Integrabilitat i caos: l'indeterminisme clàssic

Jaume Masoliver García*
Departament de Física Fonamental. UB

Introducció

Fins l'any 1960 la mecànica clàssica era considerada, per una majoria de físics, com una disciplina tancada de la qual no podien esperar-se nous desenvolupaments i teories. Però a partir del anys seixanta nous resultats matemàtics juntament amb noves dades numèriques aconseguides mitjançant ordinadors d'alta velocitat, donaren llum a tot un nou camp del saber relacionat amb la dinàmica no lineal i el comportament caòtic dels sistemes deterministes. Aquest nou camp —els inicis del qual cal cercar-los en els treballs de Poincaré i altres investigadors que a final del segle passat intentaren formular una teoria de pertorbacions no lineals de les òrbites planetàries— trenca amb la vella i arrelada idea del determinisme clàssic de Laplace.

En un cert sentit, Newton i tota la ciència occidental tingueren la gran sort que el sistema solar, àdhuc la seva complexitat, mostra un comportament extraordinàriament regular que, a temps curts, es pot predir d'una forma sorprenentment acurada. Això és degut en part a la feblesa de la força gravitatòria, però també al fet que el problema keplerià dels dos cossos és completament integrable (encara que un sistema gravitacional de tres o més cossos no ho és). La deducció newtoniana de les lleis de Kepler es basà precisament en les propietats del sistema (integrable) dels dos cossos. No obstant això, les interaccions dinàmiques dels molts cossos que formen el sistema solar ha de conduir necessàriament a desviacions de les prediccions basades en les lleis de Kepler. Això porta a preguntar-nos: per què el sistema solar es comporta d'una forma tan regular?; o en la famosa frase de Moser de l'any 1975: és estable el sistema solar?, és a dir, mantindrà en el futur l'estructura que nosaltres coneixem? Aquestes preguntes no tenen avui dia una resposta completa.

La preocupació per l'estabilitat i l'evolució temporal del sistema solar ha ocupat un lloc central en la física i les matemàtiques des de l'inici del pensament científic i, especialment, en els últims 350 anys. Fins a l'aparició dels ordinadors a mitjan aquest segle, totes les eines emprades havien estat desenvolupaments pertorbatius de diferents menes. Durant el segle XVIII Euler, Lagrange i Laplace realitzaren avenços molt importants en aquesta direcció predint els canvis en la geometria de les òrbites i l'estabilitat global del sistema degut a petites pertorbacions. En el segle XIX, Hamilton i Jacobi tornaren a formular la mecànica de forma tal que la dinàmica dels sistemes mecànics es pogués descriure en termes d'un espai fàsic constituït per la posició i el moment, en lloc de l'espai físic lagrangià basat en les posicions i les velocitats. Aquesta reformulació ha resultat ser d'una gran importància, car en la formulació hamiltoniana el flux de trajectòries deixa invariant el volum de l'espai fàsic. A més, l'existència de simetries garanteix la conservació d'algunes quantitats, fet que permet reduir la dimensió de l'espai fàsic.

Tots aquests treballs afermaren la idea, diríem que filosòfica, del determinisme clàssic. No obstant això, els treballs de Poincaré al final del segle passat, no tan sols tancaren tota una època sinó que significaren la primera esquerda en la concepció determinista. La major part dels treballs posteriors a Newton consistiren a trobar correccions a les òrbites keplerianes de dos cossos massius pertorbats per un tercer cos d'una massa molt més petita. La idea central consistia a sortir de l'òrbita de Kepler com una primera aproximació i avaluar les correccions successives mitjançant mètodes pertorbatius. Quedava, però, una qüestió pendent: la demostració de la convergència de les sèries pertorbatives obtingudes així. El problema era de tal magnitud que fins i tot el rei Òscar de Suècia oferí l'any 1885 un premi molt important a qui pogués respondre la qüestió. Poincaré entrà en el joc i guanyà el premi demostrant que les sèries pertorbatives poden divergir degut a l'anomenat des de llavors "problema dels denominadors petits".

Sabem ara que les ressonàncies que donen lloc a aquests denominadors petits estan associades a l'aparició de comportament caòtic i que a causa d'aquest comportament no regular sembla impossible predir, a temps grans, l'evolució temporal dels sistemes mecànics no integrables (que són la immensa majoria) emprant tècniques pertorbatives. Des del final del segle passat no es va realitzar cap avenç significatiu i fins i tot aquesta qüestió fonamental va ser pràcticament oblidada i arxivada. No va ser fins l'any 1954, quan Kolmogorov donà un esbós de demostració del fet que la majoria de tra-

*__Jaume Masoliver García__ (Sabadell, 1951) és doctor en física per la UB (1982). Fou investigador de la Universitat de California-San Diego (1984-1987). Actualment és professor titular de la Facultat de Física (UB).

jectòries dels sistemes no integrables conservatius són quasiperiòdiques i que hom pot trobar-les mitjançant un desenvolupament pertorbatiu convergent. Als anys seixanta, Arnold i Moser donen una demostració formal i rigorosa d'aquest resultat conegut amb el nom de teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser). En les seccions que segueixen intentarem desenvolupar una mica més aquestes idees fonamentals.

Mecànica hamiltoniana

En la formulació hamiltoniana de la mecànica la descripció de l'estat d'un sistema mecànic amb n graus de llibertat es realitza mitjançant el coneixement de les coordenades generalitzades $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2 \cdots, q_n)$ i dels moments generalitzats $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2 \cdots, p_n)$. El problema central de la mecànica és trobar l'evolució temporal de l'estat del sistema. Es a dir, conèixer les funcions $\boldsymbol{q}(t)$ i $\boldsymbol{p}(t)$ que ens donen l'evolució en el temps de les coordenades i els moments. Aquesta evolució temporal ve donada per les *equacions de Hamilton*

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \qquad \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \tag{1}$$

on la funció de Hamilton o hamiltonià $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ és l'energia total del sistema. En l'eq. (1) fem servir la notació $\partial H/\partial \boldsymbol{q} \equiv (\partial H/\partial q_1, \cdots, \partial H/\partial q_n)$ per indicar el gradient de H respecte a $\boldsymbol{q}$ i de forma semblant per $\partial H/\partial \boldsymbol{p}$.

En la formulació de Hamilton l'estat d'un sistema mecànic amb n graus de llibertat ve descrit per un "punt" $(\mathbf{p}, \boldsymbol{q})$ d'un espai de dimensió $2n$ anomenat *espai fàsic*. Així, sortint a $t = 0$ d'un punt inicial $(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0)$ l'estat del sistema en un temps, t, posterior vindrà donat pel punt $(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t))$, sent $\boldsymbol{p}(t)$ i $\boldsymbol{q}(t)$ les solucions de les equacions de Hamilton amb condicions inicials $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}_0$ i $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0$. La trajectòria descrita pel punt $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ anomena *òrbita o trajectòria fàsica* del sistema.

Un dels avantatges de la formulació hamiltoniana és permetre avaluar, d'una forma relativament senzilla, l'evolució temporal de les propietats del sistema mecànic. Suposem que una determinada propietat del sistema (per exemple, l'energia) la podem representar per una funció, $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$, de l'estat del sistema i del temps. Com variarà f quan l'estat, $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, del sistema evolucioni en el temps? La resposta, que és sorprenentment senzilla, ve donada per

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H], \tag{2}$$

on $[f, H]$ és el *parèntesi de Poisson* definit per

$$[f, H] \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \tag{3}$$

Fixem-nos que si f no depèn explícitament del temps, llavors $\partial f/\partial t = 0$. En aquest cas si el parèntesi de Poisson també s'anul·la tindrem que $df/dt = 0$ i f és una *constant o integral del moviment*. Observem que aquest és el cas dels sistemes conservatius on l'hamiltonià no depèn explícitament del temps, amb la qual cosa $dH/dt = 0$ i H és una constant del moviment que relacionem amb l'energia.

Un segon avantatge de la formulació hamiltoniana és que permet definir d'una manera senzilla transformacions de variables que conserven la forma de les equacions de Hamilton. Així, diem que el canvi de variables, $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \to (\overline{\boldsymbol{p}}, \overline{\boldsymbol{q}})$, donat per les equacions $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{p}}, \overline{\boldsymbol{q}}, t)$ i $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}(\overline{\boldsymbol{p}}, \overline{\boldsymbol{q}}, t)$, és una *transformació canònica* si les quantitats infinitesimals $\overline{\boldsymbol{p}} \cdot d\overline{\boldsymbol{q}} \equiv \sum \overline{p}_i d\overline{q}_i$ i $\boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} \equiv \sum p_i dq_i$ difereixen només en la diferencial total d'una funció escalar S, és a dir,

$$\overline{\boldsymbol{p}} \cdot d\overline{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} = dS.$$

La funció S s'anomena *funció generatriu* de la transformació canònica. Es pot demostrar que, en aquestes noves variables, les equacions de Hamilton tenen la mateixa forma que la donada per l'equació (1), i. e., $\dot{\overline{\boldsymbol{q}}} = \partial \overline{H}/\partial \overline{\boldsymbol{p}}$, $\dot{\overline{\boldsymbol{p}}} = -\partial \overline{H}/\partial \overline{\boldsymbol{q}}$ on $\overline{H}(\overline{\boldsymbol{p}}, \overline{\boldsymbol{q}}, t)$ és l'hamiltonià transformat que, en funció de H, és

$$\overline{H}(\overline{\boldsymbol{p}}, \overline{\boldsymbol{q}}, t) = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) + \partial S/\partial t. \tag{4}$$

Hamiltonians integrables

Una de les qüestions més bàsiques i fonamentals de la mecànica és la integrabilitat d'un sistema mecànic. Aquí la integrabilitat no és entesa com la possibilitat d'integrar les equacions de Hamilton del moviment (les quals sota condicions molt generals, donades pel teorema de Cauchy, sempre es poden integrar, si més no numèricament), sinó que el concepte d'integrabilitat fa referència a l'existència d'integrals (constants) del moviment que són les responsables que les trajectòries fàsiques evolucionin de forma regular en regions ben definides de l'espai fàsic. La definició precisa d'aquest concepte és la següent: l'hamiltonià d'un sistema mecànic amb n graus de llibertat és *integrable* si hi ha n constants o integrals del moviment independents, $I_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ que estan en *involució*. Amb el terme involució volem dir que les quantitats I_i commuten entre elles, i. e.,

$$[I_i, I_j] = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n), \tag{5}$$

on $[I_i, I_j]$ és el parèntesi de Poisson definit a l'equació (3).

Malauradament l'existència d'n integrals del moviment en involució és l'excepció més que la norma. Poincaré ja va demostrar que la majoria de sistemes mecànics només tenen l'energia com a integral del moviment. Per tant, la majoria de sistemes mecànics amb més d'un grau de llibertat no són integrables. Així, per exemple, un sistema d'N cossos, no sotmès a forces exteriors al sistema, només té 6 integrals del moviment que siguin independents i en involució. Aquestes integrals són: els tres components de moment total, $\boldsymbol{P}$, el quadrat del moment angular relatiu, $|\boldsymbol{l}|^2$, la tercera component del moment angular relatiu, l_3 i l'energia total relativa. Quan $N = 2$ (*problema dels 2 cossos*) tenim $n = 2 \times 3 = 6$ graus de llibertat i el problema és integrable. En canvi quan $N = 3$ (*problema dels 3 cossos*) tenim $n = 3 \times 3 = 9$ graus de llibertat i només 6 constants del moviment independents i en involució. Per tant, el problema dels 3 cossos (pensem, per exemple, en el sistema Sol-Terra-Lluna) no és integrable.

Tornem als sistemes integrables i deixem els que no són integrables per a més endavant. L'existència de les n constants I_i implicarà que les trajectòries fàsiques del sistema no poden visitar qualsevol punt de l'espai fàsic $2n$ dimensional, sinó que es trobaran "confinades" a moure's a sobre d'una superfície M de dimensió n. Aquesta superfície ve definida per les n equacions algebraiques $I_i(\boldsymbol{p}, \mathbf{q}) = I_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ on les I_i són constants arbitràries. Anem a veure que la superfície M té la topologia d'un torus n-dimensional. En efecte, mitjançant les integrals del moviment i recordant la forma de les equacions de Hamilton, definim els camps de "velocitat"

$$\boldsymbol{v}_i \equiv \left(\frac{\partial I_i}{\partial \boldsymbol{p}}, -\frac{\partial I_i}{\partial \boldsymbol{q}} \right), \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{6}$$

Fixem-nos que si, per exemple, $I_1 = H$ llavors (6) defineix el flux hamiltonià de les trajectòries mecàniques del sistema, el qual, en virtut de l'existència d'n constants del moviment independents i en involució ha de ser totalment contingut sobre de la superfície M. De fet, hom pot demostrar que *tots els n camps $\boldsymbol{v}_i$ són linealment independents i tangents a M*. Hi ha un teorema de topologia (el teorema de Poincaré-Hopf, anomenat també, en clau d'humor, teorema de la "bola peluda") que ens diu que si en una superfície M acotada podem construir n camps vectorials tangents a M, llavors M té necessàriament la topologia d'un torus n-dimensional. Podem visualitzar fàcilment aquest resultat si comparem l'acte de pentinar un floc de cabells a sobre d'un torus bidimensional (on tots els cabells estaran a sobre de la superfície toroïdal) o a sobre d'una esfera bidimensional, en aquest últim cas un cabell sempre romandrà dret en el pol de l'esfera i, per tant, no és tangent a la superfície (vegeu la figura 1).

Aquests torus, anomenats també *torus invariants*, puix que vénen determinats donant valors als invariants integrals, són les superfícies on té lloc el moviment del sistema, és a dir, les superfícies a sobre de les quals es mouen les trajectòries fàsiques del sistema. En cadascun d'aquests torus invariants hi ha exactament n corbes tancades, $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$, topològicament independents,

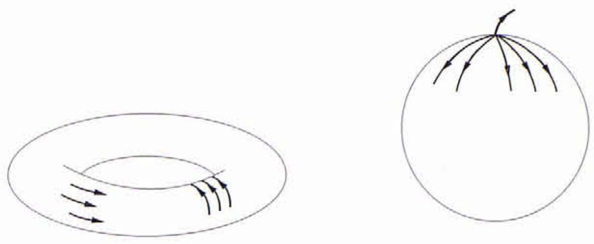

Figura 1: *(a) Camp de vectors "pentinat" regularment sobre un torus bidimensional. (b) Punt singular d'un camp de vectors sobre una esfera bidimensional*

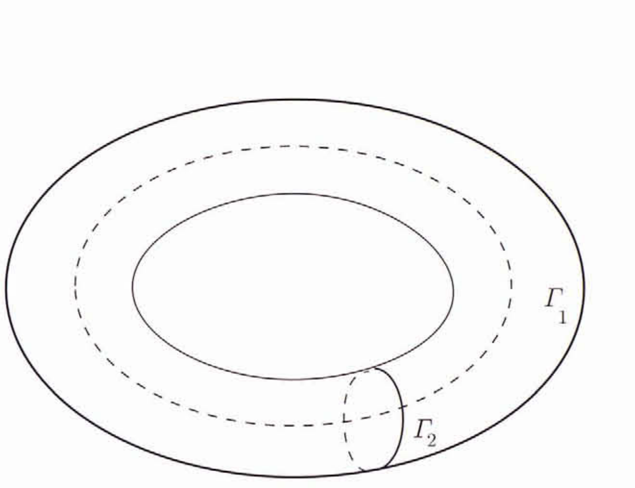

Figura 2: *La corba toroïdal Γ_1 i la corba poloïdal Γ_2 sobre un torus bidimensional*

és a dir, que no podem passar d'una corba Γ_i a una altra Γ_j mitjançant deformacions contínues. A la figura 2 podem veure un torus bidimensional on una d'aquestes corbes dóna la volta al torus pel camí més llarg (*corba toroïdal*), mentre l'altra ho fa pel camí més curt (*corba poloïdal*).

Mitjançant el conjunt de corbes tancades, $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$, definim les *variables acció* per les integrals curvilínies

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_i} \sum_{k=1}^{n} p_k dq_k, \tag{7}$$

on $p_k = p_k(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{q})$ són els moments escrits en funció de les coordenades $\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_n)$ i de les constants del moviment $\boldsymbol{I} = (I_1, \cdots, I_n)$. A causa del fet que en l'equació (7) integrem respecte de les coordenades generalitzades, les variables acció són només funció dels invariants integrals, $J_i = J_i(I_1, \cdots, I_n)$, i, per tant, les J_i són elles mateixes constants del moviment.

Fem ara una transformació canònica que ens porti

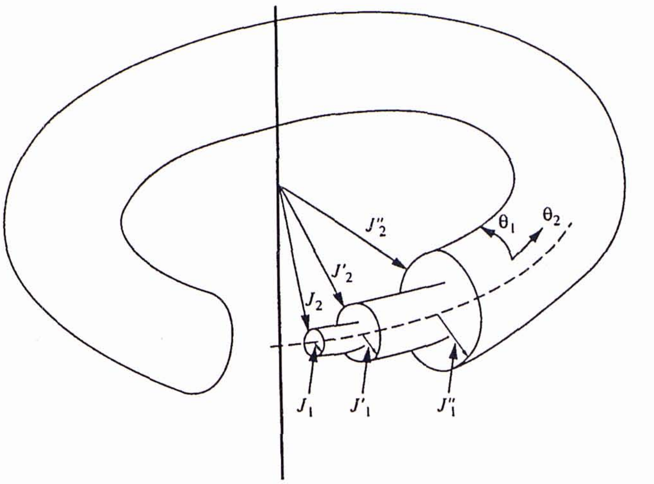

Figura 3: *La representació d'un torus invariant per un sistema amb 2 graus de llibertat*

de les variables originals $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ a unes noves variables $(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta})$, on les variables acció fan el paper de moments. La funció generatriu d'aquesta transformació ve donada per la integral indefinida

$$S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{J}) = \int \sum_k p_k(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{q}) dq_k.$$

Hom pot demostrar que en aquestes noves variables les coordenades, $\boldsymbol{\theta} = \partial S/\partial \boldsymbol{J}$ fan el paper d'angles, augmentant en 2π quan la trajectòria fàsica dóna una volta completa a la corba tancada Γ_i, mentre que els moments (i. e., les variables d'acció) són els radis dels torus invariants (vegeu la figura 3).

Les equacions de Hamilton en les variables acció-angle són: $d\boldsymbol{J}/dt = -\partial \overline{H}/\partial \boldsymbol{\theta}$, $d\boldsymbol{\theta}/dt = \partial \overline{H}/\partial \boldsymbol{J}$. Però $d\boldsymbol{J}/dt = 0$, car les J_i són constants del moviment. Per tant $\partial \overline{H}/\partial \boldsymbol{\theta} = 0$ i l'hamiltonià en les noves variables només és funció de l'acció, $\overline{H} = \overline{H}(\boldsymbol{J})$. Així doncs, $d\boldsymbol{\theta}/dt = \partial \overline{H}/\partial \boldsymbol{J} \equiv \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{J}) = \text{constant}$. En conseqüència la solució de les equacions del moviment ve donada per

$$J_i = \text{constant}, \qquad \theta_i(t) = \omega_i(\boldsymbol{J})t + \theta_i(0), \tag{8}$$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$. La solució de les equacions del moviment en les variables originals, $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, vindrà donada substituint (8) dins de les equacions de la transformació canònica que ens donen les variables originals en funció de les variables acció-angle.

Anem a veure que les constants ω_i són les freqüències del moviment multiperiòdic del sistema. En efecte, sabem que quan l'estat del sistema efectua una *libració* (nom que en astronomia es dóna a una oscil·lació completa) al llarg de la corba tancada Γ_i, la corresponent variable angle varia en 2π, és a dir, $\Delta\theta_i = 2\pi$. D'altra banda, si T_i és el període d'aquest moviment de libració, de l'equació (8) veiem que $\Delta\theta_i = \omega_i T_i$. Per tant, $T_i = 2\pi/\omega_i$ i les ω_i són les freqüències pròpies del moviment del sistema. Observem també que, en un torus donat, la trajectòria fàsica serà una corba tancada (és a dir, el moviment del sistema serà globalment periòdic) només si les freqüències del moviment són *commensurables*, el que vol dir és que hi ha una relació racional entre les ω_i. Si les freqüències són *incommensurables* la trajectòria omplirà densament el torus sense tancar-se mai. En el primer cas, es parla d'un torus racional (o torus ressonant) mentre que en el segon cas es parla d'un torus irracional (o torus no ressonant) (figura 4).

Un exemple clàssic d'hamiltonià integrable és el del *problema de Kepler*. Considerem el moviment relatiu d'una lluna de massa m orbitant a l'entorn d'un planeta de massa M. L'hamiltonià del sistema en coordenades polars, (r, ϕ), és

$$H_0 = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\phi^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}, \tag{9}$$

on (p_r, p_ϕ) és el moment relatiu dels dos cossos, $\mu = mM/(m+M)$ és la massa reduïda i $k = GmM$ (G és la constant gravitatòria). Tant l'energia H_0 com el moment angular del sistema $\boldsymbol{L}$ són constants del moviment i el pla on té lloc el moviment del sistema el podem agafar perpendicular a la direcció d'$\boldsymbol{L}$. Fem ara una transformació canònica de les variables originals (p_r, p_ϕ, r, ϕ) a les variables acció-angle $(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$. En aquestes noves coordenades l'hamiltonià és només funció de les variables d'acció,

$$H_0 = \frac{-\mu k^2}{2(J_1 + J_2)^2}. \tag{10}$$

Les equacions del moviment en les variables originals (p_r, p_ϕ, r, ϕ) són bastant complicades (òrbites el·líptiques). Però, en funció de les variables acció-angle, les equacions del moviment tenen una forma extremadament simple (vegeu l'equació (8))

$$J_i = \alpha_i, \qquad \theta_i(t) = \omega_i t + \beta_i, \qquad (i = 1, 2), \tag{11}$$

on α_i i β_i són constants que es determinen per les condicions inicials. El moviment del sistema, en l'espai fàsic, estarà sobre un torus bidimensional dins la superfície tridimensional d'energia constant. Aquest torus tindrà dos radis constants J_1 i J_2 (fixats per les condicions inicials) i dues variables angulars θ_1 i θ_2. Les òrbites del problema de Kepler evolucionaran sobre el torus d'acord amb l'equació (11). Observem que hi ha dues freqüències associades al moviment ω_1 i ω_2. Si aquestes freqüències són commensurables, és a dir, si $m_1\omega_1 = m_2\omega_2$, on m_1 i m_2 són nombres enters, llavors la trajectòria serà periòdica i l'òrbita fàsica és tancada. Si les freqüències són incommensurables (i. e., múltiples irracionals l'una de l'altra) la trajectòria no es repetirà i s'anirà movent sobre el torus fins a cobrir-lo totalment.

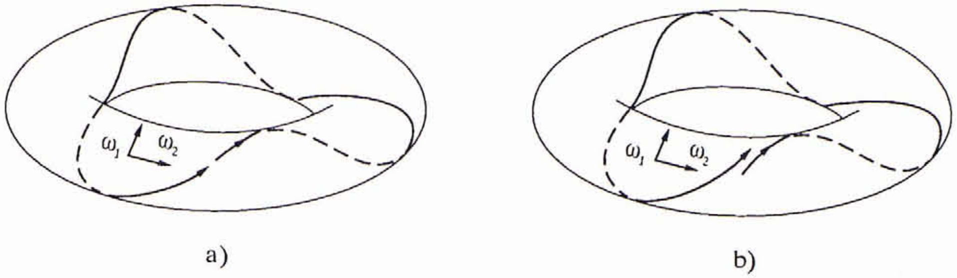

Figura 4: *Trajectòries fàsiques sobre un torus bidimensional. (a) Torus racional amb $\omega_1/\omega_2 = 3$, observem que la trajectòria fàsica es tanca després d'una volta en la direcció toroïdal i tres voltes en la direcció poloïdal. (b) Torus irracional on ω_1/ω_2 és un nombre irracional. La trajectòria fàsica no es tancarà mai i acabarà omplint tota la superfície del torus*

Per al cas del problema de Kepler les freqüències són (recordem que $\omega_i = \dot{\theta}_i = \partial H/\partial J_i$)

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{k}\sqrt{-\frac{2H_0^3}{\mu}},$$

que és la tercera llei de Kepler. Fixem-nos que les freqüències són commensurables i per tant la trajectòria fàsica és tancada, en altres paraules, el moviment és periòdic.

Hamiltonians no integrables. Seccions de Poincaré

Acabem de veure que l'existència d'n constants del moviment en involució és el que determina la integrabilitat, i per tant el moviment regular sobre els torus invariants, del sistema mecànic. Com ja hem esmentat, els sistemes conservatius amb un grau de llibertat sempre tenen una integral del moviment que és l'energia total. Per tant, aquests sistemes sempre seran integrables. La pregunta lògica a fer-se és: com podem saber si un sistema conservatiu amb més d'un grau de llibertat és integrable? Malauradament no hi ha una resposta simple i general a aquesta qüestió fonamental. En la immensa majoria de casos la integrabilitat es comprova (encara que *no es demostra*) de forma numèrica fent servir l'anomenada *secció de Poincaré*, que és una superfície bidimensional continguda en l'espai fàsic en la qual hom estudia les successives interseccions de la trajectòria fàsica (figura 5).

Explicarem una mica més aquest concepte. Suposem que tenim un sistema conservatiu amb dos graus de llibertat. La funció de Hamilton és una integral del moviment i podem escriure

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = E. \qquad (12)$$

Això restringeix les trajectòries fàsiques a moure's sobre una superfície tridimensional, anomenada *superfície d'energia constant*, ficada dins l'espai fàsic (que en

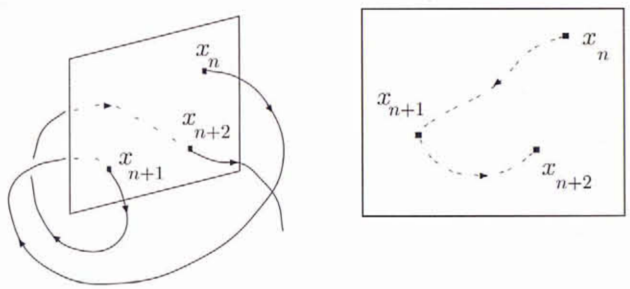

Figura 5: *Successives interseccions de la trajectòria fàsica en una secció de Poincaré, Σ_R*

aquest cas té dimensió $2 \times 2 = 4$). Si el sistema té una segona integral del moviment,

$$I(p_1, p_2, q_1, q_2) = \alpha, \qquad (13)$$

on α és una constant, llavors aquesta integral defineix una altra superfície tridimensional de l'espai fàsic. Una vegada estan donats els valor inicials de les coordenades i els moments, les constants E i α són també fixades i la trajectòria fàsica queda confinada a moure's dins de la intersecció de les dues superfícies $H = E$ i $I = \alpha$. Aquesta intersecció és una superfície de dimensió 2 dins l'espai fàsic de dimensió 4. En efecte, de les equacions (12)-(13) podem eliminar, per exemple, p_2 i escriure p_1 en funció de q_1 , q_2 i de les constants del moviment, és a dir,

$$p_1 = \phi(q_1, q_2; E, \alpha). \qquad (14)$$

Aquesta és l'equació d'una superfície de dues dimensions continguda dins la superfície tridimensional d'energia constant. Si ara considerem la secció $q_2 = 0$ de la superfície bidimensional (14) (això és un exemple de secció de Poincaré) veiem que les successives interseccions de

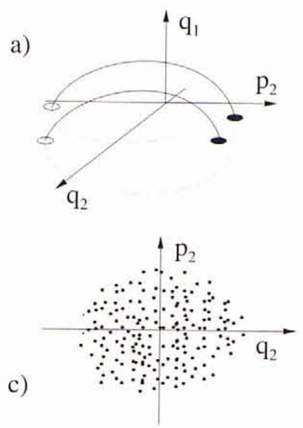

Figura 6: *Una secció de Poincaré d'un sistema amb dos graus de llibertat. (a) Podem obtenir una secció de Poincaré dibuixant un punt cada vegada que la trajectòria travessa, per exemple, el pla $q_1 = 0$. (b) Si tenim dues integrals del moviment en involució la trajectòria estarà sobre superfícies bidimensionals, les quals en fer el tall de la secció de Poincaré ens donaran punts distribuïts sobre una corba regular. (c) Si només hi ha una integral del moviment (l'energia), la trajectòria estarà dispersa en una regió d'extensió només limitada per la conservació de l'energia*

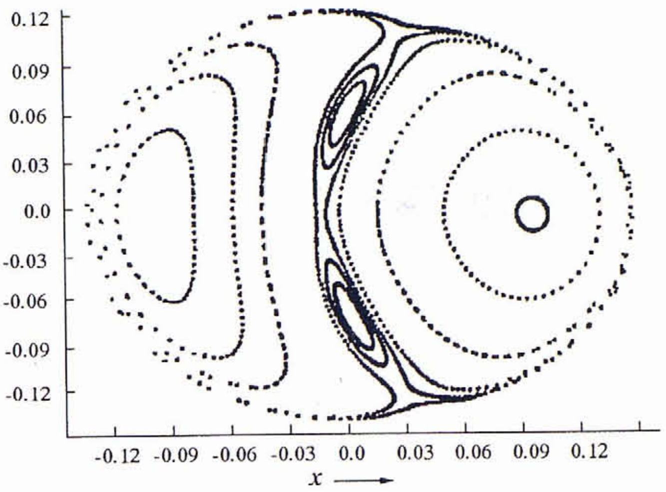

Figura 7: *Secció de Poincaré per l'hamiltonià de Henon-Heiles amb $E = 0,01$*

la trajectòria fàsica amb la secció de Poincaré, es troben sobre la corba $p_1 = \phi(q_1, 0; E, \alpha)$.

En general, per un hamiltonià conservatiu donat no se sap, però, si hi ha una segona integral del moviment. No obstant això, podem *intuir* si una tal integral existeix o no resolent numèricament les equacions de Hamilton i dibuixant p_1 i q_1 cada vegada que $q_2 = 0$ i $p_2 \geq 0$ (vegeu la figura 6). Si el sistema és integrable les interseccions de la trajectòria en la secció de Poincaré $q_2 = 0$, apareixeran com una sèrie de punts distribuïts de forma regular sobre la corba $p_1 = \phi(q_1, 0; E, \alpha)$ que dèiem en el paràgraf anterior. En canvi, si el sistema no és integrable les interseccions de la trajectòria fàsica apareixeran com una sèrie de punts amb una distribució "caòtica", en altres paraules, tindrem un conjunt de punts dispersos en una regió només limitada per la conservació de l'energia.

Aquest mètode va ser emprat per Henon i Heiles (1964) per determinar la possible existència d'una tercera integral del moviment que restringiria el moviment d'una estrella dintre d'una galàxia amb un eix de simetria. Aquest sistema té tres graus de llibertat i dues integrals del moviment conegudes, l'energia i la component del moment angular en la direcció de l'eix de simetria. Durant molt temps es creia que no existia una tercera integral del moviment a causa fonamentalment del fet que no se n'havia trobat cap analíticament. No obstant això, la no-existència d'una tercera integral del moviment implica que la dispersió de velocitats dels objectes estel·lars en la direcció del centre de la galàxia hauria de ser la mateixa que la dispersió perpendicular al centre galàctic, en canvi, la relació de dispersions és 2 : 1. Henon i Heiles construiren un hamiltonià, sense simetries conegudes que portessin a una tercera integral, que tenia en compte les característiques essencials del problema:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2 + 2q_1^2 q_2 - \frac{2}{3}q_2^3\right) = E,$$

i estudiaren numèricament el comportament de les equacions del moviment. Les equacions de Hamilton per aquest sistema són

$$\dot{p}_1 = -q_1 - 2q_1 q_2, \quad \dot{p}_2 = -q_2 - 2q_1^2 - 2q_2^2, \quad \dot{q}_i = p_i,$$

$(i = 1, 2)$. Fixem-nos en l'aparició de termes no lineals en aquestes equacions del moviment, els quals són deguts als termes anharmònics de l'energia potencial. Observem també que la magnitud d'aquests termes no lineals creix a la que augmenta l'energia. La representació de la intersecció de la trajectòria fàsica en la secció de Poincaré $q_2 = 0$ ve donada a les figures 7-8. Per baixes energies (figura 7) la distribució de punts és aparentment regular i això sembla indicar l'existència de la tercera integral, almenys dins de l'exactitud del gràfic (ampliacions posteriors mostraren que això no és així). A la que s'augmenta l'energia, cosa que, com ja hem esmentat, incrementa l'efecte dels termes no lineals, la tercera integral es destrueix, almenys parcialment, però encara queden "illes" on el moviment és regular (vegeu la figura 8). Per energies encara més elevades la hipotètica tercera integral és totalment destruïda. A més, hem d'esmentar que els punts de la secció de Poincaré pel sistema de Henon-Heiles corresponen a la intersecció

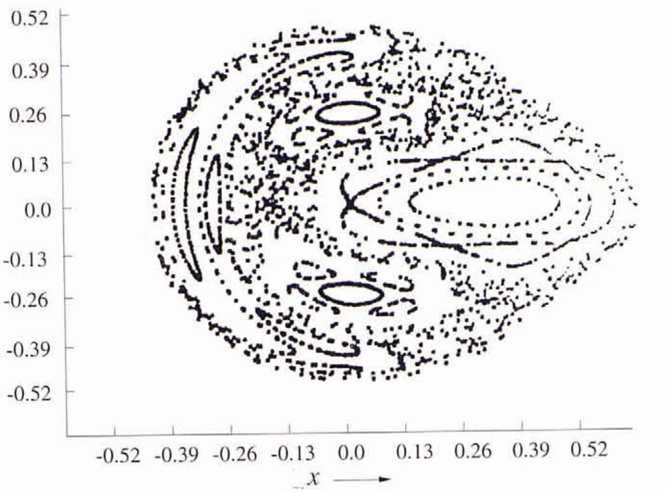

Figura 8: *Secció de Poincaré per l'hamiltonià de Henon-Heiles amb $E = 0,012$*

d'una sola trajectòria fàsica, la qual, òbviament, adjectivem de caòtica, en el sentit que té una "dependència extraordinàriament sensible a les condicions inicials" que fa que el moviment a temps llargs sigui pràcticament impredictible.

Teoria de pertorbacions canònica. Ressonàncies

Com ja hem comentat, la majoria de sistemes mecànics no són integrables i només tenen l'energia com a integral del moviment. En molts casos, però, l'hamiltonià no integrable difereix poc d'un hamiltonià integrable. En aquests casos, la tècnica emprada per trobar solucions aproximades a les equacions del moviment és l'anomenada teoria de pertorbacions canònica. Per centrar les idees recordem l'exemple del problema de Kepler i suposem que a més de la lluna de massa m orbitant a l'entorn del planeta de massa M hi ha un altre planeta que "pertorba" el moviment pla del sistema de dos cossos. Suposem que l'efecte d'aquesta pertorbació és petit, amb la qual cosa, l'hamiltonià del sistema pertorbat es pot escriure de la forma

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2), \tag{15}$$

on $\epsilon \ll 1$ és un paràmetre petit i H_0 és l'hamiltonià no pertorbat donat per l'equació (10). Com ja hem vist, el moviment no pertorbat es realitza a sobre d'un torus bidimensional donat pels radis $J_i =$ constant, $(i = 1, 2)$. Volem trobar ara les correccions al moviment no pertorbat degut a la presència del tercer planeta. Com que no podem resoldre de forma exacta les equacions del moviment, el que esperem és poder trobar una solució aproximada via desenvolupaments pertorbatius en ϵ. Observem primer que estem tractant amb un moviment que, encara que pertorbat, és periòdic. Per tant, podem desenvolupar la pertorbació en sèrie de Fourier de les variables angulars. Això ens permet escriure l'hamiltonià (15) de la forma

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} H^{(1)}_{m_1,m_2}(J_1, J_2) \cos(m_1\theta_1 + m_2\theta_2). \tag{16}$$

La idea bàsica de la teoria de pertorbacions canònica és trobar un nou conjunt de variables acció-angle, $(\overline{\boldsymbol{J}}, \overline{\boldsymbol{\theta}})$ pel sistema pertorbat, $H(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta})$, tal que hi ha una transformació canònica a un nou hamiltonià que és només funció de $\overline{\boldsymbol{J}}$, és a dir, $H(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) \to \overline{H}(\overline{\boldsymbol{J}})$. Si ho aconseguíssim, llavors l'hamiltonià (15) es convertiria en completament integrable i les seves equacions del moviment podrien integrar-se trivialment. Amb aquest objectiu com a guia, definim una funció generatriu, $S(\overline{J}_1, \overline{J}_2, \theta_1, \theta_2)$, mitjançant

$$S(\overline{J}_1, \overline{J}_2, \theta_1, \theta_2)H = \overline{J}_1\theta_1 + \overline{J}_2\theta_2 + \epsilon \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} S_{m_1,m_2}(\overline{J}_1, \overline{J}_2) \sin(m_1\theta_1 + m_2\theta_2). \tag{17}$$

Hom pot demostrar que si els coeficients de Fourier, $S_{m_1,m_2}(\overline{J}_1, \overline{J}_2)$, vénen donats per

$$S_{m_1,m_2}(\overline{J}_1, \overline{J}_2) = -\frac{H^{(1)}_{m_1,m_2}(\overline{J}_1, \overline{J}_2)}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}, \tag{18}$$

on $\omega_i = \omega_i((\overline{J}_1, \overline{J}_2) = \partial H_0/\partial \overline{J}_i$ són les freqüències del moviment no pertorbat, llavors a primer ordre amb ϵ, l'hamiltonià transformat, $\overline{H}$, és només funció de les noves variables acció:

$$\overline{H}(\overline{J}_1, \overline{J}_2, \overline{\theta_1}, \overline{\theta_2}) = H_0(\overline{J}_1, \overline{J}_2) + \epsilon\, H^{(1)}_{0,0}(\overline{J}_1, \overline{J}_2) + O(\epsilon^2), \tag{19}$$

on

$$H^{(1)}_{0,0}(\overline{J}_1, \overline{J}_2) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 H_1(\overline{J}_1, \overline{J}_2, \theta_1, \theta_2) \tag{20}$$

és la *mitjana de la pertorbació* respecte de les variables angulars originals. Fixem-nos que, sent l'hamiltonià transformat (18) només funció de les noves variables acció, és integrable (a primer ordre).

Finalment, la relació entre les variables acció originals J_i i les noves variables acció $\overline{J}_i$ ve donada per

$$J_i = \overline{J}_i - \epsilon \sum_{m_1,m_2\neq 0} \frac{m_i H^{(1)}_{m_1,m_2}(\overline{J}_1, \overline{J}_2)}{m_1\omega_1 + m_2\omega_2} \cos(m_1\theta_1 + m_2\theta_2). \tag{21}$$

A l'ordre més baix en ϵ aquesta és la solució al problema. Hem obtingut les noves variables acció $\overline{J}_i$ que contenen les correccions degudes a la pertorbació. A primer ordre amb ϵ les $\overline{J}_i$ són constants i les $\overline{\theta}_i$ són funcions lineals del temps.

En les expressions (18) i (21) hi ha, però, un problema potencialment molt seriós, ja que tant S_{m_1,m_2} com J divergeixen si $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = 0$, *que és la condició que les freqüències del sistema no pertorbat siguin commensurables*, és a dir, que el moviment no pertorbat es faci a sobre d'un torus racional (ressonant). Però el problema és encara més greu ja que fins i tot si les freqüències són incommensurables sempre hi haurà enters, m_1 i m_2 que faran que el denominador $m_1\omega_1+m_2\omega_2$ sigui tan petit com es vulgui, amb els problemes de convergència que això implica.[1]. Així doncs, tenim dues sèries la convergència de les quals és molt qüestionable. D'una banda tenim les sèries de Fourier que poden no convergir a causa de ressonàncies internes que condueixen al famós problema dels *denominadors petits*, i de l'altra banda, fora de les freqüències ressonants i també a causa de l'aparició de denominadors petits, tampoc és clar que la sèrie pertorbativa en ϵ convergeixi. De fet, Poincaré demostrà de *forma concloent* que totes aquestes sèries no donen una representació convergent del problema pertorbat. En conseqüència, qüestions tan fonamentals com l'estabilitat a temps llargs de les òrbites planetàries en el sistema solar no varen poder ser contestades d'una forma satisfactòria. Recordem la frase de Moser i tornem a preguntar-nos, és estable, el sistema solar?

El Teorema de KAM. Estabilitat i caos

Tots els intents, realitzats per alguns dels millors matemàtics i físics de l'època, no aconseguiren resoldre el problema dels denominadors petits. Poincaré va anomenar aquest problema com el "problema fonamental" de la mecànica clàssica, i va semblar que era un obstacle impossible de superar. Això suposà, al voltant de començament d'aquest segle, l'abandonament de la recerca en aquesta direcció i l'arxivament de les qüestions d'estabilitat planetària a llarg termini. A més, l'aparició de la teoria de la relativitat i la mecànica quàntica concentraren pràcticament tots els esforços del físics en l'obtenció de nous resultats més gratificants i, en molts casos, relativament més fàcils d'aconseguir.

El pas decisiu no es va fer fins l'any 1954, quan Kolmogorov trobà una manera de construir una teoria de pertorbacions que convergia ràpidament i era aplicable als torus no ressonants. Les noves idees de Kolmogorov varen ser demostrades de forma rigorosa per Arnold i Moser al començament dels anys seixanta. El resultat de tot això és conegut com el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM). Seguint la notació d'Arnold, suposem que un hamiltonià integrable H_0 és pertorbat per una funció H_1 tal que

$$H = H_0(\boldsymbol{J}) + \epsilon H_1(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta}), \qquad (\epsilon \ll 1), \tag{22}$$

on H_1 se suposa periòdic en les variables angulars originals, és a dir, $H_1(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta}+2\pi) = H_1(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta})$. Les equacions de Hamilton són

$$\dot{J}_i = -\epsilon\frac{\partial H_1}{\partial \theta_i}, \quad \dot{\theta}_i = \omega_i(\boldsymbol{J}) + \epsilon\frac{\partial H_1}{\partial J_i}, \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{23}$$

on $\omega_i = \partial H_0/\partial J_i$ són les freqüències del moviment no pertorbat. L'esbós de demostració de Kolmogorov afirma que, per la majoria de condicions inicials, el moviment generat per l'hamiltonià (22) és bàsicament quasi periòdic (és a dir, regular). Mentre que el complementari del moviment quasi periòdic (és a dir, el moviment caòtic) té una mesura de Lebesgue petita si ϵ és petit.[2]. Amb vista a precisar una mica més l'enunciat del teorema KAM se suposa que H és una funció analítica i que el moviment no pertorbat és no degenerat, això últim implica que el hessià de H_0 és diferent de zero:

$$\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_j}\right| \neq 0. \tag{24}$$

El pas següent és identificar, en el sistema no pertorbat, un torus particular, $T_0(\boldsymbol{\omega}^*)$, definit mitjançant un conjunt de freqüències, $\boldsymbol{\omega}^* = (\omega_1^*,\cdots,\omega_n^*)$, incommensurables (i. e., $m_1\omega_1^*+\cdots+m_n\omega_n^* \neq 0$ per tots els enters $m_i \neq 0$). Llavors el teorema de KAM el podem enunciar així:

Si ϵH_1 és suficientment petit, llavors per quasi totes les freqüències no ressonants, $\boldsymbol{\omega}^*$, hi ha un torus invariant $T(\boldsymbol{\omega}^*)$ del sistema pertorbat tal que $T(\boldsymbol{\omega}^*)$ és "proper" a $T_0(\boldsymbol{\omega}^*)$.

A més, la mesura dels punts de l'espai fàsic que no estan sobre cap torus $T(\boldsymbol{\omega}^*)$ tendeix a zero per $\epsilon \to 0$. Observem que això últim implica que la probabilitat d'escollir unes dades inicials a l'atzar, que ens portin al fet que el moviment del sistema no es realitzi sobre cap torus $T(\boldsymbol{\omega}^*)$, és petita si ϵ és petit.

Així, veiem que sota les condicions del teorema les petites pertorbacions (el que no diu el teorema és quant de petites) no destrueixen els torus invariants T_0 sinó que només els deformen lleugerament. Sobre aquests

[1] És evident que el producte $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ que apareix en els denominadors de les sèries pertorbatives pot ser arbitràriament petit per m_1 i m_2 cobrint tots els nombres enters (a excepció del 0). Així, per exemple, Júpiter i Saturn en el seu moviment a l'entorn del Sol recorren, respectivament, 299 i 120,5 segons d'arc en un dia, per tant, el denominador $5\omega_S - 2\omega_J$ és molt petit en comparació de cadascuna de les freqüències.

[2] Kolmogorov suggerí l'existència d'un conjunt de freqüències de mesura no nul·la (de fet, la mesura d'aquest conjunt tendeix a 1 quan $\epsilon \to 0$) on les sèries pertorbatives convergeixen. Això és bàsicament degut al fet que és efectivament possible aconseguir, per tots els enters $m_1,\cdots,m_n$, una cota inferior als nombres $\nu_1 m_1 + \cdots + \nu_n m_n$ (cosa que demostra la teoria d'aproximacions diofàntiques).

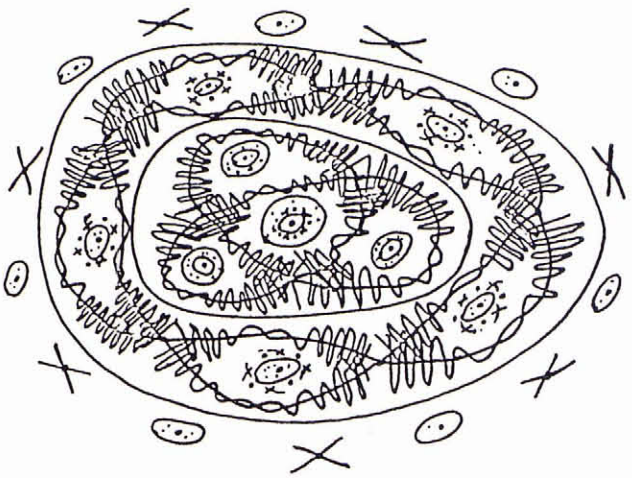

Figura 9: *Representació "artística" de la secció de Poincaré d'un hamiltonià pertorbat*

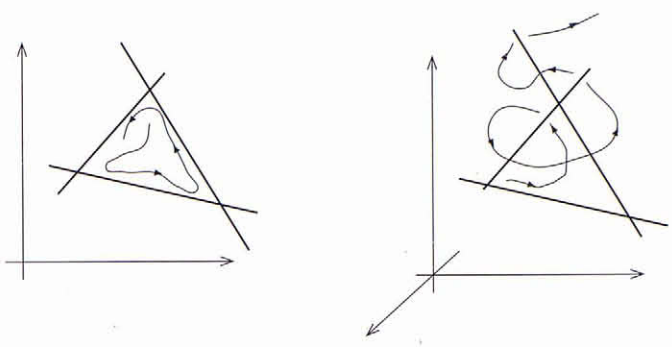

Figura 10: *Les trajectòries fàsiques es troben confinades dins línies (superfícies KAM) en dues dimensions, però no en tres dimensions (difusió d'Arnold)*

torus deformats, anomenats *superfícies KAM*, el moviment és regular i no caòtic.

Però, què succeeix amb els torus ressonants?, és a dir, quin és el destí, quan s'afegeix un pertorbació, dels torus definits per una relació racional de freqüències? Es pot demostrar que l'efecte de les ressonàncies destrueix completament els torus invariants ressonants i les òrbites fàsiques, les quals sense la pertorbació executen trajectòries tancades i, per tant, periòdiques a sobre dels torus ressonants, esdevenen completament caòtiques i inestables, i donen com a resultat una estructura autosemblant o fractal molt complexa. Afortunadament, com demostra el teorema de KAM, el conjunt de tots els torus ressonants on el moviment regular és destruït té una mesura molt petita si la pertorbació és petita. Així, el fet que els torus només deformats tinguin una mesura propera a 1 quan ϵ és petit voldrà dir que *la majoria de torus invariants no queden destruïts per pertorbacions petites*, cosa que fa que les superfícies KAM omplin quasi tot l'espai i que entremig d'aquestes superfícies apareguin "illes" racionals amb moviment caòtic. Això dona una secció de Poincaré extraordinàriament complexa que alguns autors dibuixen d'una forma diguem que "artística", més que no real, com la que presentem a la figura 9.

Esmentem finalment que amb vista a estudiar el moviment caòtic d'un sistema pertorbat a l'exterior de les superfícies KAM s'ha de diferenciar el cas de dos graus de llibertat del cas de tres o més graus de llibertat. Per sistemes amb dos graus de llibertat la dimensió de l'espai fàsic és 4 i la superfície d'energia constant té dimensió 3, per tant, les superfícies KAM, que tenen dimensió 2, separen la superfície tridimensional d'energia constant en una regió interior i una regió exterior. En aquest cas el moviment, per caòtic que sigui, *no pot passar d'una regió a l'altra.* Així, una òrbita fàsica que comença dins d'una regió compresa entre dues superfícies KAM, roman per sempre dins de la regió. Per complicat que sigui el seu moviment, l'òrbita no deixa mai la regió i les variables acció romanen prop dels seus valors inicials. En aquest cas podem parlar de "caos controlat" (també anomenat *soft chaos*) car hi ha una certa estabilitat del moviment, ja que les superfícies KAM són molt properes l'una de l'altra. Si, en canvi, el nombre de graus de llibertat n és més gran de 2, llavors les superfícies KAM, de dimensió n, no separen la superfície $2n-1$ dimensional d'energia constant en un "interior" i un "exterior". En conseqüència, les òrbites caòtiques entre dues superfícies KAM es poden difondre per tota la superfície d'energia constant, i *l'existència de superfícies KAM no és cap garantia d'estabilitat del moviment* ja que dues trajectòries inicialment molt properes poden ser molt distants al cap d'un temps finit (vegeu la figura 10). Aquest fenomen, que sembla existir per pertorbacions arbitràriament petites i que, repetim, només apareix en sistemes de més de dos graus de llibertat, és conegut amb el nom de *difusió d'Arnold.* Fins avui no se sap exactament quina és la velocitat mitjana de desplaçament, $|\Delta \boldsymbol{J}/\Delta t|$, de l'anomenada "teranyina d'Arnold", que és el nom que reben les de les trajectòries caòtiques que es difonen en l'espai fàsic. No obstant això, els models teòrics i els estudis numèrics que s'han realitzat per determinar $|\Delta \boldsymbol{J}/\Delta t|$ indiquen que, afortunadament, aquest moviment difusiu és molt lent. Així, certs models teòrics prediuen que $|\boldsymbol{J}(t)-\boldsymbol{J}(0)| < \epsilon^{1/2}$ per $t < \epsilon^{-1}\exp(\epsilon^{-1/2})$, és a dir que, per ϵ petit, $J(t)$ roman prop de $J(0)$ durant temps molt llargs ($\sim \exp(\epsilon^{-1/2})$). En altres paraules, la velocitat mitjana de desplaçament és d'ordre

$$\left|\frac{\Delta \boldsymbol{J}}{\Delta t}\right| \sim e^{-1/\sqrt{\epsilon}},$$

i, per tant, pot ser exponencialment petita i pràcticament indetectable quan $\epsilon \ll 1$.

Ja per acabar i retornant al tema de l'estabilitat a temps llarg del sistema solar, comentem que el moviment caòtic sembla ser el responsable en la formació dels anomenats *Kirkwood gaps* (que són zones buides que es troben en el cinturó d'asteroides situat entre Mart i Júpiter) i també de la formació de zones buides que hom observa en els anells de Saturn. La localització d'aquests *gaps* es troba molt propera a les superfícies ressonants de Júpiter i els asteroides en un cas i dels anells i els planetes interiors de Saturn en l'altre cas (el que estaria d'acord amb la teoria KAM de destrucció dels torus ressonants). També s'ha suggerit que el mecanisme de la difusió d'Arnold seria suficient per assegurar la buidor d'aquestes zones durant el temps que ha transcorregut des de la formació del sistema solar.

Referències

ARNOLD, V., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlín (1979).
LICHTENBERG, A. i LIEBERMAN, M., *Regular and Chaotic Dynamics*, 2a ed., Springer-Verlag, Berlín (1992).
POINCARÉ, H., *Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste*, Gauthier-Villars, París (1892).
STEWART, I., *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*, Penguin Books, Ltd., Harmondsworth (1989). Hi ha traducció al castellà: *Juega Dios a los Dados?*, Editorial Crítica, Barcelona (1991).
TABOR, M., *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, J. Wiley, New York (1989).

Tot i que en començar a publicar la *Revista de Física* teníem molt clara la importància de mantenir la regularitat que ens marquéssim nosaltres mateixos —dos números l'any ens va semblar realista per als mitjans de què disposàvem— a ningú del Comitè de Redacció se li va acudir que, amb el pas dels anys arribaríem al número 10, el proper. Aquells qui ens hagin seguit des del començament tindran ara al voltant de 600 pàgines de *Revista*.
Una bona manera d'evitar que aquesta petita col·lecció es deteriori és relligar-la. Per això, amb el número 10 traurem unes cobertes de cartró i un índex. El preu que ens costa és de 500 pts. cada joc de cobertes. Així, a menys que algú ens digui explícitament el contrari i que no vol les cobertes, us carregarem aquest cost a la subscripció de 1996.

El Comitè de Redacció