Salvador Estradé i Jordi Vives

Tal com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho, demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

En cada número de la *Revista* hi haurà dos problemes proposats: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i, els guanyadors, se'ls premiarà amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

Acompanyant la solució, l'alumne ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 d'octubre a:

probuni@ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

Problema per a l'alumnat de batxillerat

En els vèrtexs d'un triangle equilàter de costat 1 m hi ha tres càrregues puntuals i fixes de valors: $Q_A = 1$ nC; $Q_B = 2$ nC i $Q_C = 3$ nC. Quant val l'energia potencial electrostàtica del sistema?

Dada:
Constant elèctrica en el buit: $9{\cdot}10^9$ N m^2 C^{-2}.

Problema per a l'alumnat universitari

Es proposa una adaptació d'un problema proposat en una prova de l'*Olimpiada Española de Física* que sembla interessant.

L'Imperi del Mal, famós per rodar la sèrie de la Guerra de les Galàxies, ha decidit introduir-se a fons en els negocis immobiliaris antigalàctics. Amb aquesta finalitat ha constituït la societat DECONSA (Demolicions i Contractes, Societat Astronòmica). Pretén construir unes megaurbanitzacions a Siri amb excellents vistes a la constel·lació d'Orió. Per aconseguir el material de construcció ha reconvertit la seva famosa Estrella de la Mort en una trituradora de planetes. El procediment per esbocinar un planeta consisteix a augmentar-ne la velocitat de gir fins a aconseguir, per centrifugaci, la desintegració total. Per desgràcia, la Terra ha estat classificada com a planeta rebutjable i està inscrit a la llista de planetes per reciclar.

Si es considera la Terra com un cos perfectament esfèric, rígid i de densitat constant:

a) Determineu la velocitat de rotació de la Terra per aconseguir desprendre l'equador per centrifugaci i quina serà la duració del dia en aquest moment

b) Amb aquesta velocitat, es desprèn noms el cinturó equatorial o es desintegrarà tot el planeta?

c) Per aconseguir la desintegració total de la Terra es necessita una gran quantitat d'energia en forma d'energia de rotació. Determineu l'energia mínima per centrifugar completament la Terra. Per obtenir aquesta energia, quina velocitat de rotació haurem de donar a la Terra?

d) La companyia DECONSA, per reduir despeses, també pretén obtenir l'energia de la radiació solar, ja que aquesta s gratuïta. La densitat de potència irradiada pel Sol en la proximitat de la Terra és d'1,36 kw/m^2. L'Estrella de la Mort és una gegantesca nau espacial de la mateixa mida que la Terra i la seva superfície està preparada per captar tota la radiació solar. Quant de temps trigaria a carregar les bateries l'Estrella de la Mort per disposar de l'energia que necessita per centrifugar la Terra?

e) Per accelerar el procés, DECONSA decideix construir una esfera que envolta completament el Sol amb un material molt lleuger capa d'absorbir totalment la radiació solar i emmagatzemar-la adequadament. Quant de temps es necessitaria per destruir la Terra?

Dades:
Radi equatorial terrestre: 6.378 km.
Massa de la Terra: $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.
Distància mitjana Terra-Sol: $150{\cdot}10^6$ km.

Solució als problemes del número anterior de la Revista

Del problema per a l'alumnat de batxillerat

Tant el planeta com el seu satèl·lit giren en moviments circulars uniformes entorn del seu centre de masses, que suposem en repòs. Per tant, si agafem com a origen de coordenades aquest punt es compleix la relació següent:

$$MR = mr \quad , \tag{1}$$

on M és la massa del planeta, m la del satèl·lit ($m = M/10$), R el radi de l'òrbita del planeta i r la del seu satèl·lit. És obvi que la relació entre aquests dos radis compleix:

$$R + r = D \quad , \tag{2}$$

on D és la distància entre els centres dels dos astres.

Resolent el sistema d'equacions (1) i (2), obtenim que: $R = D/11$ i $r = 10D/11$.

D'altra banda, la llei fonamental de la dinàmica aplicada al moviment circular uniforme de M i m segons els respectius eixos normals (radials) ens dóna respectivament:

$$G\frac{Mm}{D^2} = M\omega_M^2 R \tag{3}$$

$$G\frac{Mm}{D^2} = m\omega_m^2 r \tag{4}$$

Cal fer notar que la força gravitatòria d'interacció entre els dos astres depèn de la distància entre els seus centres per la qual cosa, en mòdul, és la mateixa per a les dues masses mentre que l'acceleració normal de cadascuna depèn dels radis de les respectives trajectòries que descriuen i, per tant, tenen valors diferents.

També cal remarcar que, si introduïm la relació (1) en l'equació (3) i la comparem posteriorment amb la (4), deduïm que necessàriament les velocitats angulars de gir de les dues masses són iguals i que, per tant, també coincideixen els seus períodes de rotació. Així doncs, per obtenir la velocitat angular comuna podem treballar, per exemple, amb l'equació (3) on, si substituïm m i R pels seus valors, obtenim:

$$G\frac{MM/10}{D^2} = M\omega_M^2 D/11 \tag{5}$$

Per tant:

$$\omega_M = \sqrt{\frac{11GM}{10D^3}} = 1,07.10^{-5} rad/s. \tag{6}$$

Així doncs, el període comú s'obté de:

$$T_M = T_m = \frac{2\pi}{\omega_M} = 5,8710^5 s \tag{7}$$

Les velocitats lineals respectives són:

$$v_M = \omega_M R = 38,9 m/s \tag{8}$$
$$v_m = \omega_m r = 389 m/s \tag{9}$$

L'energia mecànica del sistema és la suma de l'energia cinètica de cadascuna de les dues masses més l'energia potencial gravitatòria d'interacció entre elles.

$$E = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 - G\frac{Mm}{D} = -8,3510^{26} J. \tag{10}$$

Finalment, cal observar que, si la massa del planeta M hagués tingut un valor molt més gran que la massa del satèl·lit m, el centre de masses del sistema hauria coincidit pràcticament amb el centre de M i podríem considerar que el planeta roman en repòs mentre el seu satèl·lit m orbita entorn del centre de M.

Del problema per a l'alumnat universitari

Tenim com a dades de partida que la mètrica en el buit que envolta el planeta té simetria esfèrica

$$c^2 d\tau^2 = A(r)(cdt)^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2) \tag{11}$$

on $A(r)$ i $B(r)$ són dues funcions desconegudes de la coordenada radial r amidada des del centre de P de manera que compleixin que $A(r)B(r) = 1$ als voltants de P.

Una partícula en trajectòria radial en un pla equatorial ($d\theta = d\phi = 0$) compleix el principi de conservació de l'energia, de manera que la quantitat

$$e = A(r)\, c\, \frac{dt}{d\tau} \tag{12}$$

es manté constant durant tot el recorregut. Si suposem que la partícula inicia el recorregut $dt = d\tau = 1$ des de $r = \infty$ on $A = 1$, l'expressió 12 ens diu que $e = c$, i llavors 12 es redueix a

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{A}. \tag{13}$$

Substituint 13, $d\theta = 0$, $d\phi = 0$ en l'expressió 11 de l'element de línia, tenim:

$$A(r) = 1 - \left(\frac{dr}{c\,dt}\right)^2 = 1 - f(r). \tag{14}$$

Un fotó en trajectòria equatorial de radi constant a redueix la mètrica 11 a l'expressió següent:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = c^2\frac{A(a)}{a^2} \tag{15}$$

per a ($\delta\tau = dr = 0$, $\sin\theta = 1$) i la seva equació de moviment per Euler-Lagrange és

$$\left(\frac{df}{dt}\right)2 = \left(\frac{c^2}{2r}\right)\frac{dA(a)}{dr}, \tag{16}$$

de manera que l'única funció $A(r)$ del tipus 14 que compleix 15 i 16 és (vegeu l'annex 1):

$$A(r) = 1 - \frac{k}{r} \qquad \text{amb} \qquad a = \frac{3k}{2}. \tag{17}$$

Si derivem respecte a r, s'obté:

$$\frac{d(rA)}{dr} = 1 \tag{18}$$

de manera que en posar $A(r)$ com $A(r) = e^{-\nu(r)}$ en :

$$e^{-\nu}(\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2} = 0, \tag{19}$$

prenent $B(r) = e^{-\lambda(r)}$ i sabent que $A(r)B(r) = 1$, podem inserir $\nu = -\lambda$ en 19:

$$e^{-\nu}(\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}) - \frac{1}{r^2} = 0. \tag{20}$$

L'enginyer de bord, després de consultar l'enciclopèdia electrònica, comprova que els càlculs realitzats són correctes ja que 19 i 20 coincideixen amb les components t i r de les equacions d'Einstein en un espai-temps de simetria esfèrica (vegeu la bibliografia) introdueix aquestes equacions en l'ordinador per calcular les altres dues equacions corresponents a θ, ϕ i la tripulació continua la travessia sense problemes, sumits plàcidament en la curvatura de l'espai-temps provocada pel llunyà planeta P.

Conclusió

Acceptant que es compleix $A(r)B(r) = 1$, la consideració de la trajectòria circular d'un raig de llum en un espai-temps de geometria esfèrica defineix una condició 18 de la qual es poden deduir fàcilment les corresponents equacions de camp d'Einstein en el buit.

Annex 1

Utilitzant 15 i 16 s'obté que:

$$2\frac{A}{A'} - r = 0 \qquad \text{on} \qquad A' = \frac{dA}{dr}. \tag{21}$$

La funció $A(r) = k\,r^2$ no serveix, ja que és valida per a un interval $r = (-\infty, +\infty)$ i no per a un únic valor $r = a$ com busquem.

L'equació 21 s de primer ordre i per tant vlida per a un únic valor de r noms si:

$$\frac{A}{A'} = mr + n \qquad \text{amb} \qquad a = \frac{2n}{1-2m} \tag{22}$$

$$\frac{A}{A'} = r(mr + n) \qquad \text{amb} \qquad a = \frac{1-2n}{2m}, \tag{23}$$

on m i n sn dos paràmetres constants que no depenen de r. Solucionant les dues equacions diferencials 22 i 23 tenim:

$$A = k\,(mr + n)^{1/m} \tag{24}$$

$$A = k\,[r/(mr + n)]^{1/n}. \tag{25}$$

Imposant la condició de $A = 1$ per $r = \infty$ s'ha de descartar la solució 24 i la solució 25 ha de complir $m = k^n$, de manera que en substituir en 25 tenim:

$$A = \left(1 + \frac{n\,k^{-n}}{r}\right)^{-1/n} \tag{26}$$

L'únic valor possible que ens transforma 26 en l'equació 14 es $n = -1$,

$$A = 1 - \frac{k}{r} \qquad \text{amb} \qquad a = \frac{3k}{2} \tag{27}$$

amb la derivada respecte a r s l'equació de camp $G_{tt} = 0$.

Bibliografia

W. RINDLER, *Essential Relativity*, Second edition. Springer-Verlag 1977.

S. WEINBERG, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Nova York: Wiley and Sons 1973.

H. C. OHANIAN, *Gravitation and Spacetime*, Nova York: W. W. Norton and Company Inc., 1976.

J. FOSTER, J. D. NIGHTINGALE, *A Short Course in General Relativity*, 2nd edition copyright 1995 , Springer-Verlag, Nova York, Inc. 1995.

C. MISNER, K. THORNE and J. WHEELER, *Gravitation*, Freeman, 1973.

W. RINDLER, *Relativity, Special, General and Cosmological*, Second edition. Oxford University Press. 2006.