1}{\delta} \left(T \frac{\partial \theta'}{\partial s} + T' r_1 \right) + N' - \mathbf{T} \theta'$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \eta (\varphi' + \psi') + \eta p' - \zeta q' - \xi (\varphi' + \psi') = B' - N(\varphi' + \psi')$$

Si'l moviment pertorbat fos al ensemps plà, les equacions aquestes se simplifiquen forsa perquè, aleshores,

$$p' = q' = \zeta' = \varphi' = \psi' = p'_1 = o$$

y's fan

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi'}{\partial s} + \theta' \frac{\partial \eta}{\partial s} = \eta' \frac{\partial \theta}{\partial s} - \xi \theta' \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ &\frac{\partial \eta'}{\partial s} - \theta' \frac{\partial \gamma}{\partial s} = \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \frac{\partial \theta'}{\partial s} \xi' - \eta \theta' \frac{\partial \theta}{\partial s} \end{aligned}\right\} 3$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \theta' \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \theta' \xi \frac{\partial \theta}{\partial t} - \eta' \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial T'}{\partial s} + \mathbf{T}' + N\theta' \\ &\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \theta' \frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi' \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta' \eta \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \left(T \frac{\partial \theta'}{\partial s} + T' \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) + N' - \mathbf{T} \theta' \end{aligned}\right\} 4$$

Aquest sistema de quatre equacions ens deixaría trobar θ', ξ', η' y T' en funció de s y t, tenint naturalment en compte les condicions determinatrius inicials y límits.

Un altre cas es el moviment que'n diem estacionari (1). Es aquest pera nosaltres ab tota generalitat, el moviment relatiu per axis qualsevulgues d'un fil que's mou segons la curva geomètrica que fa, en que la velocitat de tots els punts sobre ser la meteixa, té sempre la direcció de la tangent al fil en el punt que's pensi. Aquest moviment estacionari relatiu tan general se refereix a un moviment estacionari respecte a axis fixes (els del moviment relatiu) ajuntant a les forses exteriors les que en el moviment relatiu naixen per efecte de la composició d'acceleracions. Si soposem, donchs, que les forses aparents ja van dintre de les $\mathbf{T}$, N y B, fixantnos en que, en el moviment estacionari de que parlem,

$$\xi = v$$

$$\eta = \zeta = B = q = o,$$

(1) E. Terradas. *Revista de la Sociedad matemática española.* 1911.

las equacions del moviment pertorbat seran les (1) més les nou següents

$$\frac{\partial p'}{\partial s} - \frac{\partial p'_1}{\partial t} = -p\,r_1\,\theta' + r_1\,q'$$

$$\frac{\partial q'}{\partial s} - \frac{\partial (p\,\theta')}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\,r\,(\varphi' + \psi') = p_1\,r' + r\,p'_1 - r_1\,p' - p\,r'_1$$

$$\frac{\partial r'}{\partial s} - \frac{\partial r'_1}{\partial t} = p\,p_1\,\theta' - p_1\,q' - p_1\,r\,(\varphi' + \psi')$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial s} = r_1\,\eta' - v\,r_1\,\theta'$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial s} - \frac{\partial (v\,\theta')}{\partial s} = r' - v\,r_1' - r_1\,\xi' + p_1\,\zeta'$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial s} = -p_1\,v\,\theta' - p_1\,\eta' + p\,\theta' - q' - r\,(\varphi' + \psi')$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + v\,r\,\theta' - r\,\eta' + r\,(\varphi' + \psi') = \frac{1}{\delta}\,\frac{\partial T'}{\partial s} + \mathbf{T}' + N\,\theta'$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \frac{\partial (v\,\theta')}{\partial t} + r\,\xi' + \xi\,r' - p\,\zeta' = \frac{1}{\delta}\,\frac{T\,r'_1 + T'\,r_1}{\rho} + N' - \mathbf{T}\,\theta'$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - p\,\eta' - \xi\,r\,(\varphi' + \psi') = B' - N(\varphi' + \psi')$$

Si fos plà el moviment conegut, hi hauría que fer en les fòrmules aqueixes

$$p = p_1 = \eta = \zeta = 0$$

lo que les simplifica perque, com que

$$r'_1 = \frac{\partial \theta'}{\partial s}$$

tením

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p'}{\partial s} - \frac{\partial p'_1}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial s}\,q' \\ &\frac{\partial q'}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\,r\,(\varphi' + \psi') = -\frac{\partial \theta}{\partial s}\,p' \end{aligned}\right\} \quad 5$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi'}{\partial s} &= (\eta' - \theta' v)\,\frac{\partial \theta}{\partial s} \\
\frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial s}\,\xi' \\
\frac{\partial \zeta'}{\partial s} &= -q' - \frac{\partial \theta}{\partial t}\,(\varphi' + \psi)
\end{aligned}\right\}\quad 6$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t}\,(v\theta' - \eta' + \varphi' + \psi') = \frac{1}{\delta}\,\frac{\partial T'}{\partial s} + \mathbf{T}' + N\theta' \\
&\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \theta'\,\frac{\partial v}{\partial t} + \xi'\,\frac{\partial \theta'}{\partial t} = \frac{1}{\delta}\left[T\,\frac{\partial \theta'}{\partial s} + T'\,\frac{\partial \theta}{\partial s}\right] + N' - \mathbf{T}\theta' \\
&\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t}\,v\,(\varphi' + \psi') - v\,q' = B' - N(\varphi' + \psi')
\end{aligned}\right\}\quad 7$$

La darrera d'aquestes, per rahó de la darrera (6) també pot escriures

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + v\,\frac{\partial \zeta'}{\partial s} = B' - N\,(\varphi' + \psi') \qquad (8)$$

Si el moviment estacionari s'conservés plà, fora :

$$\zeta' = p' = q' = \varphi' = \psi' = 0$$

y el problema està resolt, resolvent les quatre equacions :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi'}{\partial s} &= (\eta' - v\,\theta')\,\frac{\partial \theta}{\partial s} \\
\frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \xi'\,\frac{\partial \theta}{\partial s}
\end{aligned}\right\}\quad 9$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi'}{\partial t} + (v\,\theta' - \eta')\,\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\delta}\,\frac{\partial T'}{\partial s} + \mathbf{T}' + N\theta' \\
&\frac{\partial \eta'}{\partial t} - \theta'\,\frac{\partial \theta}{\partial t} + \xi'\,\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{\delta}\left[T\,\frac{\partial \theta'}{\partial s} + T'\,\frac{\partial \theta}{\partial s}\right] + N' - \mathbf{T}\theta'
\end{aligned}\right\}\quad 10$$

que donen ξ', η', θ' y T' en funció de s y t arreglantse sempre a les condicions inicials y límits.

Altre aplicació farem encara al cas de quan el fil, cadena o cable s'està quiet en equilibri. Les oscilacions d'un fil en equilibri les trobarem fent en les del moviment estacionari

$$v = p = r = 0$$

que's tornaran

$$\frac{\partial p'}{\partial s} - \frac{\partial p_1'}{\partial t} = r_1 q'$$

$$\frac{\partial q'}{\partial s} = p_1 r' - r_1 p'$$

$$\frac{\partial r'}{\partial s} - \frac{\partial r'_1}{\partial t} = -p_1 q'$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial s} = \eta' r$$

$$\frac{\delta \eta'}{\partial s} = r' - r_1 \xi' + p_1 \zeta'$$

$$\frac{\partial z'}{\partial s} = -p_1 \eta' - q'$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial T'}{\partial s} + \mathbf{T}' + N\theta'$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} = \frac{1}{\delta} (T r'_1 + T' r_1) + N - \mathbf{T}\theta'$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = B' - N(\varphi' + \psi')$$

Y, si la catenaria fos plana,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial s} &= \eta' \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial s} \xi' \\ \frac{\partial \zeta'}{\partial s} &= -q' \end{aligned}\right\} \quad 11$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial s} - \frac{\partial p'_1}{\partial t} &= \frac{\partial \theta}{\partial s} q'_1 \\ \frac{\partial q'}{\partial s} &= -\frac{\partial \theta}{\partial s} p' \end{aligned}\right\} \quad 12$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi'}{\partial t} &= \frac{1}{\delta}\frac{\partial T'}{\partial s} + \mathrm{T}' + N\theta' \\
\frac{\partial \eta'}{\partial t} &= \frac{1}{\delta}\left[T\frac{\partial \theta'}{\partial s} + T'\frac{\partial \theta}{\partial s}\right] + N' - \mathrm{T}\theta' \\
\frac{\partial \zeta'}{\partial t} &= B' - N(\varphi' + \psi')
\end{aligned}\right\} \quad 13$$

Y, en el supost de que les oscilacions son també planes

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi'}{\partial s} &= \eta'\frac{\partial \theta}{\partial s} \\
\frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \xi'\frac{\partial \theta}{\partial s}
\end{aligned}\right\} \quad 14$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi'}{\partial t} &= \frac{1}{\delta}\frac{\partial T'}{\partial s} + \mathrm{T}' + N\theta' \\
\frac{\partial \eta'}{\partial t} &= \frac{1}{\delta}\left(T\frac{\partial \theta'}{\partial s} + T'\frac{\partial \theta}{\partial s}\right) + N' - \mathrm{T}\theta'
\end{aligned}\right\} \quad 15$$

En lo que ve, tractarem ab les fòrmules anteriors el problema dels cables teledinàmichs y les oscilacions d'una corda.

3. Veyam primer les oscilacions de les cordes que trameten treball d'una a altre politxa. Ens serviran pera resoldre el problema les fòrmules 5, 6, 7 y 8. Com que l'única forsa exterior es la gravetat, $\mathrm{T}' = B' = N' = o$ y $N = -g$, si la fletxa es prou xica.

Si de primer entuvi ens fixem en les oscilacions perpendiculars al plà del moviment ordinari, la equació (8) derivada respecte del temps, fa, en el supost $\delta = 1$,

$$\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial t^2} + v\frac{v^2 \zeta'}{\partial s \partial t} = g\frac{\partial}{\partial t}(\varphi' + \psi')$$

Mes la primera de les (1), ens permet escriure el segon membre

$$g p'$$

que es igual, per la segona de les (5), a

$$g\rho\left(\frac{\partial q'}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} r(\varphi' + \psi')\right)$$

Aquest ρ el vindrem a suposar constant, per lo que havem dit de la fletxa. Aleshores la tercera de les 6 ens diu que lo que ara acabem d'escriure, val

$$-g\rho \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial s^2}$$

Donchs, al capdevall, l'equació diferencial en ζ' serà

$$\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 \zeta'}{ds\,dt} - g\rho \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial s^2} = o$$

Si cambiem de variables, posant, per exemple

$$u = s + m\,t,\; w = s + n\,t$$

com que

$$\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial u\,\partial w} + \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial w^2}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial s\,\partial t} = m\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial u^2} + (m+n)\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial u\,\partial w} + n\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial w^2}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial t} = m^2\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial u^2} + 2\,m\,n\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial u\,\partial w} + n^2\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial w^2}$$

tindrem

$$(m^2 + v\,m - g\rho)\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial u^2} + (2\,m\,n + v\,(m+n) - 2\,g\rho)\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial u\,\partial w} + (n^2 + v\,n - \rho g)\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial w^2} = o\,.$$

Si fem que m y n siguin arrels de l'equació

$$x^2 + v\,x - g\rho = o$$

l'equació diferencial en ζ' s'haurà transformat en aqueix altre

$$\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial u\,\partial w} = o$$

quina solució es :

$$\zeta' = F_1(u) + F_2(w)$$

essent F_1 y F_2 arbitraries. Els valors de m y n son

$$\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} -\frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} + g\rho}$$

Axís es, que

$$\zeta' = F_1\left[s-\left(\frac{v}{2}-\sqrt{\frac{v^2}{4}+g\rho}\right)t\right]+F\left[s-\left(\frac{v}{2}+\sqrt{\frac{v^2}{4}+\rho g}\right)t\right]$$

Al fixar les condicions als límits desapareix l'arbitrarietat de les foncions F_1 y F_2. Axís, si en les politxes, els punts de contacte ab elles de la catenaria que fa la corda, corresponents a valors determinats de

$$s+v\,t=\sigma,$$

fan les oscilacions transversals a la corda :

$$\zeta(\sigma_0) = \varphi_0(t)$$
$$\zeta(\sigma_l) = \varphi_l(t),$$

les funcions F_1 y F_2 han d'arreglarse a les dugues condicions que vaig a escriure :

$$F_1\left(\sigma_0-3\frac{v\,t}{2}+\sqrt{\frac{v^2}{4}+g\rho}\;t\right)+F_2\left(\sigma_0-3\frac{v\,t}{2}-\sqrt{\frac{v^2}{4}+g\rho}\;t\right)=\varphi_0(t)$$
$$F_1\left(\sigma_l-\frac{3\,v\,t}{2}+\sqrt{\frac{v^2}{4}+g\rho}\;t\right)+F_2\left(\sigma_l-\frac{3\,v\,t}{2}-\sqrt{\frac{v^2}{4}+g\rho}\;t\right)=\varphi_l(t)$$

Aquestes oscilacions son degudes a defectes de centratge.

Ara tractarem el moviment pertorbat de una corda quan se conserva plà. Aquestes pertorbacions, que son les més importants en les instalacions de cables teledinàmichs, se dehuen a la irregularitat dels travalls motor y resistent principalment.

En les equacions 9 y 10 hi suposarem també $\delta = 1$ y ademés $T' = N' = 0$ y també $N = -g$. La velocitat v es constant segons es cosa coneguda. Sentho,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{v}{\rho}$$

Y, les equacions 9 y 10 surtiran axís

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial\xi}{\partial s} &= \eta'-v\,\theta' \\ \rho\frac{\partial\eta}{\partial s} &= \rho\frac{\partial\theta}{\partial t}-\xi'\end{aligned}\right\}\quad 15$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi'}{\partial t}+(v\theta'-\eta')\frac{v}{\rho}=\frac{\partial T'}{\partial s}+\frac{v^2-T}{\rho}\theta' \\ &\frac{\partial \eta'}{\partial t}+\frac{\xi' v}{\rho}=T\frac{\partial \theta'}{\partial s}+\frac{T'}{\rho}+\frac{\partial T'}{\partial s}\theta' \end{aligned}\right\} \quad 16$$

habent posat en lloch de T el seu igual $-\dfrac{\partial T}{\partial s}$ y en lloch de N lo qu'es lo meteix $\dfrac{v^2-T}{\rho}$ segons se veu en les condicions del moviment no pertorbat.

Mes ara, si en la primera de les equacions 16 posem, en lloch de $v\theta'-\eta'$ lo que'ns diu que val la primera de les 15, y en la darrera de les 16 hi portem el valor de ξ' que'ns dona la segona de les 15, tindrem

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi'}{\partial t}-v\frac{\partial \xi'}{\partial s}=\frac{\partial T'}{\partial s}+\frac{v^2-T}{\rho}\theta' \\ &\frac{\partial \eta'}{\partial t}-v\frac{\partial \eta'}{\partial s}+v\frac{\partial \theta}{\partial t}=T\frac{\partial \theta'}{\partial s}+\frac{T'}{\rho}+\frac{\partial T}{\partial s}\theta' \end{aligned}\right\} \quad 17$$

Si cambiessim de variables, posant en lloch de les s y t les altres σ y t, en que t es lo meteix que avans, el temps, pero σ es l'arch geomètrich.

$$\sigma=s+vt$$

es evident que entre una funció f_s de les variables primeres y la meteixa funció f_σ quan hi posem σ en lloch de s, hi haurà les relacions que segueixen :

$$\frac{\partial f_s}{\partial s}=\frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial \sigma^2}$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t}=\frac{\partial f_\sigma}{\partial t}+\frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma}v$$

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial \sigma\,\partial t}+\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial \sigma^2}v^2$$

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial s\,\partial t}=\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial s\,\partial t}+\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial \sigma^2}v$$

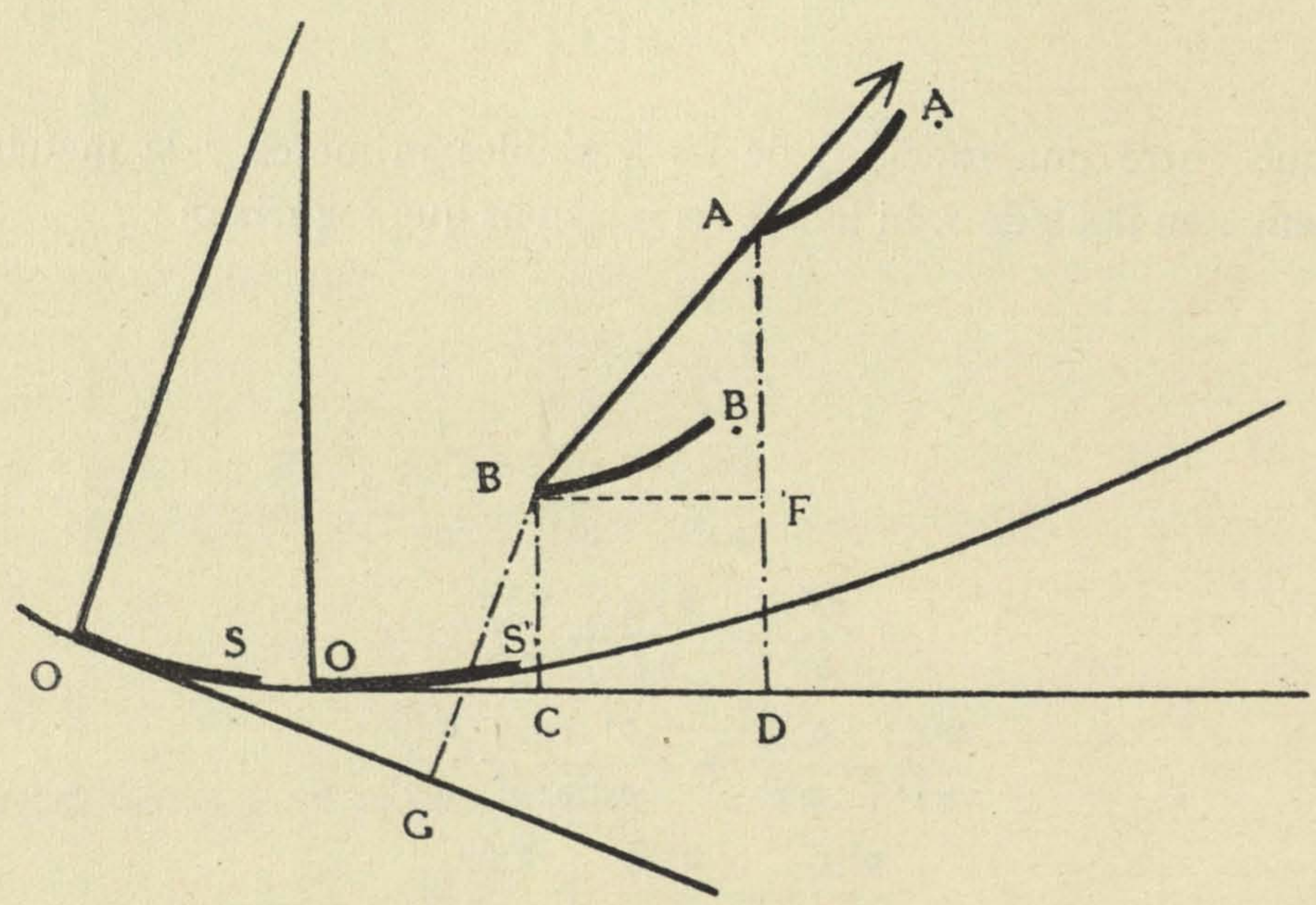
D'aquestes relacions ne farem ús aplicantles a les equacions 15 y 17 y ens resultaran les noves fòrmules següents, en que totes les cantitats se soposan en funció de σ y t.

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{\partial \xi'}{\partial \sigma} &= \eta' - v\,\theta' \\ \rho \frac{\partial \eta'}{\partial \sigma} &= \rho \left[\frac{\partial \theta'}{\partial t} + v \frac{\partial \theta'}{\partial \sigma} \right] - \xi' \end{aligned}\right\} \quad 18$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial t} &= \frac{\partial T'}{\partial \sigma} + \frac{v^2 - T}{\rho}\,\theta' \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} + v^2 \frac{\partial \theta'}{\partial \sigma} + v \frac{\partial \theta'}{\partial t} &= T \frac{\partial \theta'}{\partial \sigma} + \frac{T'}{\rho} + \frac{\partial T}{\partial \sigma}\,\theta' \end{aligned}\right\} \quad 19$$

Aquestes equacions aixís com les 15 y 17 poden transformarse posanthi les coordenades rectangulars α y β d'un punt de la corda en el moviment pertorbat referides a la tangent y normal principal en el punt corresponent del element en el moviment sapigut. Tot això ho faig per anar a deduir les equacions de Léauté y perquè's vegi com son un cas particular de les nostres.

Per trobar una relació entre α, β, ξ' y η' rahonarem de la manera següent: Sigui OS (fig. 2) l'element *ds* en el temps *t* y O'S' al cap del temps $t + dt$ en el moviment sa-



pigut. L'element s'haurà mogut en la trayectoria una cantitat OO' $= vdt$ Els axis a que referim el moviment pertorbat son en el instant *t* y per lo punt B homòleg del O, els OG y sa perpendicular, axís es, que les coordenades α y β de B son OG $= \alpha$ y BG $= \beta$ L'element *ds* en el moviment pertorbat es a BB, suposem, en el instant *t*, y s'en va a AA en el temps *dt*. Les coordinades $\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial t}\, dt$ y $\beta + \frac{\partial\beta}{\partial t}\, dt$ del punt A sont O'D y AD. Per B baixem la paralela BC a AD aturantla ahont talla a O'D. La velocitat de B al anarsen a A està dirigida segons BA y es igual a $\frac{BA}{dt}$ tenint per components segons els axis O'D y sa perpendicular, els valors següents:

$$\xi + \xi' \qquad \eta'$$

Donchs

$$CD = (\xi + \xi')\, dt$$
$$AF = (\eta + \eta')\, dt$$

essent F el peu de la perpendicular a AD passant per B. Com se dedueix facilment de la figura

$$CD = O'D - OC + OC$$
$$AF = AD - BC$$

Mes, fentse càrrech de que l'angle dels axis OG y O'D val $\frac{v}{\rho}\, dt$ y projectant a sobre BC la llinea trancada BCOG tindrem, dintre del primer ordre

$$BC = BG - OG \frac{v\, dt}{\rho}$$

Y, per l'estil, si's projecta sobre OC la meteixa línea trencada

$$OC = OG + BG \frac{v\, dt}{\rho}$$

De manera que, tenint ben present tot lo qu'hem dit, ne treyem

$$(\xi + \xi')\, dt = \alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial t}\, \partial t - \left(\alpha + \beta \frac{v\, dt}{\rho}\right) + \xi\, dt$$
$$\eta'\, dt = \beta + \frac{\partial\beta}{\partial t}\, dt - \left(\beta - \alpha \frac{v\, dt}{\rho}\right)$$

o bé

$$\xi' = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \beta \frac{v}{\rho}$$

$$\eta' = \frac{\partial \beta}{\partial t} + \alpha \frac{v}{\rho}$$

Y això dut a les (15) fa

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\beta}{\rho} = o$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\alpha}{\rho} = \theta'$$

En efecte, si derivem aquestes respecte a t y ens fem càrrech dels valors que acabem de treure de les ξ' y η' aixís com de que ρ es una funció solament de σ y que, per conseguent

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = v \frac{\partial \rho}{\partial s}$$

treyem desseguida les 15.

Les dugues equacions que'ns han sortit entre α, β, ρ, s y θ' es troben en el treball esmentat de Léauté, junt ab altres dugues qu'ara vaig a trovar.

Dels valors de les ξ' y η' en fonció de α y β s'en pot esbrinar que, si's prenen com variables independents σ y t, se té

$$\xi' \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}$$

$$\eta' = \frac{\partial \beta}{\partial t} + v\,\theta'$$

De modo que anant a les 19, surt

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial T'}{\partial \sigma} + \frac{v^2 - T}{\rho}\,\theta'$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} + v^2 \frac{\partial \theta'}{\partial s} + 2v \frac{\partial \theta'}{\partial t} = T \frac{\partial \theta'}{\partial s} + \frac{T}{\rho} + \frac{\partial T}{\partial s}\,\theta'$$

y heusaquí les altres dugues equacions de Léauté que, segons deya al començar, son un cas particular de les meves, més generals.

Tornant ja, després d'aqueixa digressió, a les equacions 15 y 16, y posanthi

$$\frac{v^2 - T}{\rho} = -g \cos \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma} = g \, sen \, \theta$$

tenim

$$\frac{\partial \xi'}{\partial s} = \frac{\eta' - v\theta'}{\rho}$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial s} = \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \frac{\xi'}{\rho}$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + (v\theta' - \eta') \frac{v}{\rho} = \frac{\partial T'}{\partial s} - g \cos \theta \;\; \theta'$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\xi' v}{\rho} = T \frac{\partial \theta'}{\partial s} + \frac{T'}{\rho} + g \, sen \, \theta \;\; \theta'$$

Pera ferho més senzill, recordem que la fletxa es petita, y per lo tant ρ relativament gròs. Podrem, donchs, posar com a equacions fonamentals

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial s} &= \frac{\eta' - v\theta'}{\rho} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial s} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad 20$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial t} &= \frac{\partial T'}{\partial s} - g\theta' \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= T \frac{\partial \theta'}{\partial s} \end{aligned}\right\} \quad 21$$

De la segona y la darrera s'en pot treure

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \theta'}{\partial s^2}$$

equació que's resol aixís

$$\theta' = F_1 (s - \sqrt{T}\, t) + F_2 (s + \sqrt{T}\, t)$$

essent les F arbitraries. La T es

$$T = \rho g + v^2$$

Un cop trobat θ', les darreres equacions 19 y 20 donen η'. Del valor de θ' en surt ξ' per la primera de les 19 per una integració que hi introdueix una funció arbitraria del temps. Aleshores surt de la primera de les 20 el valor de T' ab una nova funció arbitraria del temps. Al capdevall hi ha quatre funcions arbitraries, dos del temps y les F_1 y F_2 que ho son de $s - \sqrt{T}\ t$ y $s + \sqrt{T}\ t$. Pera determinar aquestes funcions arbitraries hi ha que veure en cada cas les condicions inicials y límits. En general pot arribarse a dir que seran elements determinants la forma de la corda o del cable en un moment donat y la velocitat instantània de sos elements al començar la pertorbació, per $t = 0$, per exemple. També son elements determinants les condicions límits. Els punts en que la corda o el cable es tangent a les politxes poden esser fixes, o tenir moviments oscilatoris coneguts, etc., etc.

Segons sia la forma de les condicions límits pot convenir modificar lleugerament la solució anterior. Posanthi σ en lloch de s

$$\theta' = F_1(\sigma - (\sqrt{T} + v)\,t) + F_1(\sigma + (\sqrt{T} - v)\,t)$$

Siguin x′ y′ les components paraleles a dos axes coordenats rectangles, un de vertical, del moviment pertorbat d'un element de la corda de coordenada σ' en el instant t. Es a dir, x' y' son les projeccions del segment recte que ajunta el lloch d'un punt definit per σ en el moviment conegut al punt en el moviment pertorbat en el meteix moment t. Fentse càrrech de la petitesa de θ podrem posar

$$-\frac{\partial x'}{\partial \sigma} = \theta\,\theta'$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \sigma} = \theta'$$

Y, si l'origen d'archs se pren en el punt més baix del cable

$$x' = \frac{l}{\rho}\int \theta' \sigma\, d\sigma + f_1(t)$$

$$y' = \int \theta'\, d\sigma + f_2(t)$$

essent f_1 y f_2 arbitraries

En lloch de servirse de la equació en θ', s y t, devegades pot esser encertat pendre la transformada :

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} + 2v\,\frac{\partial^2 \theta'}{\partial \sigma\,\partial t} = \rho g\,\frac{\partial^2 \theta'}{\partial \sigma^2}$$

Si, en aqueixa donem a θ' la forma trigonomètrica simbòlica

$$\theta' = M e^{i\left(\frac{2n}{\nu} t + \frac{2n}{\lambda} \sigma\right)}$$

l'equació diferencial ens imposa, entre les longituts d'onda λ y els períodes ν correspo-nents, la relació qu'heusaquí

$$\frac{l}{\nu^2} + \frac{2\upsilon}{\nu\lambda} = \frac{\rho g}{\lambda^2} \qquad 22$$

Fem el supòsit de que els extrems, o millor, els punts de tangencia ab les politxes responen a

$$\sigma = \pm l$$

essent l la longitut de corda entre ells, y son fixes. Com que ara

$$x' = \frac{M}{\rho} e^{i \frac{2n}{\nu} t} \int_0^l e^{i \frac{2n}{\lambda} \sigma} + f_1(t) =$$

$$\frac{M\lambda}{2\pi\rho} e^{i \frac{2\pi}{\nu} t} \left[\sigma e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda} \sigma - \frac{\pi}{2}\right]} + \frac{\lambda}{2\pi} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \sigma} \right] + f(t)$$

$$y' = M e^{i \frac{2\pi}{\lambda} t} \int_0^l e^{i \frac{2\pi}{\lambda} v} d\sigma + f_2(t) =$$

$$\frac{M\lambda}{2\pi} e^{i \frac{2\pi}{\nu} t} e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda} \sigma - \frac{\pi}{2}\right]} + f_2(t)$$

y les condicions límits son permanents, es a dir, s'han de cumplir per qualsevulga valor de t, no hi ha més remey que esser

$$f_1 = -\frac{M M_1 \lambda}{2\pi\rho} e^{i\frac{2\pi}{\nu}t}$$

$$f_2 = -\frac{M N_1 \lambda}{2\pi} e^{i\frac{2\pi}{\nu}t}$$

ahont M, y N, son constants arbitraries que depenen de la naturalesa especial de cada problema, més tals, que

$$l\,e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}l-\frac{\pi}{2}\right]} + \frac{\lambda}{2\pi} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}l} = M_1 \qquad 23$$

$$e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}l-\frac{\pi}{2}\right]} = N_1 \qquad 24$$

Particularisant més, prenguem el supòsit de que les oscilacions son simètriques respecte de la vertical que passa pel punt més baix. La solució en θ' serà

$$\theta' = M e^{i\frac{2\pi}{\nu}t} \; sen \frac{2\pi}{\nu}\sigma$$

o bé, si's vol, la part real d'això en que M es de la forma A + i B essent A y B constants reals y arbitraries. En les expressions 23 y 24 pendrem sols la part imaginaria, essent θ' de la forma de sinus, resultant :

$$-l\cos\frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{\lambda}{2\pi}\sin\frac{2\pi l}{\lambda} = M'_1$$

$$\cos\frac{2\pi l}{\lambda} = N'_1 \qquad 25$$

Mes, essent simètriques les oscilacions, x' ha de esser zero per $\sigma = 0$ y aixís es que

$$M'_1 = 0$$

El valor de N'_1 ja ve definit per 25. La condició $M'_1 = 0$ determina les longituts d'onda, que han de satisfer a l'equació ben coneguda

$$tg\frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi l}{\lambda}$$

Es sapigut que Euler va donar per les arrels la fòrmula

$$r = \frac{2\pi + 1}{2}\pi - \frac{2}{(2\pi + 1)\pi} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^3 - \frac{13}{15}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^5 -$$

y n'hi ha taules d'arrels calculades per Lommel (1)

No fent cas de l'arrel zero que no'ns convé, la arrel més petita es 4,934 ; el valor corresponent de λ, el major de tots, es aproximadament :

$$\lambda = \frac{3}{4}\,l$$

més exactament

$$\lambda = \frac{6{,}28}{4{,}49}\,l$$

El corresponent y màxim també, de ν, es

$$\nu = \frac{4\,l}{3\sqrt{v^2 + \rho g} - v}$$

La solució general pera'l cas d'oscilacions simètriques serà la suma de les solucions particulars per tots los valors admisibles de λ y ν. Y heuselaquí

$$\theta' = \Sigma\left(A\, sen \frac{2\pi}{\nu}\, t + B\cos\frac{2\pi}{\nu}\, t\right) sen\frac{2\pi}{\lambda}\,\sigma$$

$$x' = \Sigma\left(A\, sen\frac{2\pi t}{\nu} + B\cos\frac{2\pi}{\nu}\, t\right)\frac{\lambda}{2\pi\rho}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\, sen\frac{2\pi\sigma}{\lambda} - \sigma\cos\frac{2\pi\sigma}{\lambda}\right)$$

$$y' = \Sigma\left(A\, sen\frac{2\pi t}{\nu} + B\cos\frac{2\pi t}{\nu}\right)\frac{\lambda}{2\pi}\left(\cos\frac{2\pi l}{\lambda} - \cos\frac{2\pi\sigma}{\lambda}\right)$$

Els valors de A y B se determinen per les condicions inicials, que, per exemple, donen els valors de y' y $\frac{\partial y'}{\partial t}$ per tot valor de σ essent $t = 0$. Y, com es conegut, no hi haurà més que desentrotllar en serie de Fourier procedint com el segon membre de les fòrmules anteriors, el valor donat de y' y $\frac{\partial y'}{\partial t}$ per trovar quiscuna de les constants.

(1) Vegis per exemple *Jahnke-Emde Funktionentafeln* Leipzig. 1909.

Un altre cas interessant es el d'una corda o cadena que oscila d'una a l'altre banda de modo que, conservantse plana, el punt mitx s'mou segons una horizontal. En aquest cas θ' es funció per de σ, caldrà, donchs, pendre de les exponencials la part real en σ, o sia

$$\theta' = M e^{i \frac{2\pi}{\nu} t} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \sigma$$

Y, de la meteixa manera, de 23 y 24 pendrem sols la part real

$$l \sin \frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{\lambda}{2\pi} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} = M'_1$$

$$\sin \frac{2\pi l}{\lambda} = N'_1$$

Mes, com que y' ha d'esser zero per $\theta = 0$, s'ha de pendre $N'_1 = 0$, y per això

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = n\pi$$

essent n enter. Aquesta es la relació que fixa els valors admissibles pera λ y els periodes corresponents. El valor de M'_1 ve donat per la primera de les equacions de condició, aixís es que la solució complerta serà

$$\theta' = \Sigma \left(A \, sen \frac{2\pi}{\nu} t + B \cos \frac{2\pi}{\nu} t \right) \cos \frac{2\pi}{\lambda} \sigma$$

$$x' = \Sigma \left(A \, sen \frac{2\pi}{\nu} t + B \cos \frac{2\pi}{\nu} t \right) \left[\frac{\lambda}{2\pi\rho} \left(\sigma \, sen \frac{2\pi\sigma}{\lambda} - l \, sen \frac{2\pi l}{\lambda} \right) + \frac{\lambda}{2\pi} \left(\cos \frac{2\pi\sigma}{\lambda} - \cos \frac{2\pi l}{\lambda} \right) \right]$$

$$y' = \Sigma \left(A \, sen \frac{2\pi}{\nu} t + B \cos \frac{2\pi}{\nu} t \right) \frac{\lambda}{2\pi} sen \frac{2\pi\sigma}{\lambda}$$

Per la determinació de A y B cal dir lo meteix qu'avans.

En qualsevulga dels cassos si la pertorbació es mantinguda per qualque forsa periòdica, els elements geomètrichs y dinàmichs tenen el meteix periode. Si aquest es un dels propis de la corda hi haurà resonancia. Vejam, per exemple, el cas d'existir en els extrems forces pertorbadores iguals y contraries degudes als esforsos motor y resistent en les politxes, els quals soposarem periòdichs y de manera que'l moviment dels extrems sía de la forma

$$Q e^{i \frac{2\pi}{\nu'} t}$$

El valor de x' haurà de satisfer la condició que resulta de escriure que per $\sigma = \pm 1$ es d'aqueixa forma. El cas d'oscilacions simètriques que avans hem estudiat convé a les condicions límits actuals. Tindrem, donchs

$$M e^{i \frac{2\pi}{\nu'} t} \frac{\lambda}{2\pi\rho} \left(-L \cos \frac{2\pi l}{\lambda'} + \frac{\lambda}{2\pi} sen \frac{2\pi l}{\lambda'} \right) = Q e^{i \frac{2\pi}{\nu'} t}$$

essent λ' el valor corresponent a ν'. D'aquí que

$$M = \frac{Q \frac{2\pi\rho}{\lambda'}}{-l \cos \frac{2\pi l}{\lambda'} + \frac{\lambda}{2\pi} sen \frac{2\pi l}{\lambda'}}$$

Y's veu clar lo qu'avans deyam de la ressonancia.

4. Per acabar, tractarem del cas en que el fil o corda estan primerament en repòs, es a dir, de les oscilacions de la catenaria. Suposem sempre la fletxa petita, y seguint ab l'aproximació ab que hem dut els càlculs fins aquí, tindrem per les ζ' y θ' els valors següents deduits dels d'abans, fenthi

$$\zeta' = F_1(s + \sqrt{\rho g}\; t) + F_2(s - \sqrt{\rho g}\; t)$$
$$\theta' = F_3(s + \sqrt{\rho g}\; t) + F_4(s - \sqrt{\rho g}\; t)$$

Si hi posem la solució trigonomètrica, tenim entre λ y ν la relació següent :

$$\frac{l}{\nu^2} = \frac{\rho g}{\lambda^2}$$

Els valors de λ pel cas d'oscilacions simètriques, satisfan a

$$tg \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi l}{\lambda}$$

essent $2l$ la longitut entre'ls punts d'ahont penja la corda. Y aixís podriem anar trayent les fòrmules per ara, fent en les dels cables teledinàmichs $v = 0$. Deixant això, les equacions fundamentals del moviment oscilatori d'una corda plana, son, ab tota generalitat

$$\frac{\partial \xi'}{\partial s} = \eta' \frac{\partial \theta'}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial s} = \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \xi' \frac{\partial \theta'}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial T'}{\partial s} + N\theta'$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \quad T\frac{\partial \theta'}{\partial s} + T' \frac{\partial \theta}{\partial s} \quad - T\theta'$$

En aquesta forma, permeten deduir facilment les propietats de las ondes propagantse per la corda, establertes per Poisson y Routh. (*) Finalment en surten desseguida les equacions que aquest aplica a les oscilacions de la cicloide.

També's planteja el problema de Bernoulli de les oscillacions d'una corda vertical. En efecte, en aquest cas

$$\eta' = \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad \theta' = \frac{\partial \eta}{\partial s}$$

essent η la distancia d'un punt qualsevulga en el moviment pertorbat a la posició d'equilibri. Prenent l'origen d'archs en el punt de suspensió, l'última de les equacions fonamentals dona desseguida

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{T}{\delta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} - g \frac{\partial \eta}{\partial s}$$

essent

$$T = g \int_s^l \rho \sigma ds + P$$

y P qualque pès al capdevall.

E. TERRADAS.

Institut, Barcelona.

(*) Obra citada.