Salvador Estradé i Jordi Vives

Tal com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho, demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

En cada número de la *Revista* hi haurà dos problemes proposats: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i, els guanyadors, se'ls premiarà amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

Acompanyant la solució, l'alumne ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 de març a:

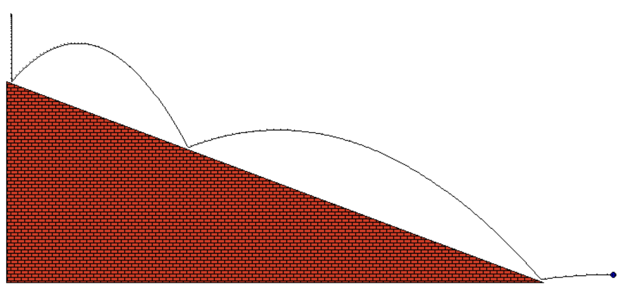
probuni@ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

Problema per a l'alumnat de batxillerat

En Llorenç Porquer i Seguí, professor de l'IES Cambrils, de Cambrils, ens ha fet arribar la proposta següent:

Des d'una finestra es deixa caure una pilota que impacta, gairebé, al capdamunt de la coberta d'un edifici. S'observa que la pilota fa tres bots sobre la coberta i que el tercer bot coincideix, pràcticament, amb l'extrem final de la coberta. Sabent que la inclinació de la coberta és de 20º, que la pilota es deixa caure des d'una altura de 5 m respecte del punt del primer impacte i que els xocs són elàstics, calculeu la longitud de la coberta. En el dibuix adjunt hi ha explicitada la trajectòria que ha seguit la pilota.

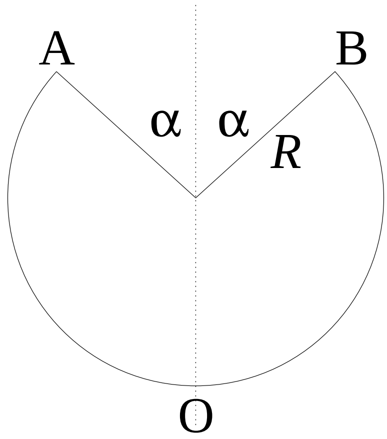


Problema per a l'alumnat universitari

Es pot levitar en el camp magnètic terrestre? Aproximant el camp magnètic terrestre a un dipol amb 0,3 gauss a l'equador, calculeu el corrent que circula per una anella de radi 1 m per produir la força necessària per elevar una càrrega d'1 kg. Si dupliquem el corrent de l'anella fins a quina alçada pujaria?

Solució als problemes del número anterior de la Revista

Del problema per a l'alumnat de batxillerat



El trajecte AB del patinador serà parabòlic amb una velocitat de sortida v_A i un angle de sortida respecte a l'horitzontal de 60º. Agafant com a origen de coordenades el punt A, la posició del patinador durant aquest moviment ve determinada per les equacions següents:

$$x = v_A \cos 60t$$

$$y = v_A \sin 60t - \frac{1}{2}gt^2$$

El patinador arribarà a B si l'abast d'aquest moviment parabòlic coincideix amb la distància horitzontal entre els punts A i B, que val $2R \sin 60$. Així doncs, si apliquem les equacions anteriors al punt B, tenim:

$$2R \sin 60 = v_A \cos 60 t_{AB}$$

$$0 = v_A \sin 60 t_{AB} - \frac{1}{2} g t_{AB}^2$$

Aïllant t_{AB} de la segona equació i substituint a la primera, s'obté:

$$v_A^2 = 2gR \tag{1}$$

D'altra banda, en el tram circular podem aplicar la conservació de l'energia mecànica entre els punts O i A i obtenim:

$$\frac{1}{2}mv_O^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg(R + R\sin 30)$$

D'on deduïm:

$$v_A^2 = v_O^2 - 3gR \tag{2}$$

Substituint (1) en (2) i aïllant, obtenim:

$$v_O = \sqrt{5gR}$$

Del problema per a l'alumnat universitari

a) Desprendre l'equador de la Terra per centrifugació, implica donar a una partícula en l'equador l'energia suficient per escapar de l'atracció terrestre. L'energia d'una partícula de massa m ve donada per la suma.

$$E = U + E_R \tag{3}$$

U és l'energia potencial gravitatòria de la partícula i E_R és l'energia de rotació. La partícula es desprendrà quan E sigui més gran que zero.

El potencial gravitatori per a una partícula de massa m és:

$$U(r) = \begin{cases} -G\frac{M \cdot m}{r} & r \geq R_t \\ -G\frac{M \cdot m}{2R_t^3}\left(3R_t^2 - r^2\right) & r < R_t \end{cases} \tag{4}$$

L'energia de rotació és:

$$E_R = \frac{1}{2}m(\omega r \cos(\theta))^2 \tag{5}$$

On $\theta \in \{-\pi/2, \pi/2\}$ és la latitud de la partícula m a la Terra i ω és la velocitat de rotació. Si la partícula es troba a l'equador $\theta = 0$ i $r = R_t$ i l'energia dóna.

$$E = -G\frac{M \cdot m}{R_t} + \frac{1}{2}m\omega^2 R_t^2 \tag{6}$$

Busquem la mínima energia necessària per desprendre l'equador, $E = 0$, i aïllem ω.

$$\omega = \sqrt{2G\frac{M}{R_t^3}} \tag{7}$$

Substituint les dades, obtenim $\omega = 0,00175 s^{-1}$ i la durada del dia serà $59'46''$.

b) Per calcular si només es desprèn l'equador, reescrivim l'equació 3 per qualsevol punt interior de la Terra.

$$E = -G\frac{M \cdot m}{2R_t^3}\left(3R_t^2 - r^2\right) + \frac{1}{2}m(\omega r \cos(\theta))^2 \tag{8}$$

I substituint ω pel resultat de l'apartat anterior.

$$E = -G\frac{M \cdot m}{2R_t^3}\left[3R_t^2 - r^2\left(2 + \cos(2\theta)\right)\right] \tag{9}$$

que només és més gran o igual a zero si

$$3R_t^2 \leq r^2\left(2 + \cos(2\theta)\right) \tag{10}$$

Atès que $r \leq R_t$ de l'equació anterior només es pot complir la igualtat quan $\theta = 0$ i $r = R_t$, i per tant només es desprèn l'equador.

c) Aconseguir la desintegració total del planeta és complicat, perquè els punts situats sobre l'eix de rotació no tenen mai energia de rotació. Independentment del mètode utilitzat, podem considerar la Terra com un sistema lligat de partícules autogravitants i calcular l'energia de rotació mínima necessària per desfer-lo.

$$\frac{dV}{dv} = \left[\frac{-3}{2}G\frac{M}{R_t} + \frac{1}{2}G\frac{M}{R_t^3}r^2\right]\frac{dm}{dv} \tag{11}$$

$$\frac{dm}{dv} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_t^3} \tag{12}$$

Integrem per calcular l'energia potencial de tota la Terra.

$$V = \int dV = 4\pi\int_0^{R_t}\frac{dV}{dv}r^2 dr \tag{13}$$

Calculant la integral obtenim.

$$V = -\frac{6}{5} G \frac{M^2}{R_t} \tag{14}$$

La mínima energia del sistema per deixar d'estar lligat.

$$E = V + E_r = 0 \tag{15}$$

Així, l'energia de rotació mínima que s'ha d'aportar al sistema per centrifugar la Terra completament és:

$$E_{min} = E_r = -V = \frac{6}{5} G \frac{M^2}{R_t} \tag{16}$$

Substituint les dades, obtenim $E_min = 4,473 \cdot 10^{32} J$. L'energia de rotació d'una esfera massissa és

$$E_R = \frac{1}{5} M R_t^2 \omega^2 \tag{17}$$

Substituint i aïllant ω podem obtenir la velocitat de rotació mínima per centrifugar la Terra.

$$\omega = \sqrt{6\, G \frac{M}{R_t^3}} \tag{18}$$

Substituint les dades, obtenim $\omega = 0,00303 s^{-1}$ i la durada del dia serà $34' \, 31''$.

d) Si obtenim l'energia necessària per centrifugar la Terra fent servir l'energia solar captada per una nau de la mateixa mida que la Terra, podem calcular el temps necessari per acumular tota aquesta energia.

Primer calculem la superfcie perpendicular il·luminada pel Sol.

$$S = \pi R_t^2 \tag{19}$$

Substituint les dades, obtenim $S = 1,28 \cdot 10^{14} m^2$.

Si s'absorbeix tota la radiaci $\rho = 1360 W/m^2$, podem calcular la potència absorbida.

$$P = \rho S = 1,74 \cdot 10^{17} W \tag{20}$$

Dividint l'energia mínima calculada a l'apartat anterior per la potència absorbida, obtindrem el temps necessari per acumular-la.

$$T = \frac{E_{min}}{P} = 2,57 \cdot 10^{15} s \tag{21}$$

Trigarem 81,5 milions d'anys en acumular l'energia suficient.

e) Si envoltem el Sol completament per absorbir l'energia necessària, calculem la superfcie il·luminada.

$$S = 4\pi R_{sol}^2 \tag{22}$$

Prenent $R_{sol} = 1,50 \cdot 10^{11} m$ obtenim $S = 2,827 \cdot 10^{23} m^2$, i la potència absorbida és

$$P = \rho S = 3,84 \cdot 10^{26} W \tag{23}$$

Dividint l'energia mínima per la potència absorbida, obtindrem el temps necessari per acumular-la.

$$T = \frac{E_{min}}{P} = 1,163 \cdot 10^{6} s \tag{24}$$

Trigarem 13,5 dies en acumular l'energia suficient.