# La física en problemes

Salvador Estradé i Jordi Vives

Tal com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

En cada número de la *Revista* hi haurà dos problemes proposats: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i es premiarà els guanyadors amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

Acompanyant la solució, l'estudiant ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 de gener de 2007 a:

probuni@ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

## Problema per a l'alumnat de batxillerat

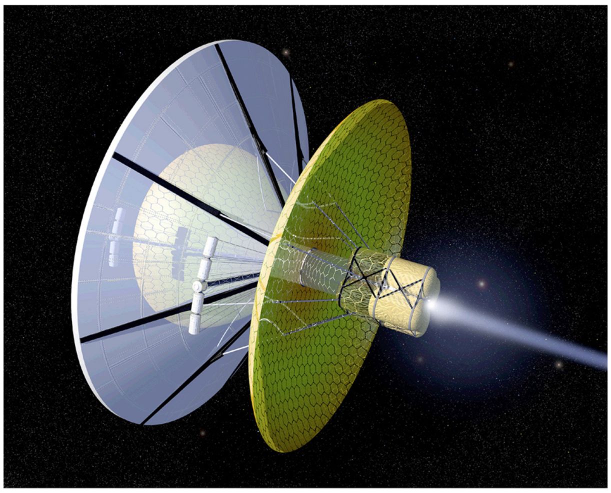
Un protó ($m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg i $q = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C) incideix sobre un altre protó fix en un determinat punt de l'espai. Si s'acosta des d'una distància inicial molt gran (pràcticament infinita) amb una velocitat de 5 km/s, quina serà la mínima distància d'apropament entre les dues càrregues? Quina seria la resposta si el segon protó, en lloc d'estar fix, fos una partícula lliure inicialment en repòs?

Dada: la constant elèctrica en el buit val $9 \cdot 10^9$ N m$^2$ C$^{-2}$.

## Problema per a l'alumnat universitari

El ramjet o estatocol·lector és un tipus de vehicle interestel·lar proposat per Robert W. Bussard el 1960, que la ciència-ficció ha fet servir àmpliament.

El funcionament d'aquesta nau es basa en el fet que utilitza com a combustible l'hidrogen present en el buit interestel·lar. Fent servir un immens camp magnètic de desenes de quilòmetres de radi a la proa de la nau s'atrau i es concentra l'hidrogen que es troba al seu pas. Al nucli de la nau se situa la cambra de fusió on es produeix la reacció de fusió de l'hidrogen. El gas resultant de la fusió surt a alta pressió i temperatura a través d'una tovera a la popa de la nau, propulsant-la.



Per definició un estatoreactor, i suposarem que el nostre estatocol·lector funciona igual, no té compressor. Només consta d'un difusor on el gas es frena fins a una velocitat molt petita, la cambra de combustió on el gas s'escalfa a pressió constant i la tovera de sortida.

Un difusor o tovera ideal, on $Q = 0$ i $W = 0$ (procés adiabàtic), amb un flux de gas estacionari compleix el balanç d'energies següent

$$\dot{H}_1 + \dot{E}_1 = \dot{H}_2 + \dot{E}_2$$

i l'equació de continuïtat

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2.$$

Els índexs 1 i 2 es refereixen a les superfícies d'entrada i sortida. $\dot{H}_n$, $\dot{E}_n$ i $\dot{m}_n$ són l'entalpia, l'energia cinètica i la massa per unitat de temps del gas que travessa la superfície $n$.

1) Donada la variació d'entalpia en funció de la velocitat de la nau. Calculeu la temperatura i la densitat molar (mol/m$^3$) del gas a l'entrada de la cambra de fusió. Considereu el gas interestel·lar com un gas ideal

monoatòmic format només per hidrogen, amb densitat d'1 àtom per $cm^3$ i temperatura de 3 K.

2) Si la reacció de fusió D + D és la principal font d'energia, es pot estimar l'energia per mol obtinguda a la cambra de fusió com

$$\frac{\Delta Q}{n} = \kappa \frac{n}{V} \qquad \kappa = 6.39 \times 10^5 \frac{\mathrm{Jm}^3}{\mathrm{mol}^2},$$

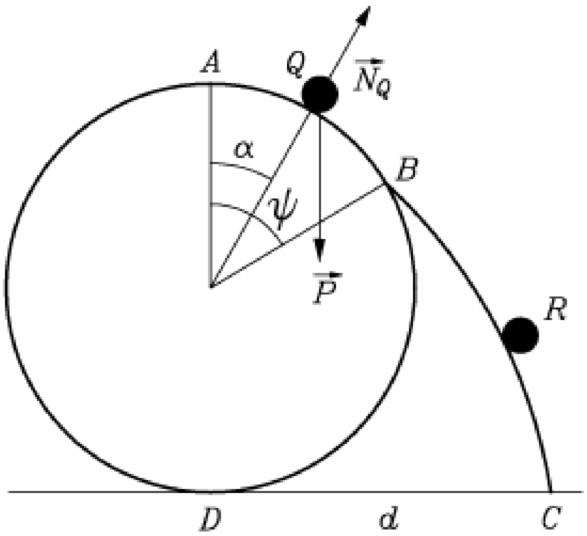
calculeu l'increment de temperatura del gas.

3) Calculeu la temperatura de sortida del gas per la tovera, la velocitat d'escapament i la potència generada per la nau. Tingueu en compte la dada següent: el camp magnètic forma un disc de 50.000 km de diàmetre.

## Solució als problemes del número 30 de la *Revista*

**Del problema per a l'alumnat de batxillerat**

Com que no hem rebut cap resposta suficientment correcta, donem la nostra solució:




En qualsevol punt $Q$ del trajecte circular $AB$ es compleix:

$$mg\cos\alpha - N_Q = m\frac{v^2}{R}.$$

D'altra banda, es conserva l'energia mecànica del cos entre els punts $A$ i $Q$:

$$mg2R = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1+\cos\alpha).$$

En el punt $B$, en què el cos se separa de la guia circular, $N_B = 0$ i les equacions anteriors queden:

$$\begin{aligned} mg\cos\varphi &= m\frac{v_B^2}{R} \\ mg2R &= \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR(1+\cos\varphi). \end{aligned}$$

Resolent el sistema format per aquestes dues equacions, s'obté: $\varphi = 48{,}2^o$ i $v_B = 2{,}56$ m/s.

El tram $BC$ següent és parabòlic. Si agafem com a origen de coordenades el punt $D$, les coordenades d'un punt qualsevol $R$ d'aquesta trajectòria vénen donades per:

$$\begin{aligned} x &= R\sin\varphi + v_B\cos\varphi t \\ y &= R(1+\cos\varphi) - v_B\sin\varphi t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Per al punt $C$ es compleix que $y_C = 0$ i $x_C = d$ i, per tant, les equacions anteriors quedaran:

$$\begin{aligned} d &= R\sin\varphi + v_B\cos\varphi t \\ 0 &= R(1+\cos\varphi) - v_B\sin\varphi t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Substituint els valors obtinguts anteriorment per a $\varphi$ i per a $v_B$ en aquest sistema i resolent-lo, obtenim que $d$ val 1,46 m.

**Del problema per a l'alumnat universitari**

Solució enviada per Eduard Fugarols, estudiant de la Facultat de Física de la Universitat de Barcelona:

### La física de l'Astroblaster

En deixar anar la joguina des d'una certa alçada, les quatre boles cauen en caiguda lliure, i podem considerar, a efectes de millor visualització, que entre elles hi ha un petit espai de separació.

Com a hipòtesi–model del problema, podem suposar que el xoc global de la joguina en arribar al terra és el resultat d'una sèrie de xocs seqüencials i independents. Diem *xoc seqüencial* per referir-nos al fet que cada bola xoca amb la bola immediatament inferior per, tot seguit, xocar amb la immediatament superior. *Independent* perquè entenem que podem tractar el problema com a tres xocs aïllats. A tot això, se li afegeix el fet que els xocs són unidimensionals i elàstics, tal com especifica l'enunciat.

Finalment, sembla raonable tractar les boles com a partícules puntuals, ja que esperem que la bola petita assoleixi una alçada considerablement superior als radis de les boles.

### Xoc entre dues boles

Comencem estudiant el problema de xoc unidimensional (i frontal) entre dues boles, considerades com a partícules puntuals.

Agafem el sentit positiu de les velocitats *cap amunt*. La bola superior, $B$, cau i la bola inferior, $A$, puja, així que les seves velocitats són $-v_B$ i $v_A$. Les velocitats immediatament després del xoc, que desconeixem, les anomenem $u_A$ i $u_B$.

Aplicant la conservació del moment lineal i de l'energia cinètica, obtenim

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m_A v_A^2 + m_B v_B^2 & = & m_A u_A^2 + m_B u_B^2 \\ m_A v_A - m_B v_B & = & m_A u_A + m_B u_B . \end{array} \right. \tag{1}$$

Aquest sistema d'equacions es pot simplificar en:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m_A v_A - m_B v_B & = & m_A u_A + m_B u_B \\ v_A + v_B & = & u_B - u_A . \end{array} \right. \tag{2}$$

La solució del sistema 2 és

$$\left. \begin{array}{rcl} u_A & = & \dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A - 2\dfrac{m_B}{m_A + m_B} v_B \\ u_B & = & 2\dfrac{m_A}{m_A + m_B} v_A + \dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_B \end{array} \right\} . \tag{3}$$

## Primer xoc: primera bola amb el terra

La bola gran, de massa $m_1$, arriba al terra amb velocitat $v_1 \equiv v$, comuna a la velocitat de la resta de boles, gràcies a la caiguda lliure —fixem-nos que totes les boles cauen la mateixa distància $h$, per tant $v = \sqrt{2gh}$ és la mateixa per a totes elles. En el moment en què la bola pren contacte amb el terra, s'inverteix el seu vector velocitat i la bola ascendeix, per donar lloc al xoc entre la primera i segona bola.

Matemàticament, per utilitzar les equacions 3, podem considerar el terra com una segona partícula amb $v_2 = 0$ i $m_2 \to \infty$, de manera que la solució és $u_1 = 0$, $u_2 = v$. El terra no es mou i la bola gran puja amb la mateixa velocitat de baixada, tal com esperàvem.

Després del xoc de la bola gran amb el terra, tenim una sèrie de xocs frontals entre les diferents boles de la joguina. Durant aquests xocs, podem negligir els efectes de la gravetat, de manera que les boles superiors descendeixen amb la mateixavelocitat $v$.

## Xoc entre la primer i la segona bola

El primer d'aquests xocs és el de la bola gran, de massa $m_1$ i velocitat $v$, amb la segona bola, de massa $m_2$ i velocitat $-v$. Les velocitats $u_1$ i $u_2$ després del xoc són, segons 3,

$$\left. \begin{array}{rcl} u_1 & = & \dfrac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v \\ u_2 & = & \dfrac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \end{array} \right\} . \tag{4}$$

Dividint per $m_1$, i introduint el factor de proporció $n_{21} \equiv m_2/m_1$ (amb $0 \leq n_{21} \leq 1$, ja que les boles superiors són menys massives), la solució adopta la forma

$$\left. \begin{array}{rcl} u_1 & = & \dfrac{1 - 3n_{21}}{1 + n_{21}} v \\ u_2 & = & \dfrac{3 - n_{21}}{1 + n_{21}} v \end{array} \right\} . \tag{5}$$

Fixem-nos que les velocitats finals de les boles depenen de la *proporció* de les seves masses i no de cadascuna d'elles per separat. També depèn de la velocitat *inicial* $v$, que correspon, en definitiva, a l'alçada des de la qual desprenem la joguina. A més, tenim un lligam entre les dues velocitats. Aquest lligam surt del factor de simetria trobat a 2, que en aquest cas és $2v$. Fixem-nos que això concorda amb les equacions obtingudes.

En efecte,

$$u_2 - u_1 = 2v. \tag{6}$$

Fixant-nos una mica més en les equacions 5, veiem que les velocitats de la bola superior i la inferior es modifiquen en una proporció donada. Podem pensar aquestes proporcions en termes de factors adimensionals de *guany* de velocitats, que depenen únicament de $n_{21}$.

La velocitat de la segona bola (superior) es modifica en un factor

$$a_{21} \equiv \frac{3 - n_{21}}{1 + n_{21}} \tag{7}$$

i la de la primera bola (inferior) es modifica en un factor

$$b_{12} \equiv \frac{1 - 3n_{21}}{1 + n_{21}} . \tag{8}$$

Segons el valor de $n_{21}$, els guanys $a_{21}$ i $b_{12}$ prendran valors diferents, sempre lligats per un *paral·lelisme* entre si: $a_{21} - b_{12} = 2$. El factor de guany $b_{12}$ de la bola inferior té un rang de valors $-1 \leq b_{12} \leq 1$, de manera que la velocitat té un mínim i màxim permesos; a més, en aquest cas, el *guany* de velocitats és en realitat una *pèrdua*. El factor de guany $a_{21}$ de la bola superior té un rang de valors $1 \leq a \leq 3$, de manera que aquesta velocitat també té uns extrems permesos.

Parem especial atenció a *tres* valors particulars de $n_{21}$:

- $n_{21} = 0 \Rightarrow a_{21} = 3$, $b_{12} = 1$
- $n_{21} = 1/3 \Rightarrow a_{21} = 2$, $b_{12} = 0$
- $n_{21} = 1 \Rightarrow a_{21} = 1$, $b_{12} = -1$ .

Com veiem, quan la bola superior és negligible en relació amb la inferior, la bola inferior no es veu afectada pel xoc, i la bola superior assoleix fins al triple de la velocitat inicial. Quan les dues boles són iguals, s'inverteixen les velocitats.

Finalment, hi ha un cert valor de $n_{21}$, una relació de masses particular, que fa que la bola inferior assoleixi velocitat nul·la després del xoc, i que la superior surti disparada amb el doble de velocitat. A causa de la rapidesa del xoc, podem suposar que això passa a una distància ínfima del terra i que, per tant, la bola inferior es queda completament parada.

Aquesta relació de massa és 1/3.

Podem veure les observacions anteriors en la figura 1, on hem representat els guanys $a_{21}$ i $b_{12}$ en funció de $n_{21}$.

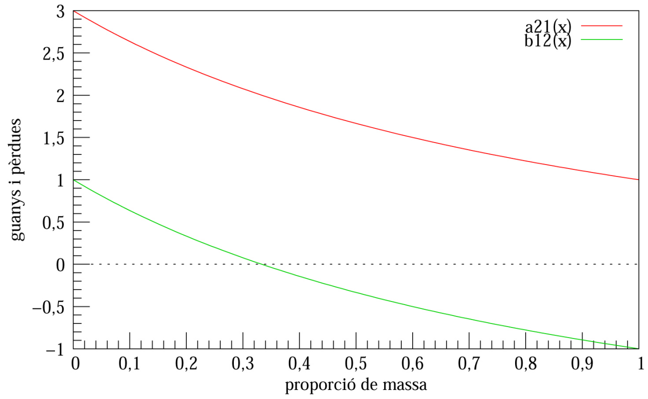



Figura 1: Variacions de velocitat per al xoc 1–2

## Xoc entre la segona i la tercera bola

Els xocs següents xocs són molt semblants a l'anterior. La diferència essencial rau en la velocitat d'ascensió de les boles inferiors: ara ja no serà $v$, sinó un nou valor variable per a cada parella de boles. Això fa que no puguem tornar a aplicar les equacions 5, sinó que haurem d'aplicar 3. El factor de simetria tampoc serà $2v$, ja que només es conserva *durant* el xoc.

Tal com hem fet a 5, introduint el factor de massa $n_{BA} \equiv m_B/m_A$, les equacions queden

$$\left.\begin{aligned} u_A &= \frac{1-n_{BA}}{1+n_{BA}}v_A - \frac{2n_{BA}}{1+n_{BA}}v_B \\ u_B &= \frac{2}{1+n_{BA}}v_A + \frac{1-n_{BA}}{1+n_{BA}}v_B \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Aquestes són les equacions que ens serviran per a la resta de xocs. La velocitat inicial de la bola $B$ sempre és $-v$, mentre que la velocitat inicial de la bola $A$ augmentarà a cada xoc. Les velocitats $u_A$ i $u_B$ són les velocitats finals que volem trobar.

Una petita observació pel que fa a la notació: la velocitat *final* de la bola superior en el xoc anterior (i.e., la velocitat $u_2$ de la segona bola, expressada per la fórmula 5) ara serà la velocitat *inicial* de la segona bola en el nou xoc. Per evitar confusions en la notació, redefinirem la $u_2$ anterior per $v_2$, reservant $u_2$ per a la nova velocitat.

En aplicar aquestes equacions a un xoc determinat, trobarem dues velocitats $u_A$ i $u_B$ proporcionals a $v$. Igual que abans, definim aquests factors de proporció com els guanys de velocitat de les boles $A$ i $B$.

Tornant al xoc que ens ocupa, les velocitats de la segona i la tercera bola després del xoc seran, utilitzant 9 i tenint en compte que $v_2 = a_{21}\, v$,

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1-n_{32}}{1+n_{32}}v_2 - \frac{2n_{32}}{1+n_{32}}v = \frac{a_{21}-(a_{21}+2)n_{32}}{1+n_{32}}v \\ u_3 &= \frac{2}{1+n_{32}}v_2 + \frac{1-n_{32}}{1+n_{32}}v = \frac{1+2a_{21}-n_{32}}{1+n_{32}}v. \end{aligned} \tag{10}$$

## Xoc entre la tercera i la quarta bola

Repetim exactament el mateix procediment que per al xoc anterior: aplicant 9 i tenint en compte que $v_3 = a_{32}v$,

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{1-n_{43}}{1+n_{43}}v_3 - \frac{2n_{43}}{1+n_{43}}v = \frac{a_{32}-(a_{32}+2)n_{43}}{1+n_{43}}v \\ u_4 &= \frac{2}{1+n_{43}}v_3 + \frac{1-n_{43}}{1+n_{43}}v = \frac{1+2a_{32}-n_{43}}{1+n_{43}}v \end{aligned}. \tag{11}$$

## Relacions de massa diferents

Presentem, a mode de resum, els guanys de velocitat de cada bola involucrada en cadascun dels tres xocs diferents.

### Xoc 1–2

$$a_{21} = \frac{3-n_{21}}{1+n_{21}}, \qquad b_{12} = \frac{1-3n_{21}}{1+n_{21}}. \tag{12}$$

### Xoc 2–3

$$a_{32} = \frac{1+2a_{21}-n_{32}}{1+n_{32}}, \qquad b_{23} = \frac{a_{21}-(a_{21}+2)n_{32}}{1+n_{32}}. \tag{13}$$

### Xoc 3–4

$$a_{43} = \frac{1+2a_{32}-n_{43}}{1+n_{43}}, \qquad b_{34} = \frac{a_{32}-(a_{32}+2)n_{43}}{1+n_{43}}. \tag{14}$$

Aquestes expressions donen els guanys $a_{i,i-1}$, $b_{i-i,i}$ d'una parella de boles $i$ (superior) i $i-1$ (inferior) en un cert xoc, en funció del guany de la bola superior del xoc anterior, $a_{i-1,i-2}$. Com és natural, la bola inferior (guany $b_{i-2,i}$) no participa en el guany de la bola superior $b_{i-i,i}$ del xoc següent (una bola, després del xoc, ja no té cap paper en els xocs posteriors).

## Relació de massa constant

Si la proporció de masses $n_{i,i-1}$ entre dues boles $i$ i $i-1$ qualssevol fos constant, podríem encadenar els guanys fins a arribar al guany inicial 7 de la segona bola. Així, el guany d'una bola en un xoc qualsevol dependrà, únicament, de $n$. Vegem-ho:

### Xoc 1–2

$$a_2 = \frac{3-n}{1+n}, \qquad b_1 = \frac{1-3n}{1+n}. \tag{15}$$

**Xoc 2–3**

$$a_3 = \frac{1+2a_2-n}{1+n} = \frac{1+2\left(\frac{3-n}{1+n}\right)-n}{1+n} = \frac{7-2n-n^2}{(1+n)^2}. \quad (16)$$

$$b_2 = \frac{a_2-(a_2+2)n}{1+n}\,v = -\frac{n^2+6n-3}{(n+1)^2}. \quad (17)$$

**Xoc 3–4**

$$a_{43} = \frac{1+2\left(\frac{7-2n-n^2}{(1+n)^2}\right)-n}{1+n} = -\frac{n^3+3n^2+3n-15}{(1+n)^3} \quad (18)$$

$$b_3 = \frac{a_3-(a_{32}+2)n}{1+n}\,v = -\frac{3n^2+12n-7}{(n+1)^3}. \quad (19)$$

## Astroblaster

Ara que ja tenim el problema modelitzat matemàticament, el descriurem físicament i calcularem el que ens demanen.

### Seqüència d'esdeveniments

Deixem caure, paral·lelament al terra, una joguina Astroblaster (*defectuosa*, amb $n$ constant) des d'una certa alçada inicial. Les quatre boles descendeixen en caiguda lliure, fins que la bola gran (primera bola) pren contacte amb el terra; en aquest moment, s'inverteix instantàniament la velocitat de la bola en qüestió i ascendeix una *petita* distància de separació fins a xocar amb la segona bola. Tenim el primer dels tres xocs sequencials: la primera bola *perd* velocitat i la segona en guanya, de manera que surt disparada amb una velocitat fins a tres vegades superior a la inicial. Aquesta segona bola, a pesar de ser més veloç, no recorre gaire distància fins a xocar amb la tercera bola. Després d'aquest xoc, la segona bola perd velocitat (a pesar de poder ser *major* que la velocitat inicial) i la tercera en guanya, de manera que surt disparada amb una velocitat fins a set vegades superior a la inicial. Aquesta ascendeix una mica més, per xocar amb la quarta i última bola, que surt disparada a gran alçada amb una velocitat fins a quinze vegades la velocitat inicial.

En el nostre Astroblaster, que està dissenyat amb una relació de masses *diferent* per a cada parella de boles, la seqüència d'esdeveniments és lleugerament diferent: les boles s'aturen completament després de xocar amb la bola superior.

Compte: el fet que les boles es quedin *parades* no vol dir que la bola superior surti disparada amb la velocitat *màxima* permesa; això només passaria si la massa de cada bola fos *negligible* en relació amb la respectiva bola inferior, i òbviament és molt irreal.

Això sembla lògic tenint en compte el factor de simetria: si volem que la velocitat de la bola superior augmenti, també haurem d'augmentar la velocitat de la bola inferior, i no pas disminuir-la ni anul·lar-la. Totes aquestes observacions es poden veure en la gràfica de la figura 2, on hem representat els guanys de totes les boles.

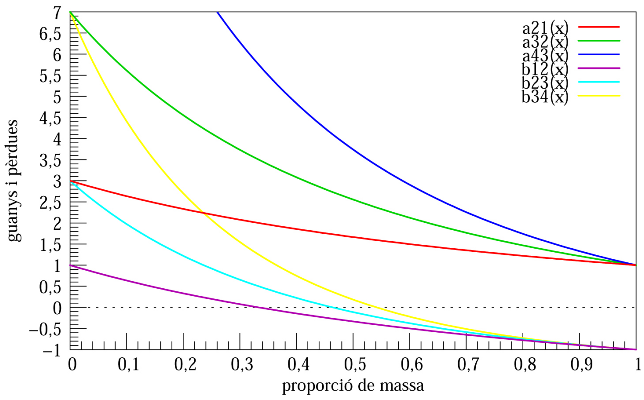



Figura 2: Guanys de velocitat enfront una relació de massa $n$ constant

### Alçada màxima per $n$ constant

Per saber l'alçada que assolirà la bola més petita, la quarta bola, senzillament hem de substituir la proporció de massa $n$ en l'equació 18 per trobar el guany de velocitats $a_{43}$. Quan tenim el guany, trobem la velocitat fent $v_4 = a_{43}v$. Finalment podem trobar l'alçada màxima aplicant conservació de l'energia

$$h_4 = \frac{v_4^2}{2g} = a_{43}^2\,\frac{v^2}{2g} = a_{43}^2\,h_0.$$

Així doncs, veiem que l'alçada assolida per la bola petita depèn únicament de l'alçada inicial i del *quadrat* del guany de velocitats de la bola en qüestió.

Més concretament, l'alçada depèn de l'alçada inicial i de la proporció de masses $n$ entre dues boles consecutives qualssevol.

- Per una proporció de masses d'1/3, i llançant la joguina des d'1 metre d'alçada, la bola petita arriba fins a una alçada de $(23/4)^2 \approx 33$ metres.
- Per una proporció de masses d'1/4, i llançant la joguina des d'1 metre d'alçada, la bola petita arriba fins a una alçada de $(899/125)^2 \approx 51,7$ metres.

Com a observació, si cada bola fos negligible en relació amb la bola inferior, tindríem una alçada màxima de $15^2 = 225$ metres. Naturalment, la nostra joguina no salta tant!

## Alçada màxima quan les tres boles grans es queden parades al terra

Aquesta és una situació, a priori, poc intuïtiva. Com pot ser que les tres pilotes inferiors es quedin *enganxades* al terra? Bé, això en general *no* és així, però sí que hi ha una certa relació de masses, diferent per a cada parella de boles, que ho fa possible.

El que hem d'imposar és, per a les tres parelles de boles, que la velocitat de la bola inferior sigui zero després del xoc. Això ho podem fer simplement fent $u_A = 0$ en les equacions 9, o bé fent $b_{i,i+1} = 0$ per $i = 1, 2, 3$ en les equacions 15, 17 i 19. De qualsevol manera, obtenim les relacions de massa $n_{21}$, $n_{32}$ i $n_{43}$ necessàries per aturar la primera, la segona i la tercera bola.

Així, la configuració de la joguina per tal que les tres boles inferiors es quedin perfectament enganxades al terra és aquesta:

- La relació de massa entre la primera i la segona bola és $n_{21} = \frac{1}{3}$.
- La relació de massa entre la segona i la tercera bola és $n_{32} = \frac{1}{2}$.
- La relació de massa entre la tercera i la quarta bola és $n_{43} = \frac{3}{5}$.

Per aquestes proporcions de masses, i llançant la joguina des d'1 metre d'alçada, la bola petita arriba fins a una alçada de $(4)^2 = 16$ metres.