

# Cinemàtica i ordinador

Xavier Granados \*

IB "Carles Riba". Barcelona

## Introducció

Un dels problemes amb què s'enfronten els alumnes de secundària és, dins de l'àmbit de la física, el d'utilitzar amb naturalitat la representació dels fets físics fent servir funcions. Aquesta representació passa per dos aspectes importants, un és definir el paràmetre adient per representar allò que volem representar i l'altre té a veure amb l'aspecte dinàmic: com canvia un dels paràmetres enfront de la variació de l'altre. Cap dels dos temes és trivial.

El cas de la cinemàtica és, potser, la primera oportunitat que té l'alumne d'observar aquest doble caràcter de les representacions físiques. No és la primera vegada que s'enfronta amb els dos aspectes, ja que no és aliè al concepte de mesura ni al de funció, però l'alumne té tendència a utilitzar-los només en l'aspecte formal.

Quan l'alumne estudia el moviment, ha d'entendre com representar el fet físic amb els dos paràmetres més immediats i, potser, més difícils de comprendre en tota la seva magnitud: la posició i el temps. Per tal de familiaritzar-se amb la seva utilitat, és important no fer tan sols molts exercicis sinó intentar també fomentar la intuïció del que fa el mòbil, veient la representació dels paràmetres del seu moviment.

L'ordinador és una bona eina per fer que l'alumne pugui veure simulacions de moviments manipulant els paràmetres i comprovant-ne els efectes de manera immediata. Aquestes simulacions es refereixen normalment a les representacions analítiques i permeten jugar amb els moviments dintre de les classificacions habituals. L'ordinador, però, permet apropar-se molt més a la realitat física des del moment que pot captar dades generades pels fets físics i no només per les seves representacions. Per tal d'extreure de la màquina un profit més gran és important desenvolupar els sistemes adequats per disposar de representacions de moviments, actuant directament sobre els objectes i no tan sols sobre els paràmetres, que de forma abstracta caracteritzen la seva representació. Per formar una bona intuïció cal

adquirir experiència jugant amb les situacions físiques i amb les seves representacions.

És aquesta idea la que ens ha impulsat a esforçar-nos a construir un sistema, l'EXAO-2, capaç de generar informació dels desplaçaments dels objectes, manipulable per l'ordinador. És clar que un sistema eficient capaç de generar aquestes dades no permet només estudiar el moviment d'un cos, sinó que també permet comprovar la relació entre les accions exteriors i els moviments dels cossos entrant de ple dins del món de la mecànica.

## Sistemes de detecció

Per tal que es pugui automatitzar la presa de dades, hem de disposar d'un sistema capaç de conèixer la posició del mòbil i traspasar-la a l'ordinador, que suposem que ja té el sistema de mesura del temps. El detector de posicions no pot influir sobre el moviment de l'objecte, ja que el pertorbaria, la qual cosa limita molt el nombre de sistemes adients que podem triar. Cap sistema mecànic pot ser utilitzat, malgrat que actualment hi ha mecanismes per registrar moviments com el d'arrossegar una cinta i pintar-hi a sobre punts a intervals de temps constants, perquè el fregament pertorba notablement el moviment. L'eliminació dels sistemes mecànics fa que els sistemes més viables siguin òptics o acústics. En la primera línia (sistemes òptics) podem fer servir mòbils amb dispositius capaços de detectar el seu moviment i enviar-ne la informació a l'ordinador per ràdio o per raigs infraroigs (Jornades, 1989). Aquests sistemes són de gran precisió però, o bé són molt complexos o suposen que el mòbil sigui actiu, és a dir, ha de portar un detector.

## Les ones sonores i les ones electromagnètiques de la banda de radiofreqüència

En el cas del so, les ones són pertorbacions periòdiques de la pressió que es propaguen longitudinalment per l'aire, l'aigua, els sòlids, etc. En el cas de les ones de ràdio, es tracta d'una ona transversal, del camp electromagnètic. La velocitat de propagació del so en els gasos no depèn més que de la temperatura i de la massa molecular, mentre que quan es propaga en els sòlids i els líquids depèn de la densitat i del mòdul de compressibilitat del medi (Sears, 1969); pràcticament no depèn de la freqüència ni d'altres aspectes concrets de la pertorbació. Les ones de ràdio, en absència de matèria, es

\*Xavier Granados (Valladolid, 1952), llicenciat en Ciències Físiques a la Universitat de Barcelona l'any 1976. Catedràtic de Física i Química de l'IB Carles Riba des de 1982. Col·labora amb el PIE en el desenvolupament de l'EXAO i amb el grup de Superconductivitat de l'Institut de Ciències dels Materials de Barcelona.

mouen a la velocitat de la llum. Quan les ones de ràdio es propaguen per on hi ha matèria, les coses canvien, la resposta del medi material depèn quasi sempre de la freqüència i tindrem un efecte de dispersió de l'ona que es descompondrà segons les freqüències de les ones que la integren. L'efecte pot ser fins i tot més curiós: si el medi no és isòtrop pot haver-hi separació de la pertorbació electromagnètica en les seves components segons els diferents plans d'oscil·lació del camp.

Tots aquests efectes condicionen l'afirmació tan estesa (Martínez, 1989; Alsina, 1990) que les ones es propaguen amb una velocitat constant dins de certs límits. L'ona ha de tenir una forma estable en el medi de propagació, no s'ha de disgregar a causa de la dispersió i el medi ha de ser homogeni. En el nostre cas, el medi és l'aire i, en aquest, el so pràcticament no es dispersa. Si les ones són de ràdio, la interacció de l'aire amb el camp electromagnètic és tan feble que no es distingeix gaire la seva propagació en aquest medi de la propagació en el buit, sempre que no passem brusquement de l'un a l'altre. La velocitat de propagació serà també pràcticament constant si el medi aeri es manté homogeni. Als nostres efectes, doncs, podem considerar que tant les ones sonores com les de ràdiofreqüència es propaguen a l'aire a velocitat constant. D'altra banda, els dos tipus d'ones presenten fenòmens de reflexió nítids quan arriben a una superfície que separa el medi de propagació que considerem (aire) i un altre medi (un sòlid, per exemple).

Aquestes dues propietats són la base d'un sistema clàssic de detecció que si es fa amb so rep el nom genèric de sonar (*Sound Navigation and Ranging*) i si es fa amb ones electromagnètiques de la part de l'espectre corresponent a ràdiofreqüència, el de radar (*Radio Detection and Ranging*). Qualsevol dels dos mètodes calcula les distàncies en què es troba l'objecte, determinant el temps que tarda l'ona des que és enviada cap a l'objecte fins que la part que ell reflecteix torna. El principi és molt senzill però la seva realització té els seus problemes. Un d'ells és la mesurabilitat d'aquest temps. Les ones electromagnètiques viatgen a la velocitat de la llum, és a dir  $3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ . Amb aquesta velocitat, l'ona recorre 300 metres en una milionèsima de segon. Això vol dir que si nosaltres volem detectar un objecte que està a mig metre hauríem de ser capaços de distingir un retard de l'ordre de  $10^{-9}$  s amb prou resolució com per distingir amb precisió la posició de l'objecte. Per una resolució de mig centímetre necessitem amidar el temps de retard amb una resolució de  $10^{-11}$  s. És clar que hem de reservar els sistemes de detecció basats en ones de ràdio per a distàncies més grans a causa de la seva gran velocitat de propagació.

Ones més lentes i de longitud d'ona més petita són les ones acústiques amb les quals funcionen els sonar.

## Els sonar

Com hem suggerit abans, per tal de localitzar un objecte a sobre d'una taula del laboratori, sembla més adient el so que no les ones de ràdio i no tan sols pel fet que els temps entre els pulsos de so originals i els reflectits són més llargs i més fàcils de mesurar, sinó també perquè la longitud d'ona és molt més petita.

Hi ha dues qüestions importants associades a la longitud d'ona. La primera és la mida de l'objecte a detectar i la segona és la dispersió del feix, és a dir, la possibilitat de mantenir un feix estret paral·lel a distàncies grans. Un so d'una longitud d'ona petita permet de ser reflectit per un cos petit i amb aquest es poden fer feixos més estrets i més ben dirigits cap al cos que s'ha de reconèixer.

A la figura 1 tenim un esquema de com funcionaria un detector per polsos acústics (sonar). Un micròfon d'ultrasons envia un tren d'ones cap a l'objecte i les ones són reflectides cap a un segon micròfon que les detecta. Com que el micròfon d'ultrasons no rep únicament el so reflectit sinó que rep també sons d'origen difícilment determinables, el receptor ha de poder diferenciar l'eco del so emès de la resta de sons que pugui detectar. La forma més senzilla és fixar-se només en els sons de la mateixa freqüència que el so emès. Això imposa un mínim de duració del pols i cert temps per identificar la freqüència de l'ona que arriba, que depèn de la tolerància permesa en la identificació de la freqüència i que habitualment correspon a una duració d'entre 5 i 16 fronts d'ona. És necessari mantenir certa tolerància en la determinació de la freqüència per tal de no excloure'n les reflexions que procedeixen de cossos que es mouen. Les ones reflectides per un cos en moviment no tenen la mateixa freqüència a causa de l'efecte Doppler.

Habitualment, detectar la mateixa freqüència que la de l'ona emesa no és suficient, atès que hi poden haver reflexions en altres cossos diferents del que s'estudia que generarien confusió en el sistema de detecció. Per tal d'evitar-ho es complementa el criteri de freqüència amb el criteri d'agafar el primer eco.

Amb els micròfons habituals que es troben al mercat es pot treballar amb una freqüència de 40 kHz i amb aquesta freqüència la indeterminació en el reconeixement de l'instant d'arribada del tren d'ones es pot situar entre 100 i 200  $\text{ms}^{-1}$ . Estudis pràctics recents mostren que aquesta incertesa per un objecte que es manté a una distància de l'ordre de 60 cm amb variacions d'un 20 % es pot situar entorn als 0,5 cm malgrat que hi hagi una quantitat apreciable de desviacions que arriben als 3 cm (uns 100  $\text{ms}^{-1}$  de diferència entre uns i altres) (Duchesne, 1991). Aquesta desviació creix en valor relatiu quan la distància de l'objecte al sensor disminueix, malgrat que la recepció de l'eco millora en tenir una amplitud més gran, de manera que un límit inferior de la distància de treball entre el sensor i l'objecte que s'ha

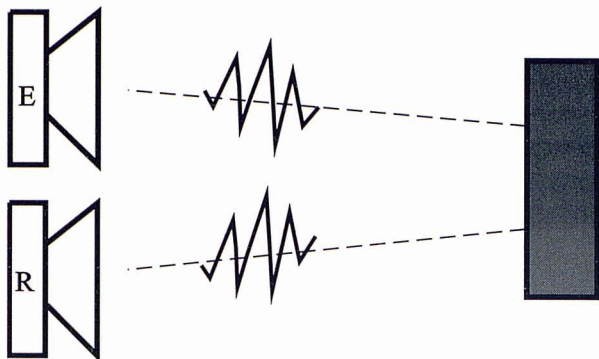


Figura 1: Esquema de funcionament bàsic d'un sonar. L'emissor  $E$  envia un tren d'ones que és reflectit per l'obstacle. El receptor  $R$  rep el tren d'ones uns instants més tard. La diferència de temps permet determinar la distància a la qual està l'obstacle

de localitzar se situa al voltant d'uns 20 cm.

Un sistema basat en el temps de rebre l'eco d'un pols de so tal com el de la figura 1 té una limitació addicional a causa del fet que no es pot enviar un nou pols de sonda fins que no ha tornat l'eco de l'anterior. Quan la distància de l'objecte al detector creix, aquest temps creix també, de manera que la informació que es pot rebre per unitat de temps (freqüència de mostreig) és d'uns  $250 \text{ s}^{-1}$  per a l'objecte situat a 60 cm sense altres cossos propers capaços de generar ecos.

Per tal d'anul·lar l'efecte d'altres ecos, el mostreig s'ha de fer molt més lent deixant un temps mort suficientment gran com per que arribin els ecos paràsits abans d'enviar un nou pols de sondeig.

### El so i les distàncies

Fins ara, la solució proposada per tal de fixar la posició d'un objecte ha passat per imposar de forma implícita un origen: el lloc que ocupa el detector. Tots nosaltres sabem que físicament la posició dels objectes no és més que una eina de treball. De fet, la geometria de l'espai no té res a veure amb aquest concepte clarament artificial. El que sí que està relacionat amb els fets físics és la distància, que permet definir el que és posició quan, arbitràriament, es defineix un origen.

Cal adonar-se que la posició d'un objecte pot estar perfectament referida a la seva situació anterior, és a dir, que per estudiar l'evolució d'un mòbil no es necessita saber quina és la seva posició respecte d'un origen arbitrari, sinó quant s'ha mogut respecte de posicions ocupades anteriorment. Així el nostre objectiu no és situar objectes sinó mesurar el desplaçament d'un cos.

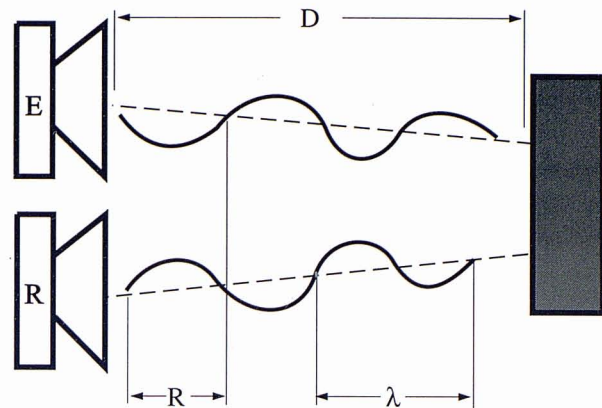


Figura 2: Esquema de funcionament bàsic d'un detector de desplaçaments per rotació de la fase. La diferència de fase entre les oscil·lacions de l'emissor i del receptor ve donada per la distància  $R$ , que és la resta de la divisió entera de  $D$  entre la longitud d'ona  $l$

Un micròfon emissor d'ultrasons, mentre genera un feix (coherent), determina en cada punt i en cada instant un valor de fase que per cada longitud d'ona que ens moguem tornarà a tenir el mateix valor. Un obstacle suficientment gran i degudament orientat enviarà el feix cap al receptor que, d'acord amb la figura 2, suposarem al costat de l'emissor. La fase de l'ona que arriba al micròfon receptor tindrà un valor que dependrà de la distància que ha recorregut l'ona per arribar al receptor i que serà la resta,  $R$ , de la divisió entera de la distància  $2D$  que ha recorregut l'ona entre la longitud de l'ona,  $l$ , emprada. Així, cada vegada que el cos es mou mitja longitud d'ona, la diferència de fase entre l'emissor i el receptor torna a tenir el mateix valor que abans. Si ens posem com a referència que el desfasament sigui zero, cada vegada que torni a ser zero el mòbil s'haurà desplaçat mitja longitud d'ona des del lloc en què estava.

Si la freqüència és la dels micròfons ultrasònics comercials la longitud d'ona és de 8,5 mm i la resolució en la detecció és la d'un desplaçament de 4,2 mm.

Als interferòmetres (Granados, 1990), la detecció d'aquest desfasament es fa superposant a l'ona enviada la rebuda per la reflexió, de manera que l'amplitud de l'ona resultant es fa mínima quan el desfasament de les dues és  $p$ , i es fa màxima quan el desfasament és zero. Des del punt de vista de l'automatització, detectar el nombre de vegades que l'amplitud passa per un valor mínim o màxim és realment complicat. No és possible comparar l'amplitud amb un nivell fix perquè el valor de l'amplitud en el mínim depèn de les amplituds de les ones que se superposen i l'amplitud en què hi participa l'ona reflectida depèn molt de la distància a la qual és

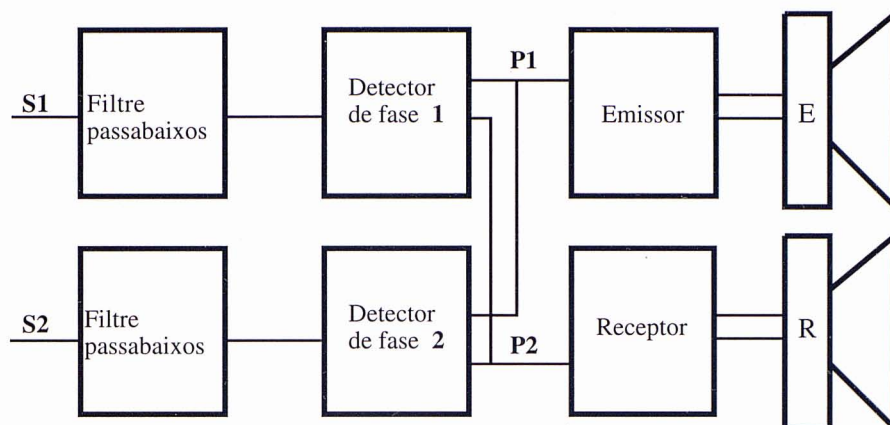


Figura 3: Diagrama de blocs del sistema detector de la rotació de fase. Els senyals  $S1$  i  $S2$  controlen l'acció del microprocessador encarregat del comptatge (vegeu text)

l'objecte que la reflecteix.

Es podria fer l'esforç de dissenyar un sistema capaç de detectar aquests mínims si no fos perquè no resoluria un segon problema. La mesura de l'amplitud a la zona d'interferència només permet conèixer el valor absolut del desplaçament efectuat i amb aquest valor no n'hi ha prou per representar un moviment que tant pot realitzar-se apropant-se al sistema de detecció com allunyant-se'n. Aquesta dificultat intrínseca del sistema de detecció dels interferòmetres es pot evitar utilitzant el mateix principi, però sense superposar les dues ones, tenint en compte tota la informació que cada una d'elles posseeix i no només el resultat d'una superposició.

### El detector de l'equip EXAO-2

D'acord amb el que s'ha exposat a l'últim apartat, quan es tracta d'analitzar el moviment d'un objecte que s'apropa o s'allunya del sistema sensor, és suficient determinar el desplaçament tant en mòdul com en el que correspon al signe.

La figura 3 mostra un diagrama de blocs del sistema de detecció a l'equip EXAO-2. Dintre d'aquest esquema podem trobar l'emissor, el receptor, el detector de defasament 1 i el detector de defasament 2, que generen els senyals  $S1$  i  $S2$  que indiquen el desplaçament i el signe respectivament. Quan el flanc de pujada dels pols d'excitació de l'emissor,  $P1$ , arriba al comparador 1 abans o després que el flanc de pujada dels pols  $P2$  rebuts al receptor, es produeix un pols a la sortida del comparador d'una amplada igual al retard, de manera que si posem un filtre passabaixos construirem un senyal,  $S1$ , que passarà de l'1 al 0 lògics o del 0 a l'1 cada vegada que el defasament tingui uns valors determinats. Un cicle complet de la tensió  $S1$  correspon a un

canvi de mitja longitud d'ona en la posició del mòbil.

El segon comparador treballa d'una forma diferent. Normalment la seva sortida és d'una impedància elevada de forma que actua com un circuit obert. Si el flanc de pujada del pols  $P1$  arriba abans que el flanc de pujada del pols  $P2$ , la sortida pren el valor de l'1 lògic durant un temps igual al defasament, si el flanc primer és el del pols rebut  $P2$ , la sortida del comparador es fa 0 durant el temps que triga a arribar el segon flanc de pujada. Si l'objecte s'està apropant, la fase de l'ona que arriba al receptor està augmentant de forma contínua i la sortida del segon comparador es connecta a l'1 lògic durant el temps entre els dos flancs. Un passabaixos a la sortida dóna un 1 lògic. Si el mòbil s'allunya la fase disminueix contínuament, el comparador dóna un 0 durant el seu temps de connexió i el filtre de la sortida dóna un 0 permanent.

Els senyals  $S1$  i  $S2$  passen a un sistema de comptatge de manera que si  $S2$  és 1, cada flanc ascendent de  $S1$  és comptat cap endavant, i si  $S2$  és 0, els flancs de  $S1$  són descomptats. El valor emmagatzemat al sistema de comptatge és el del desplaçament total del mòbil, comptat de mitja en mitja longitud d'ona, és a dir, de 4,2 en 4,2 mm.

D'aquesta manera es pot mesurar el moviment d'un objecte al laboratori de pràctiques sense limitacions pel que fa a les freqüències de mostreig i des del mateix sensor fins a un metre de distància d'aquest o més, dependent de les reflexions que es produeixen a l'entorn. El treball que li queda a l'ordinador no és més que el de llegir el contingut del registre que conté el resultat del comptatge deixant-li tot el temps per tal de millorar la interfície d'usuari i la seva capacitat de càlcul.

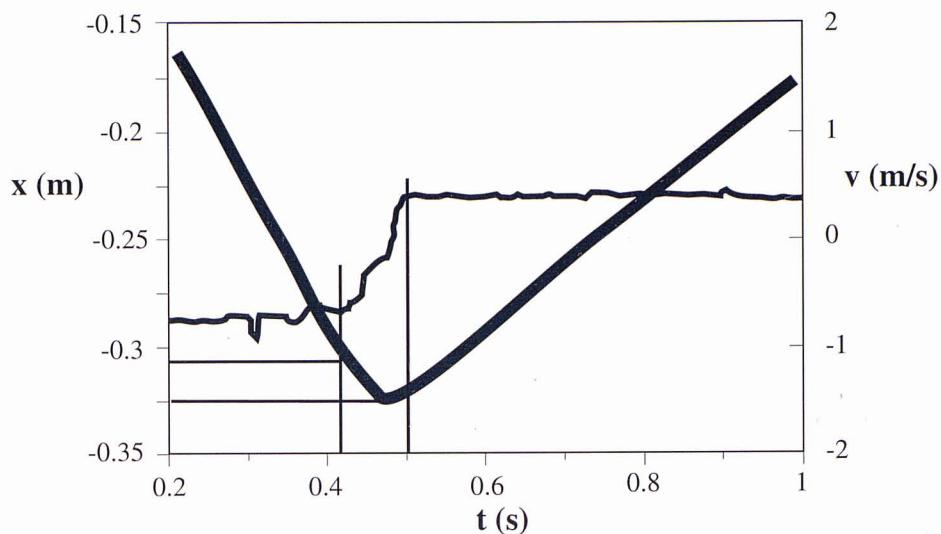


Figura 4: Un carret és llençat contra un altre carret amb una massa més gran que inicialment està quiet. Quan arriba a certa distància del segon carret, hi interactua de forma elàstica. El conjunt de cercles (línia gruixuda) representa la posició com a funció del temps i la línia contínua indica la velocitat (escala de la dreta). Les línies verticals delimiten el temps que dura la interacció i les horitzontals, l'interval de posicions en què es fa notar la força d'interacció. Després de ser invertida la velocitat, l'interval de posicions en què es fa sentir la força d'interacció és més petit perquè el segon carret es posa en moviment. Fora de la zona d'interacció, el moviment és uniformement accelerat com a efecte de la força de fregament

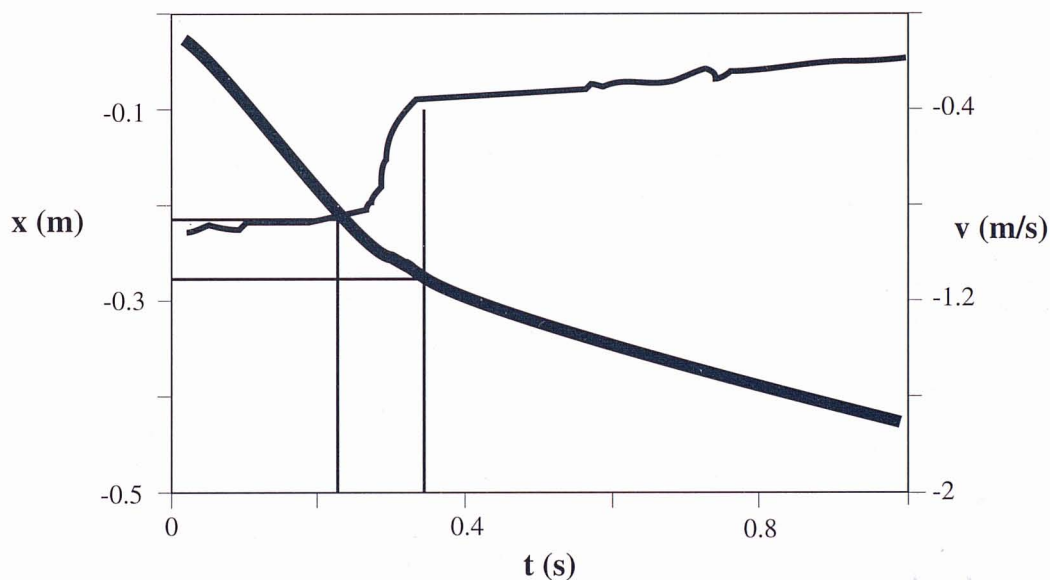


Figura 5: La col·lisió es fa ara contra un carret de massa més petita. La zona d'interacció queda inclosa entre les ratlles verticals i horitzontals com a la figura 4. Com en el cas anterior, la força de fregament es pot deduir del pendent de la velocitat fora de la zona d'interacció i de la massa del carret (70 g). En els dos experiments han estat utilitzats carrils i carrets d'un equip PHYWE de mecànica i la interacció de repulsió entre els carrets s'aconsegueix amb dos imants de ferribarita

## El software

La maduració de l'entorn Windows i, consegüentment, la seva difusió ha permès facilitar la complexa i feixuga tasca de relació amb l'usuari. L'entorn de treball del software de l'EXAO-2 és el mateix Windows en la versió 3.1.

La filosofia de funcionament és molt simple. Una barra de menú dóna accés a les diferents passes necessàries per obtenir un registre. Aquestes passes són essencialment la creació del document de treball, l'edició del cronòmetre i la fixació de l'origen de coordenades a partir del qual comptem els desplaçaments. Una vegada hem superat aquesta primera fase podem iniciar el registre, que pot ser manual o automàtic. El registre comença sempre per temps zero i pot correspondre al moment que nosaltres decidim (manual) o al moment en què es detecta moviment a l'objecte. Per a registres de més de 15 segons de durada es pot visualitzar l'equació del moviment simultàniament al moviment i un quadre indica de forma numèrica els valors del temps i del desplaçament.

Una vegada ha finalitzat el registre, l'ordinador calcula la primera i segona derivades (velocitat i acceleració) i les representa. A partir d'aquest moment són accessibles les eines de treball. Aquestes eines permeten superposar els tres o dos dels tres gràfics per tal de comparar-los o bé usar un cursor vertical que en facilita la comparació sense haver de superposar els gràfics. Les dades es poden recollir en un fitxer numèric en format ASCII per fer-ne ús amb fulls electrònics molt més potents.

Les figures 4 i 5 mostren els resultats d'una col·lisió. Un carret s'allunya del sensor i xoca contra un altre carret. En el primer cas xoca contra un altre carret de massa més gran i en el segon ho fa contra un de massa més petita. Les dues representacions mostren l'equació del moviment i la velocitat. En aquest cas hem calculat la velocitat per derivació en cinc punts. La lleugera curvatura dels trams "abans del xoc" i "després del xoc" es tradueix en una disminució lineal del mòdul de la velocitat que correspon al fregament. Es pot comprovar

que el pendent de la velocitat —l'acceleració— en aquestes dues regions té el mateix valor absolut i, per tant, la força de fregament té el mateix mòdul —a la figura 4 canvia el signe.

El programa permet recuperar registres ja fets per tal de treballar-hi.

## Conclusions

L'estudi comparat de les diverses opcions per detectar el moviment de cossos ens ha mostrat que els sistemes basats en el desplaçament de la fase són els més senzills i eficaços quan la distància al sensor ha de ser petita, com és el cas del laboratori. A diferència dels interferòmetres habituals, en què no es pot determinar el signe del desplaçament amb la informació del que passa només en un punt, en el sistema de detecció proposat es contrasten les fases de les ones emesa i reflectida de forma directa, de manera que es pot distingir fàcilment el signe de la variació de la fase de l'ona reflectida i, per tant, el signe del desplaçament de l'objecte que reflecteix l'ona. La resposta del sistema de detecció que es proposa és bona, fins i tot quan el mòbil es desplaça a velocitat elevada. El sistema treballa prou bé, fins i tot quan hi són presents objectes que produeixen ecos que arriben abans que el que produeix el mòbil, sempre que els objectes estiguin quietes.

L'equip resultant és senzill, de cost molt baix i és prou flexible com per aplicar-lo als conjunts que, per a la realització de pràctiques de cinemàtica i dinàmica, hi ha als centres de secundària i universitaris. Les seves prestacions són suficients per representar moviments complexos i l'equip pot suportar fins a dos detectors fent l'estudi simultani dels dos moviments detectats.

## Agraïments

Haig de manifestar el meu agraïment als responsables del PIE, que van tenir prou fe en les possibilitats de desenvolupament d'aquest sistema, així com al Departament d'Ensenyament que va atorgar-me una llicència per tal que la idea es convertís en una realitat.

## Bibliografia

- Jornades Tècniques de NTL, EXAO i TC&RE, Mas Pins, (Barcelona, 1989).  
ALSINA, J., ARANDA, J., ESTRADÉ, S. i FORNELLS, M., *Física*, pp. 154-7, Teide, (Barcelona, 1990).  
SEARS, F.W. et al., *Física*, pp. 455-7, Aguilar, (Madrid, 1969).  
DUCHESNE, B. et al., *Am. J. Phys.*, **59**, 998-1002 (1991).  
GRANADOS, X., Mesura de distàncies amb el so. Mesura de la velocitat del so i mesura de desplaçaments., *Protocols de Física i Química del Centre de Documentació i Experimentació en Ciències del Departament d'Ensenyament*, **2**, 282 (1990).