

Identificació i caracterització òptica de sòlids monocristal·lins i gemmes, birefringents transparents i facetats

Josep Graells*, Carme Martín† i Antonio J. Ruiz‡
Grup GEMMAT. Museu de Ciències La Salle Gràcia

Introducció

Els mètodes experimentals en òptica cristallina clàssica se centren en la mesura dels índexs de refracció principals, la posició dels eixos òptics i l'observació i anàlisi de les figures d'interferència. Amb aquestes dades immediatament es quantifica i determina el caràcter òptic del monocristall, és a dir, si és isòtrop, uniaxial (positiu o negatiu) o biaxial (positiu o negatiu). Per a una caracterització òptica més completa s'han d'observar i mesurar les propietats associades als fenòmens de dispersió i absorció de la llum pel monocristall; per exemple, mesurar com la birefringència i l'angle entre els eixos òptics depenen de la freqüència de la llum. I pel que fa als fenòmens d'absorció o dissipatius, cal analitzar, per exemple, els espectres d'absorció, el pleocroisme orientat segons els eixos principals, etc.

La determinació de les magnituds òptiques esmentades és de gran ajut per a la caracterització física i la identificació consegüent dels cristalls birefringents ja que, com és a bastament conegut des del final del segle XIX, redueix sensiblement el nombre d'espècies a què pot pertànyer la mostra objecte d'estudi i, fins i tot, en molts casos, permet identificar-la unívocament. A més, constitueix una via experimental no destructiva, en contraposició, per exemple, a l'anàlisi mitjançant difracció de raigs X; anàlisi sovint inviable en el camp de la gemmologia, en què generalment no és factible destruir la mostra.

En els apartats següents s'explica la metodologia,

***Josep Graells** (Cervera, 1946) és pèrit industrial elèctric per l'Escola d'Enginyeria Tècnica Industrial de Terrassa (1967) i doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1978). Col·laborador del Departament de Física Aplicada i Òptica de la Universitat de Barcelona.

†**Carme Martín** (Barcelona, 1950) és doctora en Física per la Universitat de Barcelona (1981). Col·laboradora del Departament de Física Aplicada i Òptica de la Universitat de Barcelona i professora del col·legi La Salle Gràcia.

‡**Antonio J. Ruiz** (Almeria, 1959) és diplomad en Gemmologia (1989), especialista en Diamant per la Universitat de Barcelona i per la Gemological Association of Great Britain, FGA (1990), gemmòleg europeu (EG) per la FEEG (1996), coordinador del grup GEMMAT, professor i membre de la comissió científica del COJORG.

l'estructura i el conjunt d'operacions de l'aplicació refractoconoscòpica GEMMAT que hem desenvolupat. S'ha dissenyat de manera que, amb un nombre mínim de mesures, s'obtingui la màxima informació de les propietats òptiques dels monocristalls birefringents i transparents, amb l'objectiu final d'identificar-los (vegeu la figura 1).

En l'apèndix es presenta un resum d'òptica electromagnètica clàssica dels medis transparents en el qual es recorden els fonaments teòrics elementals que fonamenten els desenvolupaments i principals aplicacions del present article.

Estructura i metodologia de l'aplicació refractoconoscòpica GEMMAT

En els esquemes de les figures 1 i 2 s'exposen d'una manera sintètica l'estructura i la metodologia de l'aplicació. S'hi expliciten les mesures que s'han de fer, els resultats automàtics que se n'obtenen i l'anàlisi teòrica, també automàtica, que se'n deriva.

En la figura 1 es detallen la nomenclatura i les magnituds que s'empren en tot l'article i en la figura 2, el diagrama de flux que relaciona les mesures amb la metodologia de càlcul GEMMAT. El conjunt d'operacions del contingut de les figures 1 i 2 queda reflectida en les dues fitxes, anomenades *experimental* i *teòrica*, exposades en el tercer apartat.

L'aplicació refractoconoscòpica GEMMAT està implementada (actualment) en un arxiu d'Excel i es documenta en les dues fitxes, ja esmentades, experimental i teòrica. Es pot utilitzar l'aplicació encara que no es conegui la formulació matemàtica de l'òptica electromagnètica clàssica dels medis anisòtrops; però, i sols per als lectors interessats en aquest domini bonic de la física clàssica, es presenta, en l'apèndix, un resum elemental dels fonaments físicomatemàtics que s'han fet servir.

S'ha de tenir molt present que els aparells de mesura emprats (vegeu les fotografies de les figures 3, 4 i 5) imposen limitacions a les mostres que s'han d'analitzar. Per exemple, en utilitzar un refractòmetre gemmològic de tipus estàndard, els monocristalls transparents han de disposar d'una superfície plana i llisa, i les gemmes,

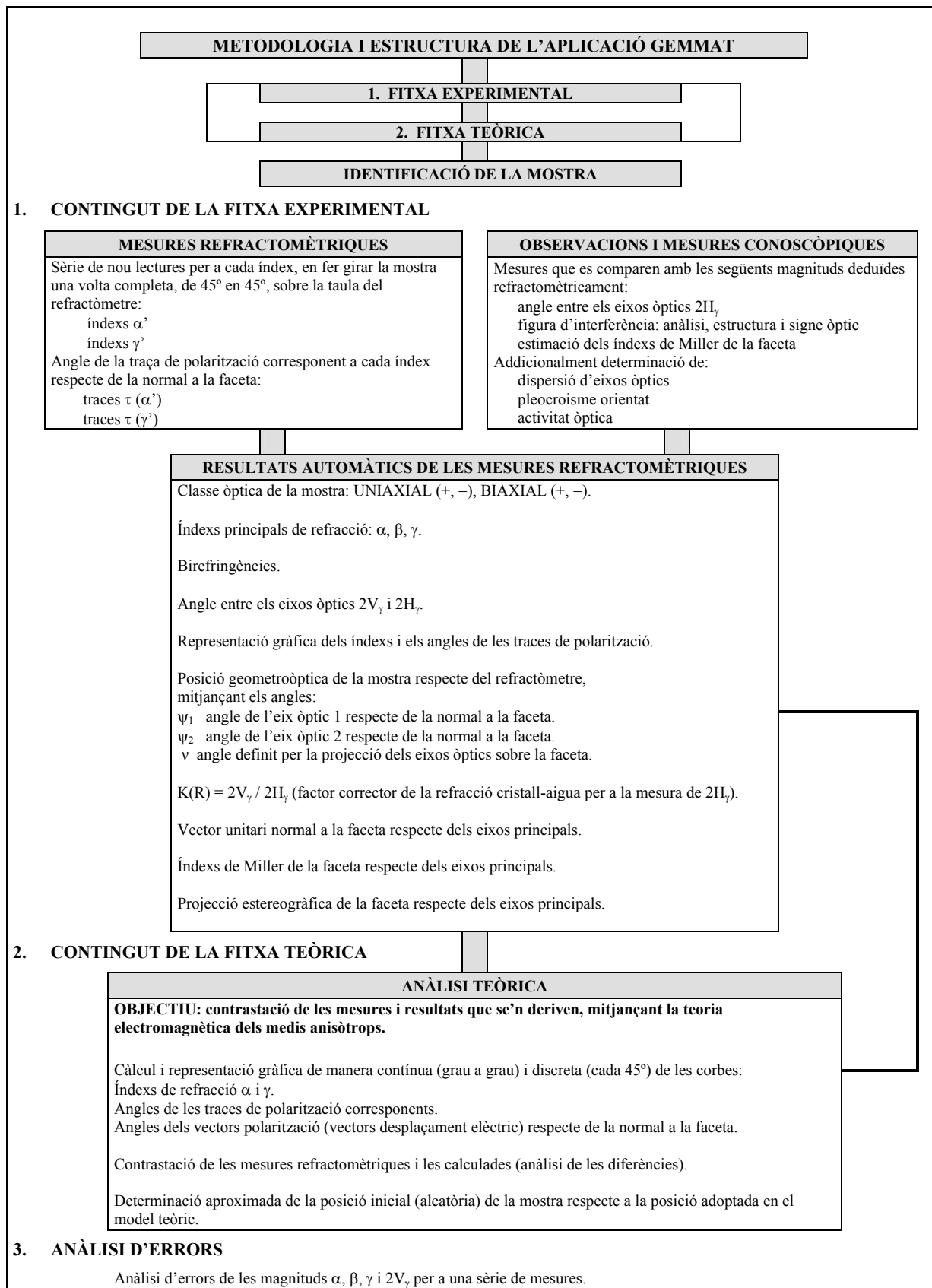


Figura 1: Esquema de l'aplicació refractoconoscòpica GEMMAT per a la identificació i caracterització de monocristalls i gemmes birefringents, transparents i facetats

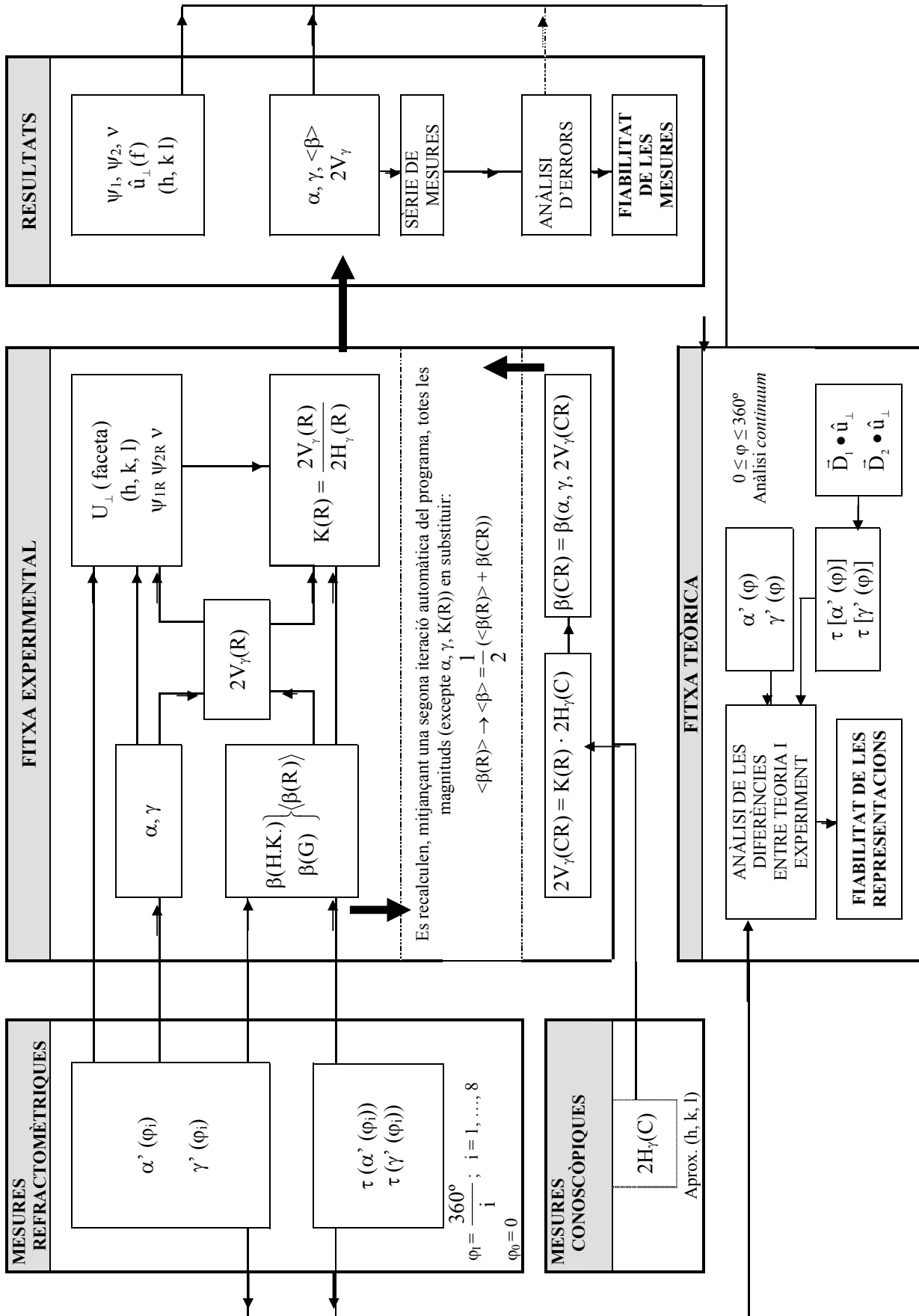


Figura 2: Estructura logicorelacional entre les mesures, els càlculs i els resultats en l'aplicació GEMMAT

Figura 3: *Polariscopi*

Figura 5: *Conoscopi Figueras 93*

Figura 4: *Refractòmetre gemmològic*

com a mínim, han de tenir una faceta. Les dimensions de la superfície plana o faceta poden variar d'uns $3 \times 3 \text{ mm}^2$ a uns $20 \times 20 \text{ mm}^2$, i els índexs de refracció han de ser inferiors a 1,78.

L'aplicació GEMMAT incorpora el conoscopi Figueras 93 perquè el considerem per als nostres objectius un excel·lent equip d'observació, encara que sigui un aparell de mesura limitat i a vegades poc fiable. Alhora, les mesures conoscòpiques sempre resten controlades per les precises mesures refractomètriques i els càlculs que se'n deriven. En l'apartat següent s'expliquen dos exemples pràctics per il·lustrar el conjunt d'operacions de l'aplicació que s'ha de seguir i el seu contingut.

Conjunt d'operacions de l'aplicació GEMMAT. Exemples pràctics

Per tal d'exemplificar el conjunt d'operacions i el contingut de l'aplicació, s'han escollit dues gemmes facetades i transparents, de dimensions adequades, segons s'ha explicat en l'apartat anterior. Com és pràctica habitual, s'escull la faceta principal o taula per efectuar les me-

sures refractomètriques. L'observació ortoscòpica de les pautes d'extincions mitjançant un polariscopi gemmològic (figura 3) amb la qual s'inicia l'aplicació permet comprovar que ambdues mostres són birefringents. Tot seguit s'explicita el detall del conjunt d'operacions subsegüent en les corresponents fitxes experimental i teòrica, reproduïdes en les quatre pàgines següents, corresponents a les dues gemmes problema.

Les úniques dades experimentals que s'han d'introduir en l'aplicació són les nou mesures dels índexs de refracció i les corresponents traces de polarització per als índexs petit i gran, així com l'angle $2H_\gamma$ mesurat conoscòpicament (vegeu les figures 1 i 2).

Cal remarcar que en aquests exemples, com també en molts d'altres, és possible mitjançant aquesta aplicació deduir, a partir de l'anàlisi integral de les dades, la identificació unívoca de les mostres. En el nostre cas són un beril (U-) i un topazi (B+); la figura 6 és una fotografia d'ambdues gemmes. En les figures 7, 8, 9 i 10, s'exposen les fotografies de les corresponents figures d'interferència, obtingudes amb el conoscopi indicat en la figura 5, emprant llum blanca.

Les figures 7 i 8, corresponents al beril, mostren la típica figura d'interferència uniaxial; a més la figura 8, obtinguda intercalant un retardador de 1.100 nm, ratifica que el beril és uniaxial negatiu.

Les figures 9 i 10 del topazi mostren figures d'interferència biaxials típiques, centrades en un eix òptic i obtingudes amb diferent intercalació de les lents d'augment del conoscopi. En la figura 10, s'aprecia el desplaçament, a la primera isocroma, del que anomenem *simetria cromàtica*.

L'observació conoscòpica de la dispersió dels eixos òptics de la mostra evidencia que $r > \nu$, fet que corrobora que cal descartar la celestina, en la qual es compleix $r < \nu$.

Un punt delicat de l'anàlisi refractomètrica rau en la determinació de l'índex principal intermedi β , ja que la α coincideix amb la lectura mínima de $\alpha'(\varphi)$ i γ coincideix

Monocristalls birefringents: determinació experimental de $\alpha < \beta < \gamma$ i $2V_\gamma$

Característiques generals de la mostra			
Referència mostra	GM01	Color	Incolor
		Transparència	Transparent
		Talla i forma	Brillant rodona
		Mides (mm)	7,88 x 3,90
		Massa (qt)	1,55
		Densitat (g/cm ³)	

REFRACTOMETRIA ($\lambda = 589 \text{ nm}$, Na)

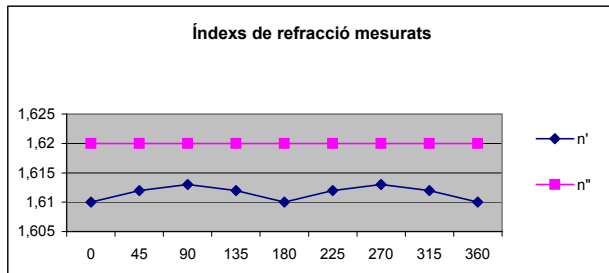
: dades per introduir

SÈRIE DE MESURES, NÚMERO	1
--------------------------	---

Índexs de refracció i angles de les traces de polarització					
ϕ	n'	$\tau (n')$	n''	$\tau (n'')$	$\tau(n') - \tau(n'')$
0	1,610	90	1,620	0	90
45	1,612	90	1,620	0	90
90	1,613	90	1,620	0	90
135	1,612	90	1,620	0	90
180	1,610	90	1,620	0	90
225	1,612	90	1,620	0	90
270	1,613	90	1,620	0	90
315	1,612	90	1,620	0	90
360	1,610	90	1,620	0	90

Precisió necessària en la mesura de:
 * l'angle de la traça de polarització: 5°
 * l'índex de refracció: 0,0015

GRÀFIQUES REFRACTOMÈTRIQUES



RESULTATS DE LA SÈRIE DE MESURES

Monocrystal:	BIAXIAL +	
	β	$2V_\gamma$
S/fórmula GEMMAT	1,6130	66,7
S/mètode H. i K.	1,6130	66,7
S/mètode conoscòpic	1,6128	64
Mitjana β (Càlcul $2V$)	1,6129	65,8

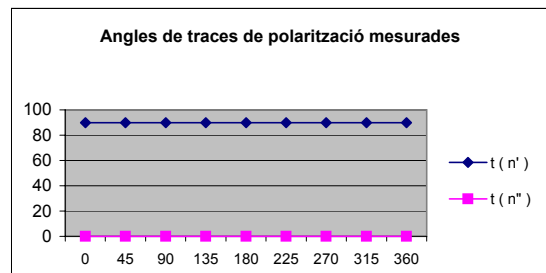
α	β	γ	$2V_\gamma$
1,610	1,6129	1,620	65,8

Birefring.	$\gamma - \alpha$	$\gamma - \beta$	$\beta - \alpha$
	0,010	0,0071	0,003

I. Miller faceta	$h (\gamma)$	$k (\alpha)$	$l (\beta)$
	10	0	0

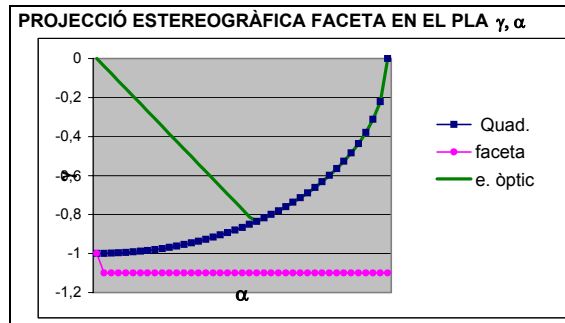
Angle e. o respecte perp. fac.	BIAXIAL	UNIAXIAL
	Ψ_1	Ψ
	32,9	N. A.

Factor $K(R.) = 2V_\gamma(R.)/2H_\gamma(R.)$ **0,800**



CONOSCÒPIA (llum blanca)
 Resultats de les mesures i observacions relacionades amb la refractometria efectuades amb el conoscopi Figueras 93

$2H_\gamma$ (cristall/aigua)	80
Índex Miller $h (\gamma)$	1
Índex Miller $k (\alpha)$	0
Índex Miller $l (\beta)$	0
Figura d'interferència	BIAXIAL (+)
$2V_\gamma(C) = K(r.) * 2H_\gamma$	64,0
Càlcul de $\beta (2V_\gamma, \alpha, \gamma)$	1,6128
Càlcul de $\beta (2H_\gamma, \alpha, \gamma)$	1,6141



CONCLUSIONS I COMENTARIS A LES MESURES I RESULTATS EXPERIMENTALS:

- * Identificació òptica de la mostra (espècies compatibles) : **TOPAZI**
- * Necessitat de repetir les mesures i efectuar l'anàlisi d'errors : NO
- * Necessitat d'emperrar mètodes complementaris d'identificació : NO
- * Altres comentaris : La dispersió dels eixos òptics $r > v$ confirma que és topazi i no celestina

Nota: Per als monocristalls uniaxials els índexs de Miller calculats mitjançant les mesures refractomètriques incorporen la indeterminació derivada de la simetria de revolució al voltant de l'eix òptic. Les mesures conoscòpiques la solucionen

CONTRASTACIÓ AMB ELS RESULTATS EXPERIMENTALS

Dades experimentals refractoconoscòpiques

Monocristall: **BIAIXIAL +**

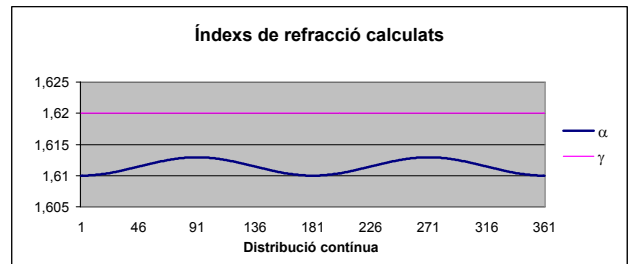
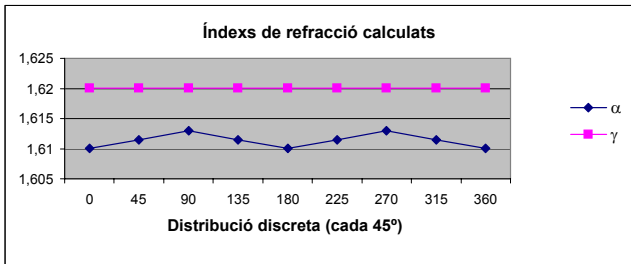
MAGNITUDS ÒPTIQUES I GEOMÈTRIQUES DETERMINADES EXPERIMENTALMENT

ÒPTIQUES					GEOMÈTRIQUES					
Índexs principals			Angle d'eixos òptics		Vector unitari perpend. Faceta			Angle d'eixos òptics respecte a u		
α	β	γ	$2V_\gamma$	v	$u(\gamma)$	$u(\alpha)$	$u(\beta)$	ψ_1	ψ_2	ψ (Uniaxial)
1,610	1,613	1,620	65,8	180,0	1,00	0,00	0,00	32,9	32,9	N. A.

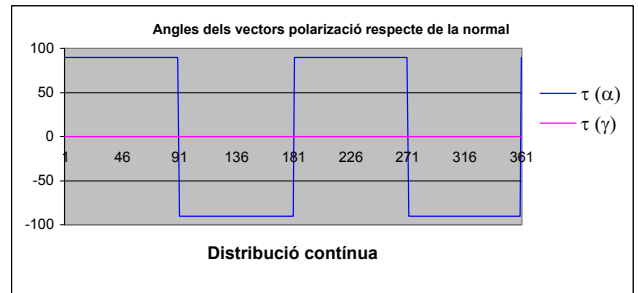
COMPARACIÓ DE LES MESURES REFRACTOMÈTRIQUES AMB LES CALCULADES

A. ÍNDEXS DE REFRACCIÓ I ANGLES DELS VECTORS POLARITZACIÓ (D) RESPECTE DE LA NORMAL

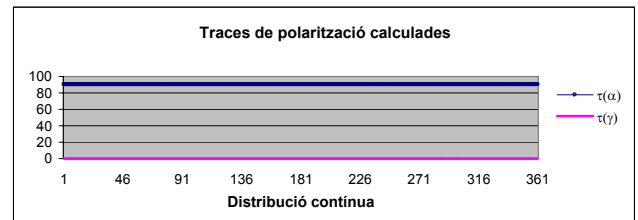
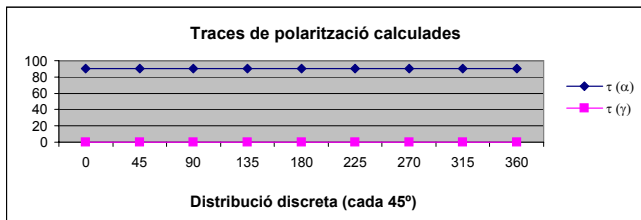
90 = Posició angular inicial ($\phi = 0$) del monocristall en el refractòmetre (aleatòria) respecte de la posició inicial fixada en el model teòric. (La projecció de l'eix òptic 1 sobre la faceta coincideix amb l'eix longitudinal del refractòmetre.)



ϕ	Calculat		Mesurat		Diferència	
	α'	γ'	n'	n''	$\alpha' - n'$	$\gamma' - n''$
0	1,61	1,62	1,610	1,620	0,000	0,000
45	1,6114627	1,62	1,612	1,620	-0,001	0,000
90	1,61292939	1,62	1,613	1,620	0,000	0,000
135	1,6114627	1,62	1,612	1,620	-0,001	0,000
180	1,61	1,62	1,610	1,620	0,000	0,000
225	1,6114627	1,62	1,612	1,620	-0,001	0,000
270	1,61292939	1,62	1,613	1,620	0,000	0,000
315	1,6114627	1,62	1,612	1,620	-0,001	0,000
360	1,61	1,62	1,610	1,620	0,000	0,000
Mitjana de les diferències					-0,0003	0,0000
Desviació estàndard					0,0003	0,0000



B. ANGLES DE LES TRACES DE POLARITZACIÓ RESPECTE A LA NORMAL



ϕ	Calculat		Mesurat		Diferència	
	$\tau(\alpha')$	$\tau(\gamma')$	$\tau(n')$	$\tau(n'')$	C - M	C - M
0	90	0	90	0	0,0	0,0
45	90	0	90	0	0,0	0,0
90	90	0	90	0	0,0	0,0
135	90	0	90	0	0,0	0,0
180	90	0	90	0	0,0	0,0
225	90	0	90	0	0,0	0,0
270	90	0	90	0	0,0	0,0
315	90	0	90	0	0,0	0,0
360	90	0	90	0	0,0	0,0

ϕ	Angles vectors D respecte a la normal	
	$\tau(\alpha')$	$\tau(\gamma')$
0	90	0
45	90	0
90	-90	0
135	-90	0
180	-90	0
225	90	0
270	90	0
315	-90	0
360	90	0

Monocristalls birefringents: determinació experimental de $\alpha < \beta < \gamma$ i $2V_\gamma$

Característiques generals de la mostra

Referència mostra **GM02**

Color	Lleugerament blavós	Mides (mm)	7,00 x 4,50
Transparència	Transparent	Massa (qt)	1,30
Talla i forma	Brillant modificada	Densitat (g/cm ³)	

REFRACTOMETRIA ($\lambda = 589 \text{ nm, Na}$)

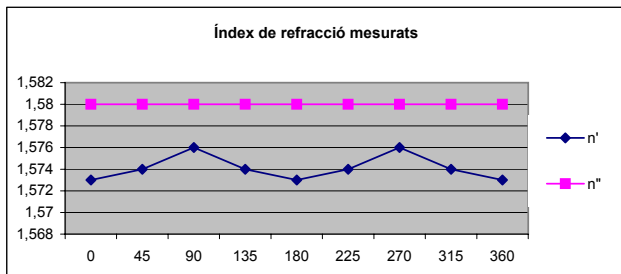
: dades per introduir

SÈRIE DE MESURES, NÚMERO	1
--------------------------	---

Índex de refracció i angles de les traces de polarització					
ϕ	n'	$\tau (n')$	n''	$\tau (n'')$	$\tau(n') - \tau(n'')$
0	1,573	-50	1,580	-140	90
45	1,574	-20	1,580	70	90
90	1,576	0	1,580	90	90
135	1,574	20	1,580	-70	90
180	1,573	40	1,580	-50	90
225	1,574	20	1,580	-70	90
270	1,576	0	1,580	90	90
315	1,574	-30	1,580	-120	90
360	1,573	-50	1,580	-140	90

Precisió necessària en la mesura de:
 * l'angle de la traça de polarització: 5°
 * l'índex de refracció: 0,0015

GRÀFIQUES REFRACTOMÈTRIQUES



RESULTATS DE LA SÈRIE DE MESURES

Monocristall:	UNIAXIAL -	
	β	$2V_\gamma$
S/fórmula GEMMAT	1,5800	180,0
S/mètode H. i K.	1,5800	180,0
S/mètode conoscòpic	1,5800	180,0
Mitjana β (Càlcul $2V$)	1,5800	180,0

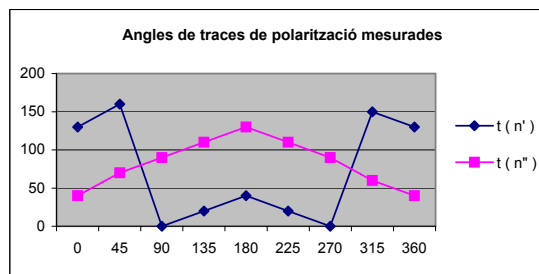
α	β	γ	$2V_\gamma$
1,573	1,5800	1,580	180,0

Birefring.	$\gamma - \alpha$	$\gamma - \beta$	$\beta - \alpha$
	0,007	0,0000	0,007

Í. Miller faceta	$h (\gamma)$	$k (\alpha)$	$l (\beta)$
	0	8	7

Angle e. o respecte perp. fac.	BIAXIAL Ψ_1	UNIAXIAL Ψ
	N. A.	N. A.
		41,0

Factor $K(R.) = 2V_\gamma(R.)/2H_\gamma(R.)$ **1,000**

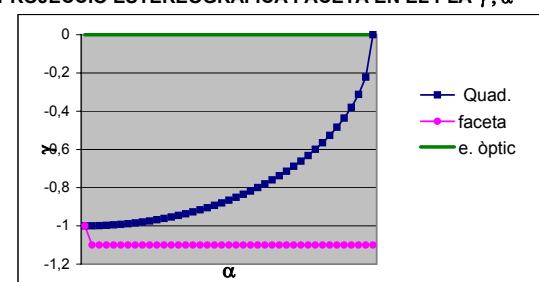


CONOSCÒPIA (llum blanca)

Resultats de les mesures i observacions relacionades amb la refractometria efectuades amb el conoscopi Figueras 93

$2H_\gamma$ (cristal/aigua)	180
Índex Miller $h (\gamma)$	1
Índex Miller $k (\alpha)$	0
Índex Miller $l (\beta)$	0
Figura d'interferència	UNIAXIAL (-)
$2V_\gamma(C) = K(r.) * 2H_\gamma$	180,0
Càlcul de β ($2V_\gamma, \alpha, \gamma$)	1,5800
Càlcul de β ($2H_\gamma, \alpha, \gamma$)	1,5800

PROJECCIÓ ESTEREOGRÀFICA FACETA EN EL PLA γ, α



CONCLUSIONS I COMENTARIS A LES MESURES I RESULTATS EXPERIMENTALS:

- * Identificació òptica de la mostra (espècies compatibles)
- * Necessitat de repetir les mesures i efectuar l'anàlisi d'errors
- * Necessitat d'emprar mètodes complementaris d'identificació
- * Altres comentaris

: **BERIL**
 : NO
 : NO
 : Les observacions conoscòpiques resolen la indeterminació refractomètrica dels índ. Miller.

Nota: Per als monocristalls uniaxials els índexs de Miller calculats mitjançant les mesures refractomètriques incorporen la indeterminació derivada de la simetria de revolució al voltant de l'eix òptic. Les mesures conoscòpiques la solucionen.

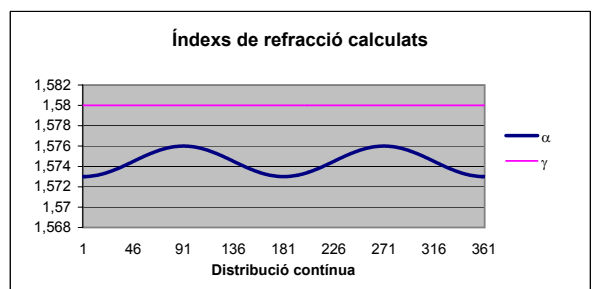
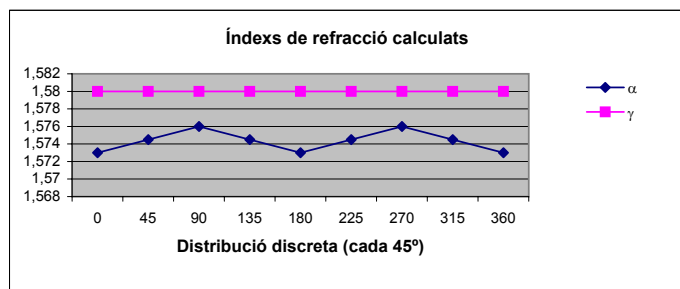
CONTRASTACIÓ AMB ELS RESULTATS EXPERIMENTALS

Dades experimentals refractoconoscòpiques											
Monocristall:						UNIAXIAL -					
MAGNITUDS ÒPTIQUES I GEOMÈTRIQUES DETERMINADES EXPERIMENTALMENT											
ÒPTIQUES						GEOMÈTRIQUES					
Índexs principals			Angle d'eixos òptics			Vector unitari perpend. Faceta			Angle d'eixos òptics respecte de u		
α	β	γ	$2V_\gamma$	v	$u(\gamma)$	$u(\alpha)$	$u(\beta)$	ψ_1	ψ_2	ψ (Uniaxial)	
1,573	1,580	1,580	180,0	180,0	0,000	0,755	0,656	N. A.	N. A.	40,99	

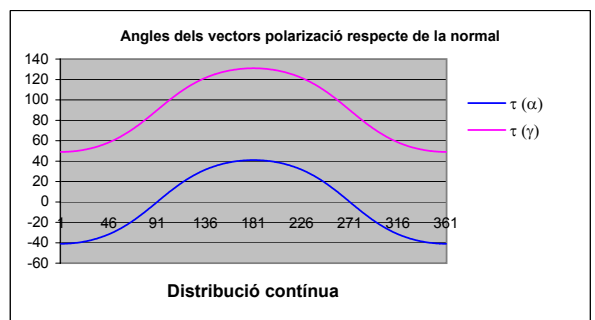
COMPARACIÓ DE LES MESURES REFRACTOMÈTRIQUES AMB LES CALCULADES

A. ÍNDEXS DE REFRACCIÓ I ANGLES DELS VECTORS POLARITZACIÓ (D) RESPECTE DE LA NORMAL

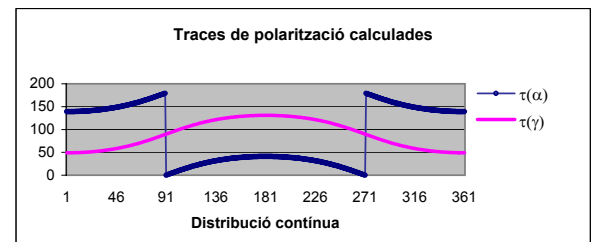
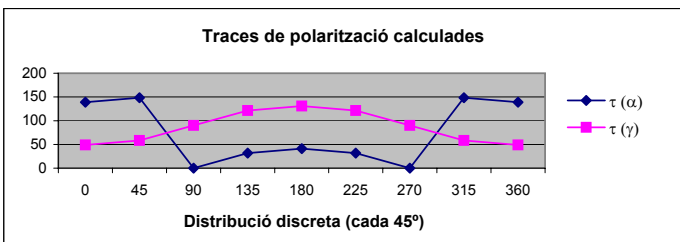
90 = Posició angular inicial ($\phi = 0$) del monocristall en el refractòmetre (aleatòria) respecte de la posició inicial fixada en el model teòric. (La projecció de l'eix òptic 1 sobre la faceta coincideix amb l'eix longitudinal del refractòmetre.)



ϕ	Calculat		Mesurat		Diferència	
	α'	γ'	n'	n''	$\alpha' - n'$	$\gamma' - n''$
0	1,573	1,58	1,573	1,580	0,000	0,000
45	1,57449786	1,58	1,574	1,580	0,000	0,000
90	1,576	1,58	1,576	1,580	0,000	0,000
135	1,57449786	1,58	1,574	1,580	0,000	0,000
180	1,573	1,58	1,573	1,580	0,000	0,000
225	1,57449786	1,58	1,574	1,580	0,000	0,000
270	1,576	1,58	1,576	1,580	0,000	0,000
315	1,57449786	1,58	1,574	1,580	0,000	0,000
360	1,573	1,58	1,573	1,580	0,000	0,000
Mitjana de les diferències					0,0002	0,0000
Desviació estàndard					0,0003	0,0000



B. ANGLES DE LES TRACES DE POLARITZACIÓ RESPECTE A LA NORMAL



ϕ	Calculat		Mesurat		Diferència	
	$\tau(\alpha')$	$\tau(\gamma')$	$\tau(n')$	$\tau(n'')$	C - M	C - M
0	139	49	130	40	9,0	9,0
45	148	58	160	70	-11,6	-11,6
90	0	90	0	90	0,0	0,0
135	32	122	20	110	11,6	11,6
180	41	131	40	130	1,0	1,0
225	32	122	20	110	11,6	11,6
270	0	90	0	90	0,0	0,0
315	148	58	150	60	-1,6	-1,6
360	139	49	130	40	9,0	9,0

BERIL	Angles vectors D respecte de la normal	
	$\tau(\alpha')$	$\tau(\gamma')$
NO		
0	-40,9878357	49,0121643
45	-31,5671909	58,4328091
90	0	90
135	31,5671909	121,567191
180	40,9878357	130,987836
225	31,5671909	121,567191
270	0	90
315	-31,5671909	58,4328091
360	-40,9878357	49,0121643

Figura 6: *Beril i topazi*

Figura 8: *Figura d'interferència del beril, amb un retardador de 1100*

Figura 7: *Figura d'interferència del beril*

amb la lectura màxima de $\gamma'(\varphi)$. Per a la determinació de β , l'aplicació GEMMAT incorpora tres procediments diferents, i se n'adopta, com a valor de β , la mitjana.

Un procediment l'hem basat en la matematització del criteri exposat per Hurlburt i Kammerling (mètode HK) en el seu text *Gemmologia* (vegeu pàgines 101–104). Un segon mètode es basa en la fórmula que relaciona β amb α , γ i $2V_\gamma = K \cdot 2H_\gamma$ (mètode refractoconoscòpic; vegeu les fórmules 8 i 9 de l'apèndix). I el tercer mètode, que no hem sabut trobar després d'una recerca bibliogràfica, l'hem deduït basant-nos en les lectures dels dos índexs ($\alpha'(\gamma)$, γ) i en la diferència de l'angle de les traces de polarització (mètode GEMMAT). La fórmula és:

$$\beta(\alpha, \alpha'(\gamma), \delta\varphi) = \frac{\alpha \cdot \alpha'(\gamma) \sin \delta\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \alpha'^2 \cos^2 \delta\varphi}},$$

on $\alpha'(\gamma)$ és la lectura de $\alpha'(\varphi)$ que correspon a γ , i $\delta\varphi$ és la diferència en l'angle de les traces corresponents a α i $\alpha'(\gamma)$. El cas singular $\delta\varphi = 0$ i $\alpha = \alpha'(\gamma)$ s'ha matematitzat aïlladament.

Per a una caracterització física més acurada i seriosa de les magnituds òptiques de les mostres, és obligat

Figura 9: *Figura d'interferència del topazi, centrada en un eix òptic (32D)*

Figura 10: *Figura d'interferència del topazi, centrada en un eix òptic (16D). Desplaçament de la simetria cromàtica*

efectuar una sèrie de mesures i fer la corresponent anàlisi d'errors de les magnituds α , β , γ , i $2V_\gamma$ obtingudes en cada sèrie, tenint en compte, però, que sols tres de les quatre magnituds són funcionalment independents. A més, com que l'aplicació GEMMAT empra aparells estàndards, els errors de l'escala de lectura, és a dir, «l'apreciació», dels aparells, e (escala refractòmetre) = $\pm 0,0015$, e (aparell conosciu) = $\pm 20^\circ$,¹ predomina, tal com l'experiència ens ha ensenyat, sobre els errors accidentals d'una sèrie de lectures acurades.

Per a les dues mostres analitzades en el present article, amb una sèrie de tan sols sis lectures i emprant dos refractòmetres diferents per tal de compensar possibles errors sistemàtics, s'han obtingut els resultats següents:

BERIL (U-)

	ω	ε
Mitjana	1,5810	1,5747
Error accidental	0,0004	0,0006
Error escala	0,0015	0,0015
Error total	0,0019	0,0021

Per tant: $\omega = 1,5810 \pm 0,0019$ i $\varepsilon = 1,5747 \pm 0,0021$

TOPAZI (B+)

El càlcul d'errors per a les mostres biaxials dóna lloc a dues variants ja que, com s'ha indicat, sols tres de les quatre magnituds α , β , γ i $2V_\gamma$ són funcionalment independents.

V1: considerar α , β i γ com a mesures directes i $2V_\gamma$ com a mesura indirecta.

V2: considerar α , γ i $2V_\gamma$ com a mesures directes i β com a mesura indirecta.

Les dues alternatives, per a una sèrie de també sis lectures, donen els resultats següents:

V1	α	β	γ	$2V_\gamma$
Mitjana	1,6097	1,6126	1,6197	65,4°
Error accidental	0,0002	0,0002	0,0002	2,6°
Error escala	0,0015	0,0015	0,0015	12,3°
Error total	0,0017	0,0017	0,0017	14,9°

V2	α	γ	$2V_\gamma$	β
Mitjana	1,6097	1,6197	65,8°	1,6126
Error accidental	0,0002	0,0002	0,3°	0,0024
Error escala	0,0015	0,0015	20°	0,0031
Error total	0,0017	0,0017	20,3°	0,0055

Per tant:

¹Aquest error s'ha quantificat aproximadament per excés, tenint en compte els errors associats a l'escala goniomètrica, l'òptica paraxial artesanal, el centrament aproximat de les figures d'interferència, la utilització de llum blanca, etc. El conosciu no mesura $2V_\gamma$ sinó $2H_\gamma$, i sols quan el monocristall està centrat a l'esfera. L'aplicació GEMMAT determina automàticament, a partir de les mesures refractomètriques de β , ψ_1 , ψ_2 i ν el factor corrector $K = 2V_\gamma/2H_\gamma$, i s'adopta com a mesura conosciu de l'angle entre els eixos òptics $K \cdot 2H_\gamma$. Vegeu les fórmules 8 i 9 de l'apèndix.

	V1	V2
α	1,6097 \pm 0,0017	1,6097 \pm 0,0017
β	1,6126 \pm 0,0017	1,6126 \pm 0,0055
γ	1,6197 \pm 0,0017	1,6197 \pm 0,0017
$2V_\gamma$	65,4° \pm 14,9°	65,8° \pm 20,3°

De l'anàlisi d'errors s'infereix que, amb els aparells de mesura emprats, per caracteritzar les propietats òptiques de les mostres biaxials s'han d'adoptar les magnituds (α , β , γ) enfront de (α , γ , $2V_\gamma$). Aquesta anàlisi ratifica la limitada precisió de la mesura conosciu.

Les magnituds fisicoòptiques que s'acaben d'especificar, en ser comparades amb les taules de característiques incloses en la bibliografia, determinen unívocament les mostres problema com a beril i topazi.

Per finalitzar aquest apartat, tot seguit es reproduïxen les característiques quimicocristal·logràfiques del beril i el topazi:

BERIL

Classe: silicat

Subclasse: ciclosilicat

Composició química: $\text{Be}_3\text{Al}_2(\text{Si}_6\text{O}_{18})$ (silicat d'alumini i berilli)

Sistema cristal·lí: hexagonal

Classe cristal·lina: bipiramidal dihexagonal (6/m2/m2/m)

Grup espacial: $P6/mcc$

Paràmetres de cella:

$a = 9,200 - 9,220 \text{ \AA}$, $c = 9,187 - 9,249 \text{ \AA}$

$Z = 2$

TOPAZI

Classe: silicat

Subclasse: nesosilicat

Composició química: $\text{Al}_2[\text{SiO}_4](\text{OH},\text{F})_2$ (hidrofluosilicat d'alumini)

Sistema cristal·lí: ortoròmbic

Classe cristal·lina: bipiramidal ròmbica (2/m2/m2/m)

Grup espacial: Pb/nm

Paràmetres de cella:

$a = 4,65 \text{ \AA}$, $b = 8,80 \text{ \AA}$, $c = 8,39 \text{ \AA}$

$Z = 4$

Conclusió i resum

L'aspecte original de la metodologia GEMMAT proposada resideix en l'ús integral de les propietats òptiques de la mostra objecte d'estudi, així com en la interrelació automatitzada i coherent entre totes les parts de l'anàlisi, tant experimentals com teòriques, amb l'objectiu final d'identificar monocristalls i gemmes birefringents, transparents i facetats.

Com ha quedat palès amb l'anàlisi d'errors efectuada, l'aplicació també proporciona la caracterització física de les propietats òptiques de la mostra.

En l'apartat dedicat a la metodologia ja s'ha indicat que les figures 1 i 2 exposen el contingut detallat de l'aplicació GEMMAT, però estimem pertinent, tot seguit, sintetitzar-ne els trets més característics, classificats en funció dels aparells de mesura emprats:

ORTOSCÒPIA: Si la mostra facetada és birefringent s'inicia l'aplicació.

REFRACTOMETRIA: a) Mesura dels índexs de refracció i de les traces de polarització cada 45° , en una volta completa sobre la taula del refractòmetre.

b) Càlcul automàtic d'índexs de refracció principals (α , β , γ). Angle entre els eixos òptics $2V_\gamma$ i $2H_\gamma$. Birefringència. Representació gràfica dels índexs i de les traces de polarització. Posició geometroòptica de la mostra respecte del sistema del refractòmetre. Índexs de Miller de la faceta respecte dels eixos principals i projecció estereogràfica de la faceta en el pla ($\gamma\alpha$). Càlcul del factor corrector $K = 2V_\gamma/2H_\gamma$ degut a la refracció cristall-aigua.

CONOSCÒPIA: Observació i anàlisi de les figures d'interferència. Mesura de l'angle $2H_\gamma$ entre els eixos òptics (vegeu la nota 1 a peu de pàgina), caràcter i signe òptic i estimació dels índexs de Miller de la faceta emprada (aquestes magnituds serveixen per comparar-les amb les corresponents magnituds deduïdes refractomètricament). Observació del pleocroisme orientat, anàlisi dels fenòmens de dispersió cromàtica en les isocromes i en els eixos òptics. Observació del poder rotatori.

En la fitxa teòrica es calculen i es representen gràficament, de manera contínua (grau a grau), els índexs de refracció i els angles de les traces de polarització, i se'n fa una extracció graficoanalítica, cada 45° , per comparar-les amb les dades experimentals. També es calculen i es representen els angles que el vector desplaçament elèctric, \vec{D} , defineix respecte de la normal a la faceta. Els càlculs teòrics sols es basen en els valors dels tres índexs principals (α , β , γ) i dels components del vector unitari normal a la faceta, prèviament determinats per via refractomètrica. És a dir, es calculen i es representen les corbes intersecció de la faceta amb la bisuperfície dels vectors d'ona (vegeu l'apèndix).

Amb totes aquestes informacions, la nostra experiència ens ha ensenyat que, quasi sempre, es pot identificar unívocament la mostra birefringent. I si en algun cas excepcional hi ha més d'una espècie compatible, la mesura de la densitat o bé l'observació de l'espectre d'absorció mitjançant un espectroscopi gemmològic de butxaca i de baix cost econòmic l'acaba d'identificar unívocament.

Finalment, ens atrevim a suggerir que, des d'un punt de vista didàctic, l'aplicació GEMMAT potser podria ser incorporada, totalment o parcialment, a les pràctiques de laboratori d'algunes llicenciatures experimentals o ensenyaments interdisciplinaris; així, es mostraria un vessant de la física clàssica que té aplicacions pràctiques

i senzilles en el segle XXI i també repercussions tècniques i comercials.

Apèndix. Resum dels fonaments teòrics de l'òptica electromagnètica cristal·lina clàssica emprats en l'article

En aquest apèndix es presenta una formulació resumida de la part de l'òptica cristal·lina que fonamenta els desenvolupaments de l'aplicació GEMMAT. El lector que vulgui aprofundir en aquesta bonica i clàssica temàtica de la física pot consultar per exemple el capítol 15 del tractat de M. Born i E. Wolf, *Principles of Optics*.

El resum que segueix es limitarà al cas més important, on el medi birefringent pot suposar-se no magnètic i transparent. Llavors, la relació entre les intensitats (\vec{E} , \vec{H}) i les induccions (\vec{D} , \vec{B}) del camp electromagnètic ve donada, en l'aproximació lineal i emprant unitats gaussianes, per:

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}, \quad \vec{B} = \vec{H}, \quad (1)$$

on $\vec{\epsilon} = (\epsilon_{ik})$ és el tensor dielèctric; per als medis que es tenen en compte, és un tensor simètric $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$, de components reals i valors principals positius. En general ϵ_{ik} depèn de la freqüència del senyal electromagnètic, fet que dóna compte del fenomen de la dispersió temporal.

Una ona monocromàtica plana que es propaga en el medi transporta uns vectors electromagnètics proporcionals a $\exp i\phi$, on ϕ és la fase de l'ona, la qual s'expressa en funció de la freqüència circular ω i del vector nombre d'ones \vec{k} , de la manera següent:

$$\phi = -\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} \equiv -\omega t + \frac{\omega}{c} \vec{n} \cdot \vec{r} \equiv -\omega t + \frac{\omega}{c} n \hat{u} \cdot \vec{r},$$

on c és la velocitat de la llum en el buit.

En \vec{k} és habitual factoritzar ω/c i explicitar, mitjançant el vector unitari \hat{u} , ($\hat{u} \cdot \hat{u}$) = 1, els cosinus directors de la perpendicular al front d'ones planes:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} = \frac{\omega}{c} n \hat{u}.$$

En òptica dels medis anisòtrops, el vector \vec{n} també és habitual anomenar-lo *vector nombre d'ones*, el mòdul del qual, que és l'índex de refracció n , depèn de la direcció \hat{u} , com quedarà palès més endavant. En canvi, en un medi isòtrop, $n = \sqrt{\epsilon}$ depèn sols de la freqüència.

Per a l'ona electromagnètica plana considerada, les equacions dinàmiques de Maxwell es redueixen a la parella d'equacions vectorials algebraïques:

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}, \quad \vec{D} = -\vec{n} \times \vec{H}. \quad (2)$$

D'aquestes equacions immediatament es dedueix la mútua ortogonalitat dels vectors $\vec{k} = \vec{n}\omega/c$, \vec{D} i \vec{H} . Alhora el vector \vec{H} és perpendicular a \vec{E} . Com que \vec{H} és perpendicular simultàniament a \vec{D} , \vec{E} i \vec{k} , aquests darrers vectors es troben en un mateix pla, al qual pertany

el flux d'energia

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

o vector de Poynting. La direcció de la mitjana temporal $\langle \vec{S} \rangle$ de \vec{S} coincideix amb la direcció dels raigs de llum de l'òptica geomètrica.

De les equacions (1) i (2), se n'obtenen tres equacions lineals i homogènies per a les tres components del camp elèctric \vec{E}

$$(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}) E_j = 0. \quad (3)$$

Aquestes equacions són compatibles si el determinant format pels seus coeficients és igual a zero

$$\det(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}) = 0. \quad (4)$$

El càlcul del determinant es facilita emprant uns eixos cartesianes respecte dels quals el tensor dielèctric és diagonal:

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_{(x)} \hat{i}\hat{i} + \varepsilon_{(y)} \hat{j}\hat{j} + \varepsilon_{(z)} \hat{k}\hat{k},$$

on $\varepsilon_{(x)}$, $\varepsilon_{(y)}$, $\varepsilon_{(z)}$ designen els valors principals de $\vec{\varepsilon}$ i $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ defineixen els eixos principals. Expressada en funció dels valors principals, l'equació (4) és una de les equacions bàsiques de l'òptica cristal·lina, anomenada *equació de Fresnel*. Físicament, dóna de manera implícita la llei de dispersió $\omega = \omega(\vec{k})$ del medi. No s'ha d'oblidar que els valors principals $\varepsilon_{(i)}$ i les direccions principals són, en general, funcions de la freqüència.

L'equació de Fresnel (4) per a una direcció \hat{u} de \vec{n} donada és una equació quadràtica en n^2 a coeficients reals. Per tant, en el cas general, a cada direcció de \vec{n} corresponen dos valors absoluts diferents n' i n'' i dues velocitats de fase o normals, c/n' i c/n'' . En contraposició, per als medis isòtrops $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$. L'índex de refracció n i per tant la velocitat normal c/n de les ones són independents de \hat{u} i tenen valors únics, sols dependents de la freqüència.

És habitual i útil definir els índexs principals $n_{(i)}^2 \equiv \varepsilon_{(i)}$ i les velocitats normals $v_{(i)} \equiv c/n_{(i)}$, que, en el present article, i seguint una nomenclatura més estesa en mineralogia òptica, s'han designat com a $\alpha \equiv n_{(x)}$, $\beta \equiv n_{(y)}$ i $\gamma \equiv n_{(z)}$. Llavors l'equació de Fresnel (4) es pot expressar de la manera següent:

$$\frac{u_x^2 \alpha^2}{n^2 - \alpha^2} + \frac{u_y^2 \beta^2}{n^2 - \beta^2} + \frac{u_z^2 \gamma^2}{n^2 - \gamma^2} = 0,$$

o bé

$$\frac{u_x^2}{v^2 - v_\alpha^2} + \frac{u_y^2}{v^2 - v_\beta^2} + \frac{u_z^2}{v^2 - v_\gamma^2} = 0. \quad (5)$$

Per a l'anàlisi de la polarització de les ones, és pertinent tenir present les relacions que determinen les direc-

cions de \vec{D} i \vec{E} . Aquestes relacions es dedueixen fàcilment de l'equació (3), en el sistema dels eixos principals:

$$(D_i) = n^2 \hat{u} \vec{E} \left(\frac{u_x \alpha^2}{n^2 - \alpha^2}, \frac{u_y \beta^2}{n^2 - \beta^2}, \frac{u_z \gamma^2}{n^2 - \gamma^2} \right) \quad (6)$$

$$(E_i) = n^2 \hat{u} \vec{E} \left(\frac{u_x}{n^2 - \alpha^2}, \frac{u_y}{n^2 - \beta^2}, \frac{u_z}{n^2 - \gamma^2} \right).$$

Mentre que en un medi isòtrop l'estat de polarització pot ser qualsevol, en un medi anisòtrop les ones polaritzades linealment, per a les quals es coneix la direcció de la normal al front d'ones \hat{u} , tenen, en general, els seus plans de polarització determinats. En efecte, així resulta de les equacions (6), que determinen les direccions de \vec{E} i \vec{D} , i per tant de \vec{H} , quan \hat{u} s'ha especificat i s'ha escollit per a n un dels valors possibles, n' , n'' , proporcionats per l'equació de Fresnel. Tampoc no és difícil de demostrar que els estats de polarització corresponents a n' i n'' són ortogonals o, el que és equivalent, que \vec{D}' i \vec{D}'' ho són, és a dir, $\vec{D}' \cdot \vec{D}'' = 0$.

Una ona polaritzada, linealment o el·lípticament, en general no pot mantenir el seu estat de polarització en propagar-se en un medi anisòtrop; suposem, per fixar les idees, que l'ona es propaga inicialment en el buit i incideix perpendicularment sobre la superfície plana d'un medi anisòtrop. Llavors, com s'acaba de demostrar, es descompon unívocament en dues ones polaritzades linealment en angle recte, l'una respecte de l'altra, i es propaga amb velocitats normals $v' = c/n'$ i $v'' = c/n''$ diferents. És a dir, hi ha doble refracció.

Per aprofundir en la natura fisicomacroscòpica dels medis anisòtrops, s'ha de tenir en compte que les propietats òptiques d'un cristall depenen, abans que res, de la simetria del seu tensor dielèctric ε_{ij} , la qual depèn directament de la simetria cristal·logràfica. Així, per als cristalls dels sistemes triclínic, monoclínic i ortoròmbic, els tres valors principals són diferents $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Són els cristalls anomenats *biaxials*. En els cristalls del sistema triclínic, les direccions dels eixos principals no estan relacionades amb cap direcció cristal·logràfica. En els del sistema monoclínic, la direcció d'un dels eixos principals està determinada per l'eix de simetria de segon ordre o per la perpendicular al pla de simetria del cristall. En els cristalls de simetria ortoròmbica, els tres eixos principals queden determinats pels tres eixos de simetria binària, mútuament ortogonals. En els cristalls dels sistemes tetragonal, trigonal i hexagonal, dos dels tres valors principals $\varepsilon_{(i)}$ coincideixen, de tal manera que sols n'hi ha dos d'independents. Són els anomenats *cristalls uniaxials*. Un dels eixos principals coincideix amb l'eix de simetria de quart, tercer o sisè ordre, mentre que la direcció dels dos restants pot ser escollida arbitràriament en el pla normal. En els cristalls del sistema cúbic, els tres valors principals són iguals $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$ i la direcció de la tríada ortogonal d'eixos principals pot escollir-se arbitràriament.

En altres termes, les propietats dielèctriques i òptiques dels cristalls de simetria cúbica són les mateixes que les dels medis isòtrops (vegeu la taula resum, al final de l'apèndix).

L'estudi quantitatiu de les propietats òptiques dels cristalls transparents està relacionat directament amb l'equació de Fresnel (4), o les (5), la qual representa en l'espai dels vectors d'ona (n_x, n_y, n_z) una superfície de quart ordre i dos fulls, anomenada *superfície dels vectors d'ona*. Per tal de visualitzar-la es considera una semirecta que parteix de l'origen en la direcció definida pel vector \hat{u} , sobre la qual es porten longituds iguals a $n'(\hat{u})$ i $n''(\hat{u})$, solucions de l'equació de Fresnel per al \hat{u} escollit. Llavors, repetint idealment el procés per a totes les orientacions possibles de \hat{u} , s'obté la superfície dels vectors d'ona, simètrica respecte als tres plans coordenats i l'origen, cosa que és conseqüència directa de les propietats de simetria i realitat suposades per a ε_{ij} . Fàcilment es demostra que, en el cas biaxial, on, per comoditat és habitual suposar $\alpha < \beta < \gamma$, la intersecció de la bisuperfície amb els plans coordenats ve donada per un cercle i una el·lipse, com s'esquematitza en la figura 11. Els dos fulls sols tenen quatre punts singulars (umbílics) comuns, situats en el pla $\{n_z, n_x\}$, i dos a dos simètrics respecte als eixos n_z i n_x . En la figura 11 s'ha representat el punt umbílic I corresponent al primer octant. Les dues rectes que determinen els punts singulars defineixen els anomenats *eixos òptics del medi*. En la direcció dels eixos òptics, els dos índexs, n' i n'' , són iguals al β i, per tant, també són iguals les velocitats normals o de fase. En els punts de contacte d'ambdós fulls, per exemple el punt I de la figura 11, hi ha una infinitat de plans tangents a la bisuperfície, l'envolupant dels quals és un con doble de segon ordre i vèrtex I .²

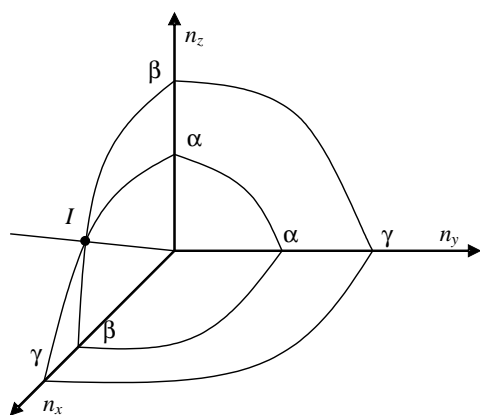


Figura 11: Octant de la superfície dels vectors d'ona

Els medis uniaxials, com ja s'ha anticipat, es caracterit-

²Emprant simultàniament l'anomenada *superfície dual* a la dels vectors d'ona, és a dir, la superfície dels raigs, s'expliquen les refraccions còniques externa i interna.

zen perquè tenen dos índexs principals iguals. En aquest cas, és pertinent distingir dos casos, segons que siguin iguals els dos índexs més grans $\beta = \gamma \equiv n_o$, $\alpha \equiv n_e$, o els dos índexs més petits $\alpha = \beta \equiv n_o$, $\gamma \equiv n_e$. El medi es qualifica de negatiu en el primer cas (per exemple l'espai d'Islàndia) o positiu en el segon cas (per exemple el quarz). Les corresponents superfícies dels vectors d'ona es representen en la figura 12. En les figures s'explicita com els dos eixos òptics del medi biaxial s'han col·lapsat en un sol eix, al voltant del qual la bisuperfície dels vectors d'ona gaudeix de simetria de revolució.

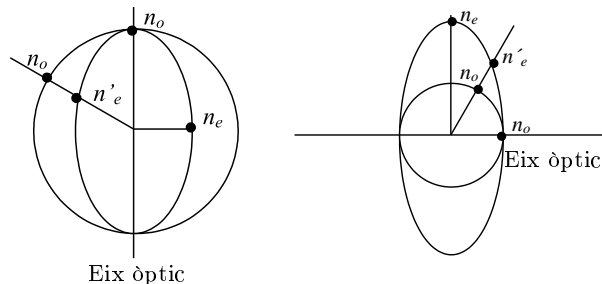


Figura 12: Superfície dels vectors d'ona per a un cristall uniaxial negatiu i positiu

Per a plans d'ona normals a l'eix òptic, l'índex té un valor únic n_o . La direcció dels vectors desplaçament \vec{D} , que aquests plans d'ona poden propagar, resta indeterminada, de manera que, sigui quin sigui l'estat de polarització, una ona, el pla de la qual és ortogonal a l'eix òptic, es propaga sense alteració amb velocitat normal c/n_o . Com que el vector camp elèctric \vec{E} és colineal amb \vec{D} , la propagació és idèntica a la d'un medi isòtrop. Per a plans d'ona de direcció arbitrària, un dels índexs és sempre n_o i l'altre està comprès entre n_o i n_e .³

En els àmbits de l'òptica cristal·logràfica i la gemmologia és habitual, per analitzar les propietats òptiques dels medis, emprar extensament l'anomenat *el·lipsoide indicatriu*. Però estimem més pràctic i profitós emprar simultàniament la superfície dels vectors d'ona i la indicatriu, ja que es complementen. En efecte, si, en lloc dels plans d'ona especificats pel vector nombre d'ones $\vec{n} = n\hat{u}$, se suposa fixada la direcció del vector \vec{D} mitjançant, per exemple, els seus cosinus directores

$$\frac{\vec{D}}{|\vec{D}|} \equiv (d_x, d_y, d_z),$$

llavors de l'equació (6) es dedueix directament l'equació de la indicatriu:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{d_x^2}{\alpha^2} + \frac{d_y^2}{\beta^2} + \frac{d_z^2}{\gamma^2}. \quad (7)$$

³En mineralogia òptica s'empra la nomenclatura ω (ordinari) i ε (extraordinari) en lloc de n_o i n_e , respectivament.

Classificació òptica dels cristalls	Sistema cristal·logràfic	Simetria principal bàsica	Nombre de components independents ϵ_{ik}	(ϵ_{ik}) reduït als eixos cristal·logràfics	(ϵ_{ik}) reduït als eixos principals	Indicatriu	Dispersió d'eixos principals (dependent del color de la llum)
Isòtrops	Cúbic	Quatre eixos 3	1	$\epsilon \delta_{ik}$	$\epsilon \delta_{ik}$	Esfera	Eixos indeterminats
Uniaxials	Tetragonal	Un eix 4	2	$\begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & & \\ & \epsilon_{\perp} & \\ & & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & & \\ & \epsilon_{\perp} & \\ & & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$	El·lipsoide revolució. Eixos n_o, n_e $[n_o > n_e$ $U(-)$ $n_o < n_e$ $U(+)]$	Eix z fix; x i y indeterminats (no hi ha dispersió d'eixos)
	Hexagonal	Un eix 6					
	Trigonal	Un eix 3					
Biaxials(*)	Ròmbic	Tres eixos 2 ortogonals entre ells	3	$\begin{pmatrix} \epsilon_{(x)} & & \\ & \epsilon_{(y)} & \\ & & \epsilon_{(z)} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon_{(x)} & & \\ & \epsilon_{(y)} & \\ & & \epsilon_{(z)} \end{pmatrix}$	El·lipsoide general. Eixos α, β, γ	Eixos principals fixos (sense dispersió)
	Monoclínic	Un eix 2 o pla m	4	$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{13} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{13} & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon_{(x)} & & \\ & \epsilon_{(y)} & \\ & & \epsilon_{(z)} \end{pmatrix}$		Eix z fix; x i y dependents del color de la llum
	Triclínic	Centre de simetria o absència de simetria	6	$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \epsilon_{(x)} & & \\ & \epsilon_{(y)} & \\ & & \epsilon_{(z)} \end{pmatrix}$		Tots tres eixos principals dependents del color de la llum

(*) En els cristalls biaxials sempre hi ha dispersió en l'angle que formen els eixos òptics. La natura física d'aquesta dispersió ajuda a la identificació del medi. (Vegeu l'exemple del topazi exposat en l'apartat corresponent al conjunt d'operacions de l'aplicació GEMMAT del present article.)

D'aquesta equació resulta que una ona, per a la qual el vector \vec{d} té una direcció \vec{d} especificada, té una velocitat normal c/n , fixada sense cap ambigüitat. És habitual normalitzar l'equació (7) de la manera següent:

$$1 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}, \text{ on } x = nd_x; y = nd_y, z = nd_z.$$

Amb aquesta representació, per a una direcció dels plans d'ona fixada, els vectors \vec{D}' i \vec{D}'' , que poden propagar-se en el medi, tenen la direcció dels eixos de l'el·lipse intersecció del pla d'ona amb l'el·lipsoide indicatriu, i els índexs n' i n'' corresponents són iguals a la semilongitud dels eixos de l'el·lipse. Per als cristalls del sistema cúbic, l'el·lipsoide degenera en una esfera de radi n . Per als cristalls uniaxials, l'el·lipsoide és de revolució i, per tant, té una sola secció cíclica de radi n_0 i eix perpendicular, l'eix òptic. Per als cristalls biaxials, l'el·lipsoide té tres eixos de semilongituds diferents $\alpha < \beta < \gamma$ i, per tant, dues seccions cícliques de radi β i eixos perpendiculars, els dos eixos òptics. L'angle que els eixos òptics formen amb l'eix principal γ , i que en cristal·lografia s'acostuma a representar amb V_γ , ve donat per l'expressió estàndard:

$$\tan V_\gamma = \frac{\gamma}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \beta^2}}.$$

O bé, implícitament, per l'expressió, deduïda directament de l'equació (10):

$$\beta = \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha}{\sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2) + (\gamma^2 - \alpha^2) \cos 2V_\gamma}}. \quad (8)$$

Aquesta equació s'empra en el que hem anomenat *mètode refractoconoscòpic* per al càlcul de β , ja que $2V_\gamma$ es determina a partir de la mesura conoscòpica de $2H_\gamma$,

Referències

- HURLBURT, C. S., Jr. i KAMMERLING, R. C., *Gemología*, 4a ed., Omega (Barcelona, 1993).
- DONALD BLOSS, E., *Introducción a los métodos de cristalografía óptica*, 5a ed., Omega (Barcelona, 1994).
- NOGUÉS, J. M., MARTÍNEZ, S., GARCIA, M. i TAULER, E., *L'òptica cristal·lina*, Publicacions UB (Barcelona, 2004). Ens plau recomanar aquest CD, d'indubtable valor didàctic, assequible a l'alumnat de primer cicle, confeccionat en el Departament de Cristal·lografia, Mineralogia i Dipòsits Minerals de la Facultat de Geologia (UB), així com el CD complementari, *Mineralogia òptica*, Publicacions UB (Barcelona, 2004), elaborat pels mateixos autors i d'altres de l'esmentat departament.
- BORN, M. i WOLF, E., *Principles of optics*, 7a ed. ampliada. Cambridge University Press (Cambridge, 2002).
- SOMMERFELD, A., *Optics. Lectures on theoretical Physics, vol. IV*, Academic Press (1967).
- DEER, W. A., HOWIE, R. A. i ZUSSMAN, J., *An introduction to the rock-forming minerals*, 2a ed., Logman Scientific and Technical (Essex, 1992).
- AREM, J. E., *Color Encyclopedia of gemstones*, 2a ed., Chapman & Hall (1987).
- KLEIN, C., HURLBURT, C. S., Jr., *Manual de mineralogía (Basado en la obra de J. Dana)*, 4a ed., Editorial Reverté (Barcelona, 1996).
- GUNTHER, B., *Tables of gemstones identification*, Verlagsbuchhandlung Elisabeth Lenzen (1988).
- WEBSTER, R., *Piedras preciosas, sus fuentes, descripciones e identificación*, Omega (Barcelona, 1987).

per mitjà de la correcció pertinent deguda a la refracció cristall-aigua.

$$2V_\gamma(\text{conoscòpic}) = \frac{2V_\gamma(\text{refractomètric})}{\arccos(\sin \psi'_1 \sin \psi'_2 \cos \nu + \cos \psi'_1 \cos \psi'_2)}, \quad (9)$$

on ψ'_1 i ψ'_2 es defineixen per: $\beta \sin \psi_i = 1,333 \sin \psi'_i$, $i = 1, 2$ (lleï de Snell).

Finalment, indiquem que els índexs de refracció (n' , n''), corresponents a una direcció \hat{u} del vector d'ones, adopten una expressió senzilla si \hat{u} s'especifica en funció dels angles θ_1 i θ_2 que forma amb els eixos òptics:

$$(n', n'') = \sqrt{2} \frac{\alpha \gamma}{\sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2) + (\gamma^2 - \alpha^2) \cos(\theta_1 \pm \theta_2)}}. \quad (10)$$

L'equació (10) és la de partida per a la generació de les corbes refractomètriques. S'ha emprat en l'aplicació GEMMAT descrita en aquest article mitjançant l'expressió dels angles θ_1 i θ_2 en funció de l'angle φ , que defineix la posició angular del monocristall en la taula del refractòmetre.

En tot l'apèndix s'ha centrat l'interès en l'aspecte ondulatori de la llum. L'estudi més complet i obligat té en compte la propagació dels raigs de llum, la direcció dels quals coincideix amb la velocitat de grup $\nabla_{\vec{k}}\omega(\vec{k})$, és a dir, amb la perpendicular a la superfície dels vectors d'ona.

La taula de la pàgina anterior és un resum de les propietats òptiques dels cristalls transparents.

Agraïments

Ens plau reconèixer les fructíferes discussions que, sobre la temàtica pràctica del present article, hem mantingut amb el Sr. Jordi Figueras (coordinador d'AULAMINER) i amb el Sr. Joan Badell.