Observadors accelerats en relativitat restringida

Josep Graells Casanellas i Carme Martín Torres*
Departament de Física Aplicada. Universitat de Barcelona

Introducció

Hi ha comparativament pocs estudis que tinguin com a objectiu analitzar sota un punt de vista general i metodològic la física minkowskiana, que descriuen i mesuren els observadors accelerats. Aquests treballs s'autolimiten, la majoria, a descriure l'espai-temps pla, sota una òptica matemàtica, o bé tenen com a finalitat servir d'introducció a la relativitat general. A més, és una temàtica que atrau l'interès de pocs físics, llevat dels quàntics, atesa la relació que té per a la formulació de la quàntica de camps en presència de camps gravitatoris. No obstant això, considerem el tema intrínsecament interessant i potencialment fecund, ja que amaga moltes sorpreses per als qui s'endinsin en aquest domini de la física clàssica.

Aprofitarem les ensenyances de la relativitat general i intentarem aprofundir dins el món de la física minkowskiana observada i mesurada per observadors accelerats. Per tant, capgirarem els objectius usuals. Com que aquest treball vol tenir un caire acadèmic i didàctic, per fixar les idees escollirem primer els observadors uniformement accelerats. L'extensió a qualsevol tipus d'observador és senzilla.

El diagrama 1 sintetitza l'àmbit general del treball. Els quadres gruixuts indiquen per on ens mourem.

En tractar amb observadors accelerats s'evidencia la necessitat de diferenciar entre referencials i sistemes de coordenades associats als referencials. Els sistemes de coordenades queden relegats a emprar-se com a etiquetadors dels esdeveniments. El seu objectiu és bàsicament topològic, per exemple es poden emprar per precisar les nocions de proximitat i d'estructura diferencial. En canvi els sistemes de referència o referencials han de ser capaços de poder representar el registre de mesures, això és, han de portar idealment associats aparells de mesura (rellotges, regles, acceleròmetres, voltímetres, etc.).

En l'espai-temps minkowskià els sistemes de coordenades inercials globals també són referencials inercials, atès que representen la família dels observadors inercials. En particular, les coordenades inercials tenen un significat mètric evident dins el context de la relativitat restringida. Les transformacions del grup de Lorentz permeten, conegudes les mesures que ha efectuat un observador inercial, determinar les que efectuaria qualsevol altre.

En els problemes pràctics quasi sempre intervenen cossos que posseeixen una dinàmica no inercial. Molt sovint és preferible resoldre els problemes en el referencial no inercial associat al cos, ja que, per exemple, les relacions constitutives de l'electromagnetisme o bé les propietats elàstiques del cos es mesuren en el referencial del cos.

En aquest article no serà necessari recórrer a un model de referencial accelerat, ja que el tipus de problemes que ens plantejarem poden ser resolts fent ús exclusivament del que es podria anomenar principi de la mesura d'Einstein-De Donder. Aquest principi suposa que les mesures que els observadors accelerats efectuen en un punt, són mesures efectuades en el referencial inercial instantàniament comòbil amb l'accelerat en l'esdeveniment de la mesura. Ara bé, quan intervenen camps, per exemple l'electromagnètic, sí que s'ha de construir un model de referencial. En aquest cas, sota el punt de vista dels autors, el model més prometedor és el que es basa en el fibrat vectorial ortonormalitzat.

Moviment hiperbòlic

La transformació de Lorentz que relaciona un sistema inercial Σ amb un altre Σ' que es mou respecte a Σ amb velocitat $\vec{v} = v\hat{\imath}$, sent els eixos de Σ i Σ' parallels, i havent sincronitzat a zero els rellotges quan els orígens coincidien, és:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(ct - vx/c) \\ x' &= \gamma(x - tv), \quad y' = y, \quad z' = z \end{aligned} \tag{1}$$

sent $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ i c la velocitat de la llum en el buit.

Si $\vec{u} = \hat{\imath}dx/dt$ i $\vec{a} = d\vec{u}/dt$ són la velocitat i l'acceleració d'una partícula respecte a Σ, aplicant (1) immediatament es dedueix el seu valor per a Σ':

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - vdx/c^2} = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}$$

*** Josep Graells Casanellas** (Cervera, 1946) és doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1978) i actualment treballa a FECSA en la direcció d'Explotació i Enginyeria. **Carme Martín Torres** (Barcelona, 1950) és doctora en Física per la Universitat de Barcelona (1981) i és professora del col·legi "La Salle" de Gràcia

Espai-temps pla —— Inclusió de massa-energia ——→ Gravitació / Espai-temps corbat

Referencials inercials. Coordenades galileanes Connexió igual a zero Riemann igual a zero	*Referencial en caiguda lliure* Connexió igual a zero Riemann diferent de zero
Transformació a un referencial accelerat Connexió diferent de zero Riemann igual a zero	*Referencial general* Connexió diferent de zero Riemann diferent de zero

Diagrama 1

$$du' = \frac{du}{1-vu/c^2} + (u-v)\frac{v\,du/c^2}{(1-vu/c^2)^2} \qquad (2)$$

En relativitat restringida es defineix un moviment amb acceleració constant si aquesta ho és en els sistemes inercials momentàniament en repòs amb la partícula, els anomenats sistemes comòbils. Si Σ' n'és un, llavors es verifica: $v = u$, sent $dt' = d\tau =$ interval de temps propi. Substituint en (2) resulta que

$$u' = 0, \qquad du' = \frac{du}{1-u^2/c^2} \qquad (3)$$

i tenint en compte que $d\tau^2 = (dt')^2 = dt^2 - d\vec{x}^2/c^2$, d'on es dedueix: $dt' = dt\sqrt{1-u^2/c^2}$, $d/dt' = \gamma(u)d/dt$, l'equació (3) esdevé:

$$a' = \frac{du'}{dt'} = \frac{\gamma(u)}{1-u^2/c^2}\frac{du}{dt} = \gamma^3(u)\frac{du}{dt}$$

Per tant, si centrem l'interès en un moviment uniformement accelerat $a' \equiv \alpha =$ constant

$$\alpha = \gamma^3(u)\frac{du}{dt} \qquad (4)$$

La integració de l'equació (4) és immediata si es té en compte la igualtat $\gamma^3(u)du/dt = d(\gamma(u)u)/dt$. Escollint les condicions inicials següents:

$$t = 0 \qquad u(0) = 0 \qquad x(0) = x_0$$

resulta que

$$u(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2t^2/c^2}} \qquad (5)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2}{\alpha}(\sqrt{1+\alpha^2t^2/c^2} - 1) \qquad (6)$$

Equacions de les quals s'infereixen les conclusions següents:

1. el referencial Σ és el mateix de la partícula per a $t = 0$,
2. el factor $\gamma(u)$ de l'equació (4), que és el que marca la diferència amb el món newtonià, té per objectiu bàsic limitar la velocitat de la partícula a valors inferiors a c (sols tendeix a c per a $t \to \pm\infty$) i
3. si en l'equació (6) introduïm la c i efectuem un desenvolupament en sèrie, quedant-nos en primer ordre, retrobem el límit newtonià:

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2}{\alpha}(\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{c^2}t^2} - 1) \sim x_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

que en el pla (t, x) està representat per una paràbola en contraposició a la hipèrbola, (6), del cas relativista:

$$(x - (x_0 - \frac{c^2}{\alpha}))^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}$$

Les dues asímptotes de l'hipèrbola

$$\pm ct = x - (x_0 - c^2/\alpha)$$

divideixen l'espai-temps minkowskià en quatre regions que, respecte a la partícula-observador, tenen les característiques següents (figura 1):

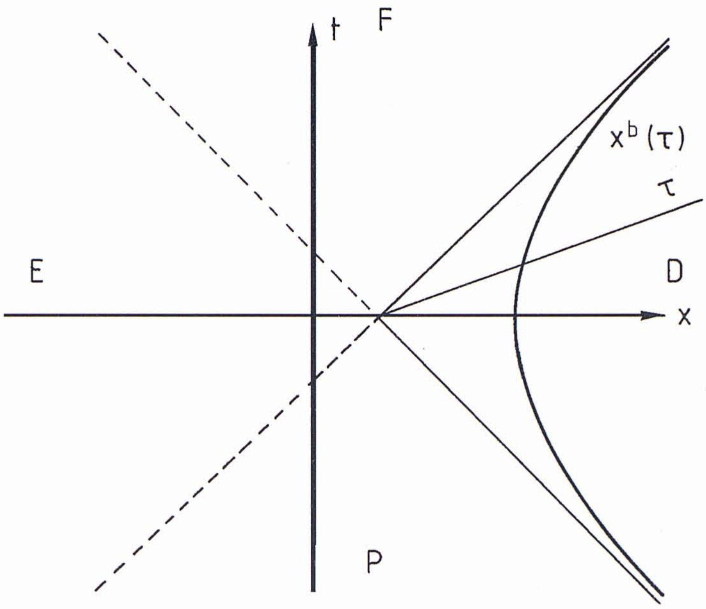

Figura 1: *Univers de Rindler. Regió D de l'espai-temps*

1. la regió F en què $ct > |x - (x_0 - c^2/\alpha)|$ no pot enviar senyals a l'observador, però sí que en pot rebre d'ell;

2. a la regió P en què $ct < -|x - (x_0 - c^2/\alpha)|$ passa el contrari, aquesta regió pot enviar senyals a l'observador però no en pot rebre d'ell, i

3. la regió E, compresa entre les dues acabades d'analitzar, i on a més $x < c^2/\alpha$, està causalment desconnectada de l'observador. Per aquesta raó a les dues asímptotes se les anomenen horitzons de succesos. Matemàticament són el límit de la línia d'univers d'un observador quan $\alpha \to \infty$, i atès que són trajectòries fotòniques, sota aquest punt de vista es pot adscriure a un fotó una acceleració pròpia infinita.

L'equació paramètrica de la línia d'univers de la partícula, emprant com a paràmetre el temps mesurat per l'observador inercial original Σ, és

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2}{\alpha}(\sqrt{1+\alpha^2 t^2/c^2} - 1)$$

$$y(t) = y_0, \quad z(t) = z_0, \quad t = t \tag{7}$$

És habitual i útil, tant des d'un punt de vista pràctic com teòric, emprar el temps propi τ en lloc de t com a paràmetre. La relació entre ambdós es calcula fàcilment, ja que sols cal substituir en $d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2}dt$, l'equació (5), i integrant s'obté:

$$t(\tau) = \frac{c}{\alpha}\sinh \alpha\tau/c \tag{8}$$

on la constant d'integració s'ha escollit de forma tal que per a $t = 0$ sigui $\tau = 0$.

Per tant, l'equació paramètrica de la partícula, emprant τ com a paràmetre, és:

$$x(\tau) = x_0 + \frac{c^2}{\alpha}(\cosh \alpha\tau/c - 1)$$

$$y(\tau) = y_0, \quad z(\tau) = z_0, \quad t(\tau) = \frac{c}{\alpha}\sinh \alpha\tau/c \tag{9}$$

La formulació quadrivectorial s'obté senzillament:

1) Línia d'univers de la partícula ($b = 0, 1, 2, 3$)

$$x^b = (ct(\tau),\ x(\tau),\ y(\tau),\ z(\tau)) =$$

$$(\frac{c^2}{\alpha}\sinh \alpha\tau/c,\ x_0 + \frac{c^2}{\alpha}(\cosh \alpha\tau/c - 1),\ y_0,\ z_0)$$

2) Velocitat

$$u^b(\tau) = \frac{dx^b}{d\tau} = (c\cosh \alpha\tau/c,\ c\sinh \alpha\tau/c,\ 0,\ 0)$$

3) Acceleració

$$a^b(\tau) = \frac{du^b}{d\tau} = \alpha(\sinh \alpha\tau/c,\ \cosh \alpha\tau/c,\ 0,\ 0)$$

Si s'empra la mètrica minkowskiana de signatura $+2$, $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, trivialment es comprova:

$$a^b(\tau)a_b(\tau) = \alpha^2$$

Recordant que l'expressió general de u^b està representada per

$$u^b(\tau) = (c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau}) = c(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}\frac{d\vec{x}}{dt}) = (c\gamma(u), \gamma(u)\vec{u})$$

es dedueix que pel moviment hiperbòlic es verifica que:

$$\gamma(u) = \cosh \alpha\tau/c, \quad \vec{u} = \hat{\imath}c \tanh \alpha\tau/c \qquad (10)$$

Cosa que permet la ràpida determinació de la congruència uniparamètrica de les transformacions de Lorentz que passen als sistemes inercials comòbils de la partícula observador:

$$\Lambda_b^{b'}(\tau) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma u/c & 0 & 0 \\ -\gamma u/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cosh \alpha\tau/c & -\sinh \alpha\tau/c & 0 & 0 \\ -\sinh \alpha\tau/c & \cosh \alpha\tau/c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Que en aplicar-les a $u^b(\tau)$ i $a^b(\tau)$ trivialment es recuperen les components de la velocitat i de l'acceleració respecte als referencials inercials comòbils:

$$u^{b'}(\tau) = \Lambda_b^{b'}(\tau)u^b(\tau) = c\delta_0^{b'}, \; a^{b'}(\tau) = \Lambda_b^{b'}(\tau)a^b(\tau) = \alpha\delta_1^{b'}$$

Exemple

El professor M. G. Bowler, del Departament de Física Nuclear de la Universitat d'Oxford, proposa en el seu llibre (vegeu la bibliografia) un problema que, segons explica, li varen plantejar quan feia una estada a la Divisió de Física Teòrica del CERN. L'anècdota és que la meitat dels físics de la Divisió van equivocar-se en solucionar-lo. El problema és el següent:

> *Dues naus espacials, en repòs respecte a un referencial inercial, estan connectades mitjançant un fil lleuger, que no és ni infinitament elàstic ni infinitament fort. Ambdós vehicles són idèntics, equipats amb idèntics motors i acceleròmetres. Els seus ordinadors es programen de forma tal que encenguin els motors simultàniament en el referencial Σ en què resten en repòs. Ambdós vehicles assoleixen la mateixa acceleració pròpia α, segons la recta que uneix les dues naus. La pregunta que ens fa el professor M. G. Bowler és: Arriba a trencar-se la corda que uneix les dues naus?*

Suposem que les dues naus espacials, 1 i 2, estan situades abans d'encendre els motors en les posicions x_1 i x_2 respectivament, en el seu sistema propi Σ. Per tant, la longitud de la corda respecte a aquest referencial és $L = x_2 - x_1$.

En $t = 0$ ambdues naus engeguen els motors i assoleixen idèntica acceleració pròpia $\vec{\alpha} = \alpha\hat{\imath}$. A partir de $t = 0$, les línies d'univers de les dues naus, negligint el transitori de l'encesa dels motors, ja que és idèntic per a les dues naus, són:

$$\text{nau } 1: \begin{cases} x_1(t) = x_1 + c^2/\alpha(\sqrt{1+\alpha^2t^2/c^2} - 1) \\ y_1(t) = 0, \quad z_1(t) = 0, \quad t = t \end{cases} \qquad (12)$$

$$\text{nau } 2: \begin{cases} x_2(t) = x_2 + c^2/\alpha(\sqrt{1+\alpha^2t^2/c^2} - 1) \\ y_2(t) = 0, \quad z_2(t) = 0, \quad t = t \end{cases} \qquad (13)$$

De (12) i (13) s'infereix immediatament que la separació de les dues naus resta constant respecte a Σ, és a dir, respecte al referencial inercial original, ja que

$$L(t) = x_2(t) - x_1(t) = x_2 - x_1 \equiv L \equiv \text{constant} \qquad (14)$$

Resultat lògic, ja que, en ser idèntiques, ambdues naus mantenen la mateixa velocitat respecte a Σ:

$$v(t) = u_2(t) = u_1(t) = \frac{\alpha t}{(1+\alpha^2t^2/c^2)^{1/2}} = c\tanh \alpha\tau/c \qquad (15)$$

Bé, s'ha deduït que L = constant, però, què li passa a la corda? Sempre és adient d'estudiar el fenomen no sols respecte a Σ, sinó respecte al sistema propi de les naus, això és respecte als sistemes inercials comòbils, perquè com a mínim, la resposta elàstica de la corda i la mesura de les seves característiques mecàniques és més senzilla respecte als referencials propis.

Per calcular la longitud pròpia $L_0(\tau)$, respecte a l'inercial comòbil $\Sigma(\tau)$, a partir de la longitud L respecte a Σ, sols s'ha de tenir en compte la contracció de Lorentz, atès que $\Sigma(\tau)$ es mou amb velocitat $v(t(\tau)) = c\tanh \alpha\tau/c$ respecte a Σ:

$$L = L_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = \frac{L_0}{\cosh \alpha\tau/c}$$

En conseqüència:

$$L_0(\tau) = L\cosh\frac{\alpha\tau}{c} \qquad (16)$$

La longitud pròpia de la corda ha d'incrementar-se segons el $\cosh \alpha\tau/c$ i, per tant, ha d'arribar a trencar-se.

Aquest xocant resultat queda explicat si es té en compte la relativitat de la simultaneïtat. Un cop engegats els motors la longitud L es mesura, respecte al sistema original Σ, determinant la posició de les dues naus simultàniament, és a dir, en un mateix instant $t_2 = t_1$ del referencial Σ. Si es transforma el vector diferència dels dos esdeveniments que permeten mesurar L al sistema propi $\Sigma(\tau)$, per la qual cosa sols cal aplicar (11), resulta que:

$$\begin{pmatrix} c(t_2 - t_1) \\ x_2 - x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha\tau/c & -\sinh\alpha\tau/c & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha\tau/c & \cosh\alpha\tau/c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(t_2'-t_1') \\ L_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que condueix a les dues equacions:

$$c(t_2'-t_1')\cosh\alpha\tau/c - L_0\sinh\alpha\tau/c = 0 \qquad (17)$$

$$-c(t_2'-t_1')\sinh\alpha\tau/c + L_0\cosh\alpha\tau/c = 0 \qquad (18)$$

Substituint la primera, (17), que no és sinó la quantificació de la relativitat de la simultaneïtat, en la segona (18), es retroba la (16): $L_0(\tau) = L\cosh\alpha\tau/c$. Ara bé, és lògic que l'observador Σ, que sempre mesura una distància constant L entre les dues naus, es pregunti per què es trenca la corda. Quin fenomen pot explicar-ho, a més a més de l'essencialment cinemàtic de la relativitat de la simultaneïtat? Sols cal que recordem que en l'estructura del món físic no hi ha senyals-interaccions que es puguin propagar a velocitat superior a c, i per tant, el centre de la corda, per exemple, encara restarà en repòs respecte a Σ quan les dues naus ja hauran canviat de posició. Això ha d'implicar la generació d'unes tensions elàstiques en la corda que poden arribar a trencar-la.

Aquesta explicació està directament relacionada amb el problema, no solucionat, de la rigidesa dels sòlids en el món relativista. Un enfocament senzill considera que un sòlid efectua un moviment rígid, si durant el moviment cada element de volum del sòlid es contrau en la direcció del moviment segons el factor de Lorentz instantani, respecte al referencial inercial en què s'estudia el moviment. Per tant, cada element de volum preserva les seves dimensions en els sistemes inercials comòbils. Cosa que demostra que la definició de rigidesa és intrínseca, és a dir, independent del referencial, i que durant el moviment no es generen tensions elàstiques.

Com a aplicació d'un moviment rígid unidimensional considerem una variant del problema acabat de resoldre. En lloc de dues naus, considerem-ne sols una, però de grans dimensions, com les de les novel.les o pel.lícules de ciència-ficció, bé que els resultats i conclusions seran ben reals.

És necessari que la nau disposi de motors en diversos llocs. Per simplificar l'enfocament inicial suposem que tingui motors al darrere (motor 1) i a la capçalera (motor 2).

Pel que s'ha deduït respecte al moviment rígid, els ordinadors de la nau hauran de programar la crema de combustible de forma diferent per a cada motor, de manera tal que la diferència entre les acceleracions pròpies permeti a la nau d'efectuar un moviment rígid. D'aquesta manera no es generaran tensions mecàniques, que podrien arribar a malmetre la nau. El problema es pot plantejar de la manera següent:

Donada la longitud pròpia L_0 de la nau i l'acceleració pròpia α_1 del motor 1, ¿quina acceleració ha de tenir el motor 2 perquè, quan s'engeguin simultàniament en el referencial de la nau, aquesta efectuï un moviment rígid?

Després d'engegats, les línies d'univers dels motors 1 i 2 vénen donades per les equacions (12) i (13)

$$1)\begin{cases} x_1(t) = c^2/\alpha_1\sqrt{1+\alpha_1^2t^2/c^2} \\ y_1(t)=0, \quad z_1(t)=0, \quad t=t \end{cases} \qquad (19)$$

$$2)\begin{cases} x_2(t) = L_0 + c^2/\alpha_1 + c^2/\alpha_2(\sqrt{1+\alpha_2^2t^2/c^2}-1) \\ y_2(t)=0, \quad z_2(t)=0, \quad t=t \end{cases} \qquad (20)$$

On, sense pèrdua de generalitat, s'ha escollit l'origen de coordenades de forma tal que $x_1(0) = c^2/\alpha_1$.

Les corresponents velocitats respecte al referencial original són

$$v_1(t) = \frac{\alpha_1 t}{\sqrt{1+\alpha_1^2t^2/c^2}} = \frac{c^2t}{x_1(t)} \qquad (21)$$

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \frac{\alpha_2 t}{\sqrt{1+\alpha_2^2t^2/c^2}} \\ &= \frac{c^2t}{x_2(t)-(L_0+c^2/\alpha_1-c^2/\alpha_2)} \end{aligned} \qquad (22)$$

Com ja s'ha repetit, perquè la nau efectuï un moviment rectilini rígid, tots els referencials inercials comòbils han de mesurar la mateixa longitud pròpia L_0 que mesura l'inercial propi Σ abans d'engegar els motors. A més a més, el moviment d'un punt de la nau ha de determinar el de la resta de punts, atès que es tracta d'un moviment rectilini; per tant, si t' = constant és la simultaneïtat d'un referencial comòbil arbitrari, s'ha de verificar respecte a Σ que

$$v_1(t_1) = v_2(t_2) = \text{velocitat dels punts de la nau} \qquad (23)$$

sent $(t_1, x_1), (t_2, x_2), (t, x)$ esdeveniments que pertanyen a la simultaneïtat t' =constant.

Analitzant les equacions (21) i (22), es dedueix que (23) es verifica si

$$L_0 + \frac{c^2}{\alpha_1} - \frac{c^2}{\alpha_2} = 0$$

Aïllant α_2 resulta que:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1L_0/c^2} < \alpha_1 \qquad (24)$$

En conseqüència,

$$\frac{c^2t_1}{x_1} = \frac{c^2t_2}{x_2} = \cdots = \frac{c^2t}{x} = v \qquad (25)$$

Les succesives simultaneïtats de la nau són, en el pla (t, x), rectes que passen per l'origen, i totes les línies d'univers de les partícules de la nau són hipèrboles que tenen el mateix horitzó de succesos $x = \pm ct$. La part de l'espai-temps minkowskià observat per aquests astronautes és l'anomenat univers de Rindler, que posseeix característiques comunes amb l'espai-temps generat pels forats negres de Schwarzschild.

Sols resta comprovar que es tracta d'un moviment rígid. Per fer- ho, determinem la longitud de la nau en un referencial comòbil arbitrari Σ' : $L' = x'_2 - x'_1$. Si ara passem al referencial Σ, tenint en compte que L' es mesura per un $t' = t'_2 = t'_1$, s'obté que:

$$L' = x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\gamma}(x_2 - x_1) \tag{26}$$

i sols cal calcular x_2 i x_1, tenint en compte les equacions (19), (20), (24) i (25)

$$x_1^2 - c^2 t_1^2 = \frac{c^4}{\alpha_1^2} \qquad c^2 t_1 = v x_1$$

$$x_2^2 - c^2 t_2^2 = \frac{c^4}{\alpha_2^2} \qquad c^2 t_2 = v x_2 \tag{27}$$

on es dedueix que $x_2 = \gamma c^2/\alpha_2$ i $x_1 = \gamma c^2/\alpha_1$. Substituint en (26) s'obté el resultat esperat

$$L' = x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\gamma}\gamma c^2 (\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1}) = L_0 = \text{constant.}$$

Per finalitzar aquest article determinarem com es comporten els rellotges dels astronautes.

L'interval temporal t_1 transcorregut, respecte a Σ, fins que el motor 1 assoleix la velocitat v, es pot deduir de l'equació (27)

$$t_1 = \frac{\gamma v}{\alpha_1}$$

Anàlogament, per al motor 2 es verifica que

$$t_2 = \frac{\gamma v}{\alpha_2}$$

Diferenciant-les,

$$dt_1 = \frac{d(\gamma v)}{\alpha_1} \qquad dt_2 = \frac{d(\gamma v)}{\alpha_2}$$

s'obtenen els intervals infinitesimals perquè v s'incrementi en dv. Per tant, la relació entre aquestes sols depèn de les acceleracions pròpies:

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{28}$$

Els corresponents intervals propis, p.e., mesurats pels astronautes, són

$$d\tau_1 = dt_1\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$d\tau_2 = dt_2\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Substituint-les en (28) i tenint en compte (24), s'obté que:

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{1}{1 + L_0\alpha_1/c^2} < 1 \tag{29}$$

El rellotge del darrere va més lentament que el de capçalera. Els astronautes de la part posterior de la nau s'envelliran més lentament. (En els futurs viatges espacials segur que hi ubicaran els viatgers de primera classe o els VIP).

Si la nau és suficientment petita perquè sigui vàlida l'aproximació $\alpha_1 \sim \alpha_2 = g$, llavors

$$d\tau_2 = d\tau_1(1 + L_0 g/c^2)$$

Aquesta expressió es retroba a la relativitat general quan s'estudia l'efecte d'un camp gravitatori sobre el ritme d'un rellotge.

Deixem per a un altre article l'anàlisi dels fenòmens electromagnètics descrits i mesurats per observadors accelerats. Anticipem que ens trobarem amb sorpreses i malentesos que malauradament encara perduren.

Nota

Aquest pretén ser un treball que l'apreciat i recordat per tots els seus companys, Dr. Jaume Aranda Oliveres, ens va suggerir que escrivíssim, poc abans de deixar-nos. Desitjaríem haver merescut la seva aprovació i que fos del seu grat; almenys hem procurat ser fidels a les seves indicacions quant al nivell i al contingut.

Referències

BOWLER, M.G., *Lectures on special Relativity*, Pergamon Press (1986).
RINDLER, W., *Essential Relativity*, segona edició, Springer-Verlag (1977).
ELLIS, G. i WILLIAMS, R.H., *Flat and Curved Space-times*, Clarendon-Press. Oxford (1988).
ARZELIÈS, H., *Relativistic Kinematics*, Pergamon Press (1966).
BONDI, H., Relativity, *Reports on Progress in Physics*, **22**, 97 (1959).