

Plaques zonals. Més de 100 anys d'història

Eduard Carcolé *

Departament de Física Aplicada i Electrònica. Universitat de Barcelona

Introducció

L'any 1875, J.L. Soret descriu per primera vegada un element difractiu pla capaç de focalitzar llum: les plaques zonals (en anglès *zone plates*). D'aleshores ençà aquests elements han estat objecte d'un estudi exhaustiu, tant teòric com experimental, a causa de la possibilitat de fer-los servir com a lents a tot l'espectre electromagnètic. Les lents de vidre, a les quals tots estem habituats, només són útils en una regió molt estreta de l'espectre, que comprèn part de l'infraroig fins als raigs ultraviolats (UV) de molt baixa energia. El vidre absorbeix la major part de l'UV, cosa que el fa apte com a receptacle dels fluorescents o de les bombetes de mercuri que es fan servir per il·luminar els parcs públics i els carrers. En canvi, a la bibliografia es poden trobar aplicacions de les plaques zonals que van des de les microones fins als raigs γ .

El principi d'Huygens-Fresnel

La descripció teòrica de les plaques zonals (Hecht, 1988) és molt simple i es fa a partir d'uns dels principis fonamentals de l'òptica, el principi d'Huygens-Fresnel. Aquest principi afirma que qualsevol punt d'un front d'ones es comporta com un focus puntual emissor d'ones. Per poder utilitzar el principi de forma adequada ens preocuparem primer de descriure matemàticament una ona. Tots hem estudiat alguna vegada una oscil·lació harmònica simple propagant-se i l'escrivim de la manera següent:

$$A = A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$$

on $k = 2\pi/\lambda$, λ és la longitud d'ona, ω és la freqüència angular de l'oscil·lació i φ_0 és una fase inicial. Els físics però no fem servir mai aquesta notació; preferim treballar amb nombres complexos perquè els càlculs es tornen més senzills. Així doncs un físic escriu:

$$A = \text{Re}\{A_0 \exp[i(kx - \omega t + \varphi_0)]\}.$$

Re significa part real, però com que sempre ho hauríem d'escriure, ja no ho farem més. Ara volem anar una mica més lluny, volem descriure una ona que surt d'un focus puntual situat en algun punt de l'espai. Aleshores els

fronts d'ona seran esferes de radi r . Com que l'energia de l'ona es reparteix sobre la superfície del front d'ona ($4\pi r^2$) i l'energia que transporta una ona és proporcional al quadrat de la seva amplitud, A_0 haurà de ser inversament proporcional a r . Per tant, una ona esfèrica l'escriurem:

$$\Psi = (\Psi_0/r) \exp[i(kr + \varphi_0)]$$

on $r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$ i (x_0, y_0, z_0) són les coordenades del focus emissor. El terme en ωt ja no el posem perquè l'hauríem d'arrossegar contínuament i a més no té cap efecte en la nostra formulació. En el nostre cas considerarem z com a eix òptic del sistema tal com veiem a la figura 1. Normalment treballarem en zones suficientment properes a l'eix òptic com per poder considerar la coordenada z com a terme dominant a l'expressió de r . Podem aleshores fer un desenvolupament en sèrie de Taylor de l'arrel quadrada per escriure la nostra ona esfèrica d'una manera una mica més senzilla:

$$\Psi = \frac{\Psi'_0}{z - z_0} \exp\left[\frac{ik}{2(z - z_0)} ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\right]$$

on Ψ'_0 inclou el terme $\exp(ik(z - z_0))$ que com veurem tampoc té cap importància en el nostre desenvolupament. Aquesta aproximació es fa sempre que s'estudien sistemes òptics (siguin lents o plaques zonals) i rep un nom especial: aproximació paraxial o de Fresnel.

Imaginem aleshores el cas senzill d'un front d'ona pla que il·lumina un objecte transparent. Fent ús del principi d'Huygens-Fresnel, podem calcular fàcilment quina és la contribució de cada punt de l'objecte per a un punt de l'eix òptic, situat a una distància $z = a$ (prenem l'origen de z en l'objecte per simplificar les fórmules). Cada punt de l'objecte (x, y) col·labora amb una ona esfèrica que es pot escriure com:

$$\Psi = A_0(\rho) \exp\left(\frac{ik}{2a}\rho^2\right)$$

on $\rho^2 = x^2 + y^2$ i $A_0(\rho)$ és una funció que descriu com es modifica el front d'ona en travessar l'objecte. En particular, val 1 si l'objecte en aquest punt és transparent o 0 si és opac. En general, però, el medi introduirà un cert desfasament en l'ona incident; això es traduirà en el

*Eduard Carcolé és estudiant de 3er cicle del Laboratori d'Òptica. Departament de Física Aplicada i Electrònica

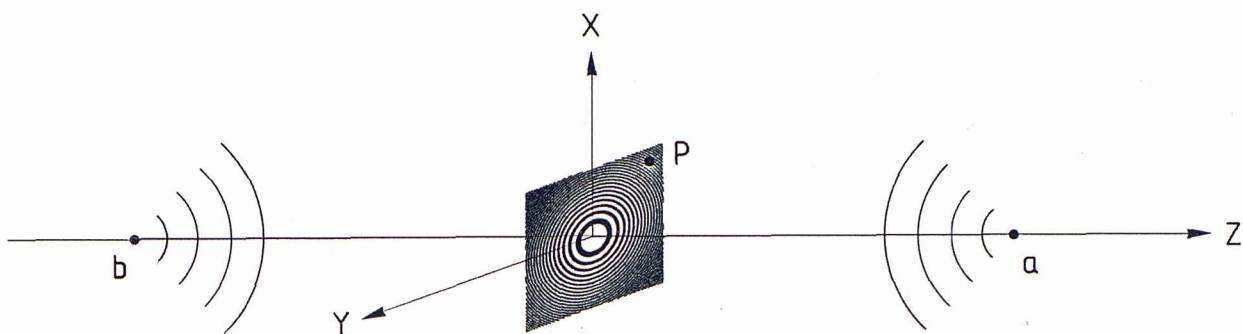


Figura 1: Disposició del sistema òptic

fet que $A(\rho)$ serà un nombre complex que tindrà com a argument el desfasament de l'ona en travessar el medi. A la fórmula anterior hem suprimit definitivament els termes constants. Si en lloc d'un front d'ones pla hi arriba una ona esfèrica provinent d'un punt a distància b sobre l'eix òptic, cada punt P de l'objecte emet també una ona esfèrica però amb la mateixa fase inicial que l'ona que illumina el punt P provinent de b (de fet hi ha un corriment constant de fase que és igual per a tots els punts, i per això mateix no el tindrem en compte). Aleshores escrivim per a aquest cas més general:

$$\Psi = A_0(\rho) \exp\left(\frac{ik}{2b}\rho^2 + \frac{ik}{2a}\rho^2\right) = A_0(\rho) \exp\left(\frac{ik}{2f}\rho^2\right)$$

on $f^{-1} = 1/a + 1/b$ és la focal de la placa zonal.

La contribució total s'obté sumant la contribució de cada punt. Fixem-nos que el punt $\rho = 0$ hi contribueix amb un fasor de fase zero (un fasor és un nombre complex representat mitjançant una fletxa, un vector, de mòdul el del nombre complex i inclinada un angle igual a la fase del nombre complex). De fet els punts compresos entre $0 < \rho^2 < f/\lambda$ hi contribueixen amb fasors que varien la seva fase entre 0 i π . Per trobar la contribució total els posem un rere l'altre per acabar obtenint el fasor suma tal com veiem a la figura 2. Si continuem sumant els fasors compresos entre $f/\lambda < \rho^2 < 2f/\lambda$ fixem-nos que el fasor suma resultant serà cada vegada més petit fins que entrem en una nova zona en què els fasors tornin a estar amb fases entre 0 i π . Aquestes zones corresponen a $2\pi n < \rho^2 < (2n + 1)\pi$ per a $n = 0, 1, 2, 3 \dots$. La idea clau aleshores és tancar les zones que contribuirien a fer més petit el fasor suma i deixar transparents la resta, o sia, que $A_0(\rho)$ sigui 0 quan els fasors estan entre π i 2π , i 1 quan estan entre 0 i π . Si fem això fixem-nos que la contribució que obtenim pot ser molt més gran que la que tindríem si l'objecte fos un simple forat. Ja tenim doncs una lent plana i la podem observar a la figura 3. Els lectors poden posar a prova tot el que hem dit fotografiant la

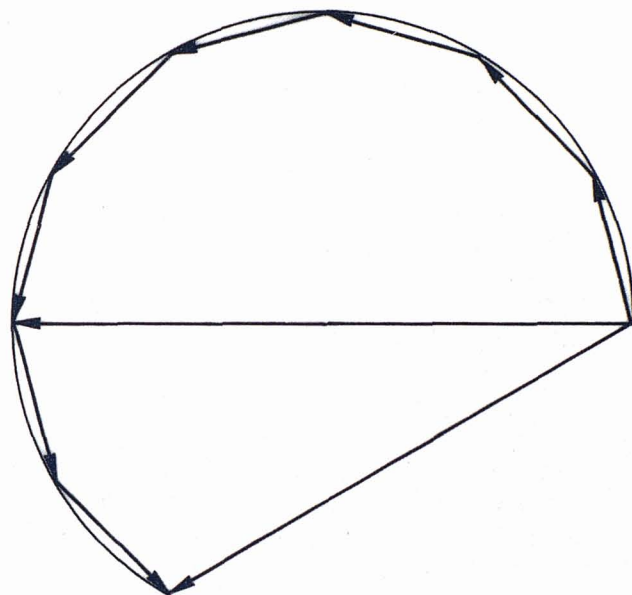


Figura 2: Suma de fasors de les contribucions de cada punt de la placa

figura de les plaques zonals i utilitzant el negatiu com a lent. Per saber-ne la focal basta saber que la dimensió del primer radi blanc o negre ve donada en el nostre cas per $\rho_1^2 = 2f/\lambda$ (fixeu-vos en la dependència amb la longitud d'ona). Mesurant sobre el negatiu el primer radi podeu deduir-ne la focal. Proveu aleshores d'obtenir la imatge del fil d'una bombeta en una habitació fosca o la imatge del sol sobre una paret. Fixem-nos que hi ha una petita arbitrarietat en el procés de construcció de les plaques zonals: també podríem haver deixat transparents les zones que hi contribueixen amb fasors que tenen fases compreses entre α i $\alpha + \pi$ i tancar les zones en què la fase varia entre $\alpha + \pi$ i $\alpha + 2\pi$, on α és un angle qualsevol. En fer això canviarà la fase del fasor suma total i el primer radi tindrà una longitud $\rho_1^2 = \alpha\lambda f/\pi$. No hi haurà cap més efecte.

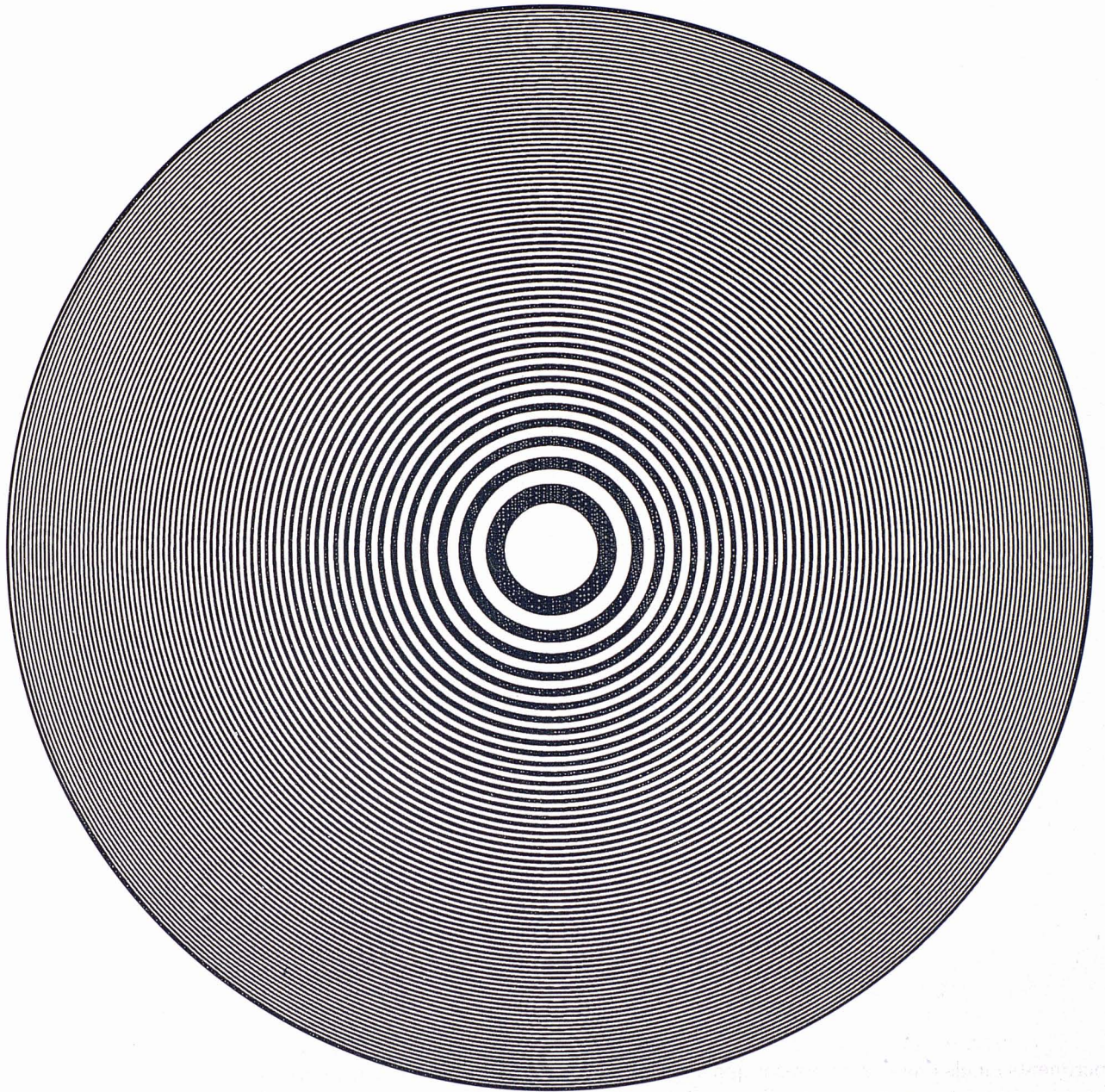


Figura 3: *Placa zonal*

Eficiència de les plaques zonals

Fent un estudi teòric de les plaques zonals, s'obté que focalitzen una fracció donada per $1/\pi^2$ de la potència de la llum incident. A més, una altra quarta part de la potència incident crea un fons continu en el pla imatge. Això fa que normalment no es facin servir quan es treballa en l'espectre visible, però són insubstituïbles en altres rangs de freqüències, com en els raigs X o en l'UV. L'eficiència, però, de les plaques zonals augmenta considerablement si aconseguim d'alguna manera que $A_0(\rho) = -1$ (això és el mateix que introduir un desfasament en π) en les zones que en principi deixem com a fosques ($A_0(\rho) = 0$). D'aquesta manera aconseguim que aquestes zones també col·laborin amb fasors que van de 0 a π , i podem deixar que hi passi llum. Aleshores, tots els punts de les plaques zonals contribueixen a focalitzar la llum, l'eficiència és molt més elevada i eliminem la quarta part de llum que creava un fons continu. Aquest desfasament en π es pot aconseguir posant-hi una làmina d'un material adient (que dependrà de la zona de l'espectre en què ens trobem) amb el gruix adequat perquè la llum surti desfasada en π respecte a la llum que passa per les zones transparents. Vegem-ne algun exemple interessant.

Focalitzant matèria

Un resultat fonamental de la mecànica quàntica és que la matèria té naturalesa ondulatòria quant al seu moviment a l'espai. Tots els cossos tenen associada una longitud d'ona donada per la fórmula de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

on h és la constant de Planck i p és el moment. Aquesta fórmula és completament general i serveix tant per a la llum ($E = pc$) com per a un cos qualsevol

$$p = mv/\sqrt{1 - (v/c)^2}$$

(fórmula relativista). Aquesta equació implica que un cos de massa m es mou a l'espai de la mateixa manera que ho faria la llum que tinguiés la mateixa longitud d'ona.

A la bibliografia es pot trobar la descripció d'experiments en els quals es comprova una vegada més aquest fet utilitzant plaques zonals. En un d'ells es relata la focalització de neutrons mitjançant una lent de focal 2,5 m, 2 mm de diàmetre, que conté 200 anells de Cu d'un gruix específic 2,4 μm (els neutrons travessen el Cu) per aconseguir un desfasament en π de l'ona associada als neutrons $\lambda = 20 \text{ \AA}$. En aquesta experiència van aconseguir focalitzar els neutrons en un pic d'amplada de 75 μm . (Kearney, 1980).

En una altra experiència, aquesta vegada duta a terme amb àtoms, es focalitzava heli amb una $\lambda =$

1,96 Å . La placa zonal era comercial, tenia 210 μm de diàmetre, 128 zones de transmitància 1 i 0 fetes amb Au de gruix 0,5 μm . Per a aquests àtoms d'heli la focal era de $f = 0,45 \text{ m}$ i focalitzaven en un pic de 0,4 μm d'amplada. (Carnal, 1991).

Plaques zonals de baixa resolució

Un dels temes de màxima actualitat dins dels camps d'investigació de l'òptica aplicada és utilitzar pantalles de cristall líquid com a dispositius per codificar lents. Tots hem vist alguna vegada una pantalla de cristall líquid, en calculadores, o en les pantalles de televisió en miniatura. Moltes d'aquestes pantalles estan formades per petits quadrats (píxels), un al costat de l'altre (però separats una certa distància) per formar una matriu d'uns 300×300 quadrats aproximadament. Cada quadrat té una transmitància controlable mitjançant un potencial elèctric. D'aquesta manera es pot introduir un desfasament en la llum que el travessa directament controlable mitjançant el potencial aplicat. Aquest potencial es controla mitjançant dispositius electrònics que permeten canviar la fase en qüestió unes 500 vegades per segon. Això fa que un sistema d'aquest tipus pugui arribar a ser molt útil en sistemes òptics on és necessari introduir lents mòbils (com per exemple una càmera fotogràfica, o un sistema de zoom); la idea és substituir els elements mòbils per aquests dispositius, en els quals es podrien codificar lents de baixa resolució i es podria canviar la focal molt ràpidament sense necessitat de moure res, i el sistema guanyaria en precisió i velocitat de resposta. Avui dia però aquestes pantalles de cristall líquid encara estan formades per píxels massa grans que fan que les focals que es puguin codificar siguin de l'ordre d'1,5 m. Al laboratori, hem investigat d'una banda la descripció matemàtica dels fenòmens que involucra la codificació en baixa resolució i de l'altra hem establert un model matemàtic adequat que permet calcular la distribució de llum a la focal d'aquestes lents, cosa que permetrà determinar els possibles usos d'aquesta mena de dispositius segons les seves característiques (Carcolé, 1993). Tot seguit comentarem una mica alguns resultats d'aquestes investigacions.

Efectes de la baixa resolució en la codificació

Suposem una pantalla ideal formada per $N \times M$ punts (per exemple 480×480) on es codifiquen plaques zonals. La distància entre píxels l'anomenarem Δx i Δy (poden ser diferents en cada direcció); com a exemple podem posar $\Delta x = \Delta y = 0,081 \text{ mm}$ i codifiquem una placa zonal de focal $f = 1 \text{ m}$ per la longitud d'ona que proporciona el làser de He-Ne $\lambda = 632,8 \text{ nm}$. Per codificar entenem assignar a cada píxel una transmitància (0 o 1) o bé (-1 o 1) (de fet actualment es comença a poder codificar més fases) segons que el centre del píxel estigui localitzat en una zona transparent o en una zona fosca. Fixem-nos que aquest procés comporta dis-

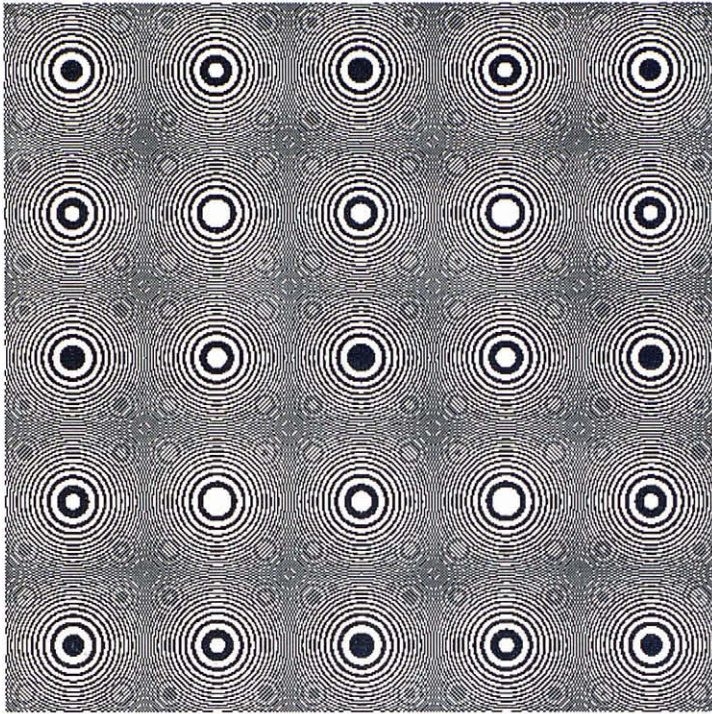


Figura 4: Placa zonal discretitzada

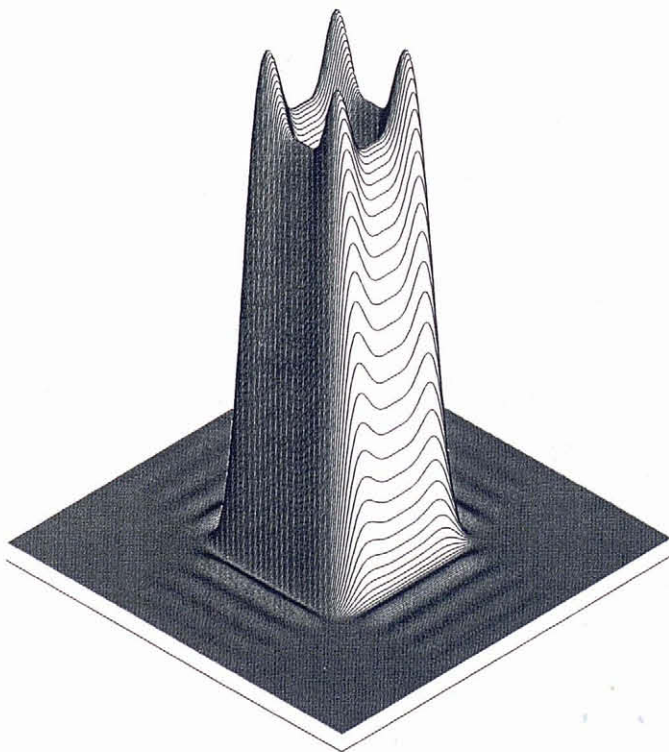


Figura 5: Intensitat de llum al voltant de l'eix òptic, resultat de la concentració de llum deguda a la lent de la figura 4

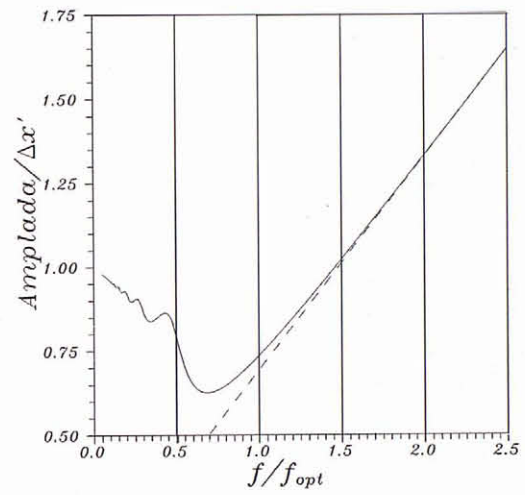


Figura 6: Amplada dels pics segons la distància focal. La línia discontinua correspon al cas d'infinita resolució

cretitzar la placa zonal, és a dir considerar-ne només la transmitància en uns determinats punts. Si representem gràficament la placa zonal resultant obtenim el que es veu a la figura 4. En lloc d'una lent, ens en surten 25, totes amb la mateixa focal. Cal remarcar que només estàvem codificant-ne una. El fenomen té l'origen en el fet que els píxels més allunyats del centre ocupen una àrea que comprèn diverses zones clares i fosques; com es pot veure a la figura 3 els anells de la placa zonal es fan cada vegada més estrets i cada vegada estan més apretats. La descripció matemàtica exacta d'aquest fenomen ve donada per la següent sorprenent igualtat:

$$\Psi(x, y)_{discr} = \exp(i\varphi_1)\Psi(x - kX, y - lY)_{discr}$$

on $\Psi(x, y)$ és la funció sobre la qual hem construït abans la placa zonal, k i l són nombres senzers qualssevol, $X = \lambda f / \Delta x$ i $Y = \lambda f / \Delta y$ i φ_1 és una fase que depèn de tots els paràmetres, inclosos k i l . Aquesta igualtat implica, entre altres coses, que la distància entre els centres de les plaques zonals que es veuen a la figura ve donada per X i Y . Fixem-nos al fet que, a la figura, la longitud del primer radi canvia segons la lent; això és degut en aquest cas al fet que cada placa focalitza amb una fase diferent, la fase φ_1 , en cada focus. Aquí tenim doncs definides les principals limitacions de les lents de baixa resolució, i és que si codifiquem focals curtes les lents s'automultipliquen, donen lloc a un nombre molt gran de focus, tots sobre el mateix pla, i es limita per tant la grandària de les imatges que es poden formar (si intentem formar imatges massa grans se sobreposaran les de cada lent). Per tant si volem codificar una única lent haurem de codificar focals que verifiquin: $f \sim L\Delta x / \lambda$ on L és la longitud lateral de la pantalla.

El fet que les plaques s'automultipliquin pertany a una classe de fenòmens englobats en el que s'anomena efecte Moirée. Sempre que superposem dues xarxes periòdiques (en aquest cas la xarxa de píxels i la placa zonal que és periòdica en ρ^2) apareixen involuntàriament noves figures (Bryngdahl, 1974).

Efectes de la baixa resolució en la focalització

Vegem ara com és la distribució de llum al pla focal d'aquestes lents. Com a exemple podem mostrar la intensitat de llum que proporciona la lent de la figura 4 al voltant de l'eix òptic i que trobem representada a la figura 5. Una propietat interessant d'aquestes lents és que la distribució de llum tendeix a tenir la mateixa forma del píxel (però sempre més estreta) a mesura que anem codificant focals cada vegada més curtes. Això és vàlid també per a totes les lents que apareixen codificades. Pel contrari si augmentem la focal, la distribució de llum tendeix a ser una funció sinc, ($\text{sinc}(x, y) = \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) / (\pi x \cdot \pi y)$), que és el que resulta en el cas de plaques zonals de resolució infinita. Així doncs, curiosament, amb lents fetes de quadrats podem obtenir

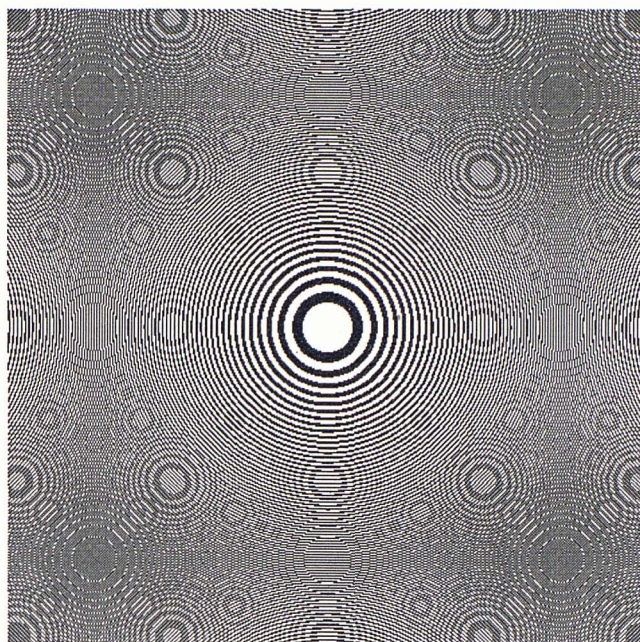


Figura 7: Lent òptima

pics més estrets (de l'ordre del 60 %) que el mateix píxel. Això ho podem veure a la figura 6, en què trobem representat el gruix del pic que es forma en el pla focal dividit de les dimensions del píxel. Una altra cosa curiosa és que aquestes lents tenen una focal per la qual presenten un màxim d'intensitat sobre l'eix. Per a aquesta focal la resolució de la lent és pràcticament la mateixa que per a una lent normal; diem aleshores que les plaques zonals de baixa resolució tenen una focal òptima. Si $\Delta x = \Delta y$, $N = M$ i els costats dels píxels $\Delta x' = \Delta y'$, aquesta focal ve donada per $f = 0,73\Delta x\Delta x'N/\lambda$. Aquesta lent la trobem a la figura 7. Podeu tractar també de fotografiar-la i veure com focalitza objectes lluminosos.

Optimització de les plaques zonals de baixa resolució

Suposem ara que hem de treballar amb una focal curta i que hem d'intentar enviar el màxim de llum possible a la focal que coincideix amb l'eix òptic. En els primers apartats hem descrit una mica el fonament físic de les plaques zonals. Descriurem ara en termes semblants aquestes plaques de baixa resolució conformades mitjançant quadrats. Resulta que la llum que surt difractada d'un quadrat es pot descriure com una ona esfèrica que surt del mig del quadrat; ara bé, aquesta ona esfèrica té una amplitud que depèn de les coordenades (x, y) . En el cas dels quadrats de les pantalles de cristall líquid, podem escriure la difracció d'un quadrat centrat a les coordenades de la pantalla (x_0, y_0) en un punt (x, y) a distància $z = f$ com:

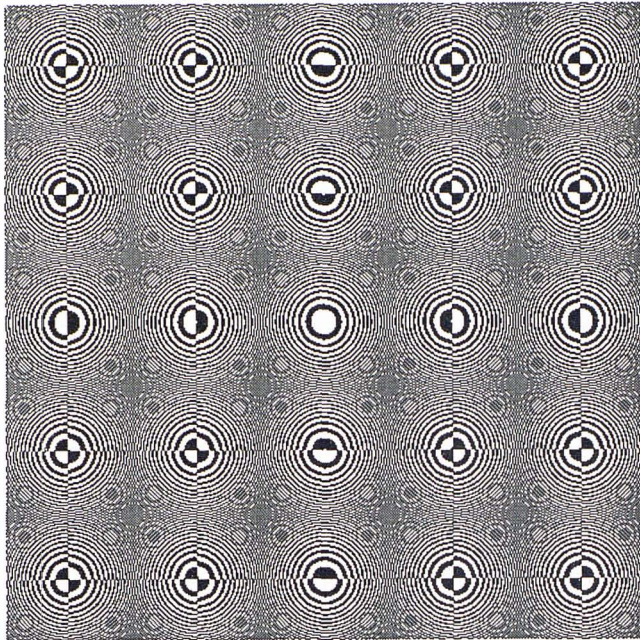


Figura 8: Lent optimitzada

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{r} \exp \left[\frac{ik}{2f} ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \right] \text{sinc} \left(\frac{\Delta x(x - x_0)}{\lambda f}, \frac{\Delta y(y - y_0)}{\lambda f} \right)$$

Referències

- BRUNGDAHL, O., Moiré: Formation and interpretation, *JOSA*, **64**, 1287-1294 (1974).
 CARCOLÉ, E., CAMPOS, J., BOSCH, J., Diffraction Theory of Fresnel Lenses Encoded in Low Resolution Devices, *Appl. Opt.*, (sotmès).
 CARNAL, O., SIGEL, M., SLEATOR, H., TAKUMA, H., MLYNEK, J., Imaging and Focusing of Atoms by a Fresnel Zone Plate, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 3231-3234 (1991).
 HECHT, E., ZAJAC, A., *Optica*, Addison-Wesley iberoamericana (1988).
 KEARNEY, P. D., KLEIN, A. G., OPAT, G. I., GAHLER, R., Imaging and Focusing of Neutrons by a Zone Plate, *Nature*, **287**, 313-314, (1980).

Aquesta equació ens diu que si pretenem concentrar el màxim de llum possible sobre un punt de l'eix òptic, la figura 4 no és la millor lent que podem fer. Fixem-nos que les funcions sinc tenen canvis de signe periòdics (a causa de les oscil·lacions de la funció sinus). Aquests canvis de signe fan que determinades zones de la lent col·laborin amb una fase π equivocada. Això es pot solucionar ràpidament canviant les zones blanques per les negres i viceversa. D'aquesta manera optimitzem la lent i podem arribar a obtenir de l'ordre de 10 vegades més energia mitjançant aquesta correcció. L'aspecte d'aquestes lents es pot veure a la figura 8.

Conclusions

Les plaques zonals constitueixen un dels elements òptics amb més història dins l'òptica. Actualment la seva importància rau en el fet que poden treballar per qualsevol longitud d'ona, i que poden ser codificades en pantalles de cristall líquid de baixa resolució, amb la idea de substituir elements òptics mòbils. Les propietats de les plaques zonal de baixa resolució admeten un tractament matemàtic rigorós que explica els efectes de la discretització quant a la codificació i la focalització.

Agraïments

Agraïco al doctor Ignasi Juvells i a Mario Montes la lectura crítica que van fer del primer manuscrit, que va ser de gran ajuda per aclarir en el text els conceptes que intentava transmetre. Agraïco també al doctor Juan Campos i a Francisco Monzonís la seva col·laboració en l'elaboració dels gràfics.