Salvador Estradé i Jordi Vives

Tal com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho, demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

En cada número de la *Revista* hi haurà dos problemes proposats: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i, els guanyadors, se'ls premiarà amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

Acompanyant la solució, l'alumne ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 d'octubre a:

probuni@ffn.ub.es (nivell universitari)

probsec@ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

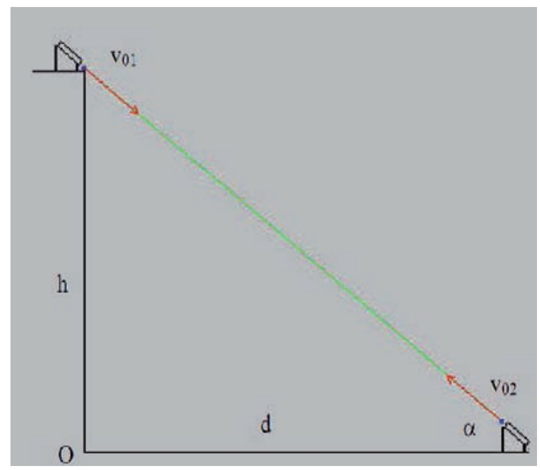
Problema per a l'alumnat de batxillerat

La Marta Madrueño Sicart, professora de l'Institut Jaume Salvador i Pedrol de Sant Joan Despí, ens ha fet arribar la proposta següent:

Dos canons situats a diferents altures estan apuntant l'un cap a l'altre tal com indica la figura adjunta. Els canons poden disparar projectils a qualsevol velocitat i inclinació sempre que es mantinguin encarats. En el supòsit que les trajectòries de les dues bales es creuin abans de tocar terra, demostreu que si els canons es disparen simultàniament, els projectils sempre xocaran.

Podeu comprovar aquest resultat amb la simulació de l'adreça següent:

`http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/applets/Hwang/ntnujava/projectile/projectile_s.htm`



Problema per a l'alumnat universitari

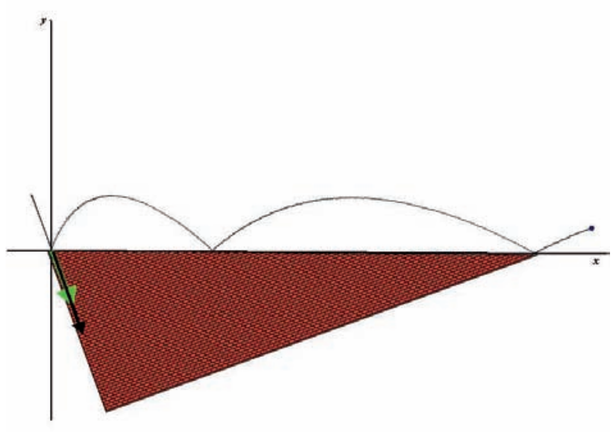
L'empresa CUC, SA (Connection Underground Company) disposa de tecnologia per poder fer túnels que travessen la Terra en línia recta, no necessàriament passant pel centre. Els túnels són perfectament llisos, sense cap fregament, inclús se n'ha fet el buit a l'interior. D'aquesta manera, una càpsula que es deixa caure per un costat del túnel lliscarà per l'interior fins a l'altre costat, on arribarà a velocitat zero. El pla d'expansió per als pròxims anys de CUC, SA consisteix a construir túnels que uneixin les ciutats més importats del món, per exemple Barcelona i Nova York o Barcelona i Sidney.

Demostreu que el temps que triga una càpsula a recórrer qualsevol dels túnels construïts per CUC, SA és sempre el mateix. Suposarem que la Terra és perfectament esfèrica i homogènia.

Solució als problemes del número anterior de la Revista

Del problema per a l'alumnat de batxillerat

Per simplificar la resolució del problema, agafarem l'eix x paral·lel al pla inclinat de la coberta i l'eix y en la direcció perpendicular a aquest, tal com mostra la figura adjunta.



En aquest sistema de coordenades, els vectors acceleració, $\vec{g}$, i velocitat amb què arriba la pilota al primer impacte, $\vec{v}$, formen un angle de 20^o amb l'eix y. Per tant, l'acceleració de la pilota en tota la trajectòria val $(g\sin 20^o, -g\cos 20^o)$ i la velocitat de la pilota després del primer xoc val $(v_o \sin 20^o, v_o \cos 20^o)$, on , $v_o = \sqrt{2gh} = 9,90$ m/s, perquè, com que és un xoc elàstic, es conserva el mòdul de velocitat amb què hi arriba. L'impacte únicament canvia el signe de la component vertical de la velocitat. Així, les equacions del moviment de la pilota entre el primer i el segon xoc són:

$$x = v_o t \sin 20^o + \frac{1}{2} g t^2 \sin 20^o$$

$$y = v_o t \cos 20^o - \frac{1}{2} g t^2 \cos 20^o$$

Si igualem y a zero, trobarem el temps que dura el primer vol:

$$v_o t \cos 20^o - \frac{1}{2} g t^2 \cos 20^o = 0 \rightarrow t = \frac{2v_o}{g}$$

L'abast del primer vol s'obtindrà substituint aquest temps a l'equació corresponent a l'eix x

$$x = v_o \left(\frac{2v_o}{g}\right) \sin 20^o + \frac{1}{2} g \left(\frac{2v_o}{g}\right)^2 \sin 20^o = \frac{4v_o^2 \sin 20^o}{g}$$

$$x = 13,7 \text{ m}$$

Les components de la velocitat amb què arriba la pilota al segon xoc són:

$$v_x = v_o \sin 20^o + g\left(\frac{2v_o}{g}\right) \sin 20^o = 3v_o \sin 20^o$$

$$v_y = v_o \cos 20^o - g\left(\frac{2v_o}{g}\right) \cos 20^o = -v_o \cos 20^o$$

D'això, deduïm que la v_y amb què la pilota inicia el segon vol és la mateixa que la v_y amb què ha iniciat el primer, perquè el xoc elàstic únicament canvia el signe de la component vertical de la velocitat. A més, com que l'acceleració és constant, el temps del segon vol serà el mateix que el del primer. També deduïm que la v_x amb què inicia el segon vol és tres vegades superior a la v_x de l'inici del primer salt. Per tant, les equacions que determinen el moviment de la pilota entre el segon i el tercer xoc són les mateixes que les del primer vol, amb l'únic canvi de la component horitzontal de sortida per un valor triple. Així, doncs, per trobar l'abast del segon vol hem de fer:

$$x = 3v_o \left(\frac{2v_o}{g}\right) \sin 20^o + \frac{1}{2} g \left(\frac{2v_o}{g}\right)^2 \sin 20^o = \frac{8v_o^2 \sin 20^o}{g}$$

$$x = 27,4 \text{ m}$$

Cal observar que surt el doble de l'abast corresponent al primer salt.

Si sumem els dos resultats obtinguts, trobarem la longitud total de la coberta: 41,1 m.

Del problema per a l'alumnat universitari

El camp magnètic generat per un dipol val

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}, \tag{1}$$

on $\vec{m}$ és el moment magnètic, que per a una espira de radi a val

$$\vec{m} = I\pi a^2 \vec{n}, \tag{2}$$

on I és el corrent i $\vec{n}$ la direcció normal a l'espira. L'energia potencial es calcula com:

$$E_p = \vec{B}\cdot\vec{m}', \tag{3}$$

on $\vec{m}'$ és moment magnètic de l'espira que interacciona amb el camp magnètic $\vec{B}$. La força exercida sobre l'espira és el gradient de l'energia potencial.

$$\vec{F} = \vec{\nabla} E_p. \tag{4}$$

Prenem $\vec{m}$ com el moment magnètic de la Terra, orientat amb l'eix Z,

$$\vec{m} = m_t \cdot \vec{k}; \tag{5}$$

per calcular el camp $\vec{B}$ a l'equador de la Terra, calcularem el camp sobre l'eix Y.

$$\vec{r} = y \cdot \vec{j} \tag{6}$$

Substituint en (1):

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 m_t}{4\pi y^3}\cdot\vec{k}. \quad (7)$$

Prenent la dada del camp magnètic a l'equador $B_{eq} = 0,3G$ i $y = R_t$ (radi de la Terra), podem aïllar el moment magnètic de la Terra:

$$m_t = \frac{4\pi B_{eq} R_t^3}{\mu_0} = 7.785\times 10^{22} Am^2. \quad (8)$$

Per obtenir una força de repulsió entre la Terra i un anell conductor, aquesta ha de tenir un moment magnètic orientat en l'eix Z:

$$\vec{m}' = m'\cdot\vec{k}. \quad (9)$$

L'energia potencial dóna

$$E_p = -\frac{\mu_0 m_t m'}{4\pi y^3}. \quad (10)$$

Calculem la força exercida en l'eix Y com la parcial respecte y de E_p:

$$F = \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{3\mu_0 m_t m'}{4\pi y^4}. \quad (11)$$

Volem aixecar 1 kg, per tant $F = 9,8N$, a l'equador $y = R_t$ i ja hem calculat m_t. Amb això podem aïllar el moment magnètic de l'espira:

$$m' = \frac{4\pi R_t^4 F}{3\mu_0 m_t} = 6,945\times 10^{11} Am^2. \quad (12)$$

Aplicant (2) podem calcular el corrent necessari per generar m', sobre una espira d'1 m de radi i ens dóna $2,21\times 10^{11} A$. El resultat és un corrent molt gran; per exemple, per fer funcionar l'accelerador de partícules LHC es fan servir $11000A$.

Si dupliquem el corrent de l'anell, en duplicarem el moment magnètic. Per calcular l'alçada a què arribaria l'anell, igualem la força exercida pel camp gravitatori de la Terra amb la força magnètica calculada en (11).

$$G\frac{M_t\cdot M}{y^2} = \frac{3\mu_0 m_t m'}{4\pi y^4}, \quad (13)$$

on M_t és la massa de la Terra, $M = 1kg$ en la massa de l'anell. Aïllem y:

$$y = \sqrt{\frac{3\mu_0 m_t m'}{4G\pi M_t\cdot M}} = 9,020\times 10^6 m, \quad (14)$$

obtenim que el punt d'equilibri és a $y = 9020\,km$, és a dir a 2642 km sobre la superfície de la Terra.

La conclusió és que el camp magnètic terrestre és massa petit per aixecar càrregues importants i els corrents necessaris són massa grans. Si fos possible generar aquest corrent, un canvi petit en el valor implicaria canvis molt grans en l'alçada del punt d'equilibri.