

Fractals en àlgebres de Clifford

Jordi Vives Nebot*

Fractals

Les fractals són una classe d'objectes amb propietats matemàtiques molt interessants. El terme va ser encunyat per Benoît Mandelbrot per denominar la classe d'objectes, tant naturals com matemàtics, que tenen la propietat d'autosemblança.

Aquesta propietat indica que parts de l'objecte són semblants a l'objecte sencer. Per exemple, una branca d'un arbre és en certa manera semblant a l'arbre sencer. Tanmateix, la semblança no ha de ser necessàriament estricta, en el sentit d'homotècia. Podem tenir objectes molt irregulars que, observats a diferents escales, siguin semblants a l'objecte inicial. Això passa en mirar un núvol o la forma del mapa d'una costa.

Un arbre, un núvol o una costa són el que Mandelbrot anomena *fractals naturals*. Per la seva imprecisió i irregularitat no admeten un tractament simple. En canvi, en el camp de la matemàtica trobem unes fractals, construïdes amb regles ben definides, que són prou regulars i que Mandelbrot anomena *conjunts fractals*.

Contràriament al que podria semblar del resultat final, les regles per construir una fractal poden ser molt senzilles. Així, per exemple, la *pols de Cantor* (1883) o la corba *floc de neu* de Von Koch (1904) són el resultat d'iterar infinites vegades una operació molt simple (vegeu la figura 1).

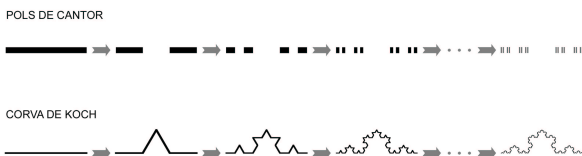


Figura 1: (a) Si partim d'un segment, el dividim en tres parts iguals i en llevem el terç central, repetim l'operació amb els dos terços restants i iterem l'operació indefinidament, com a límit obtenim el conjunt de Cantor. (b) La corba de Von Koch resulta d'iterar indefinidament l'operació següent: partim d'un segment i substituïm el terç central pels dos segments superiors d'un triangle equilàter, fem el mateix amb cada costat de la poligonal resultant, etc.

En el camp dels nombres complexos hi ha fractals

* **Jordi Vives** (Barcelona, 1968) és doctor en Física per la Universitat de Barcelona (2001) i actualment treballa en R+D a l'empresa S. M. DEZAC SA (jordi@fn.ub.es).

molt conegudes i en certa manera *famoses*. Són el conjunt de Mandelbrot i la família dels conjunts de Julia (per Gaston Julia 1893-1978). Aquestes fractals estan associades a la regla d'iteració següent:

$$z_{n+1} = z_n^2 + \mu, \quad (1)$$

on μ és un paràmetre complex i $z \in C$. Si iterem (1) a partir d'un $z_0 \in C$ inicial obtenim una successió $\{z_n\}$ que pot ser divergent o no. El conjunt de Julia \mathcal{J}_μ està format pels punts z_0 del pla complex per als quals la successió no és divergent. Aquest conjunt \mathcal{J}_μ també es caracteritza pel fet de ser el màxim conjunt invariant

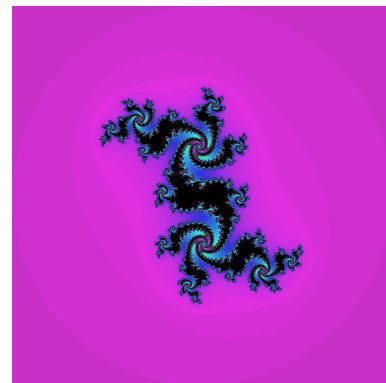


Figura 2: *Fractal de Julia* corresponent al paràmetre $\mu = 0,237931 + 0,539322i$

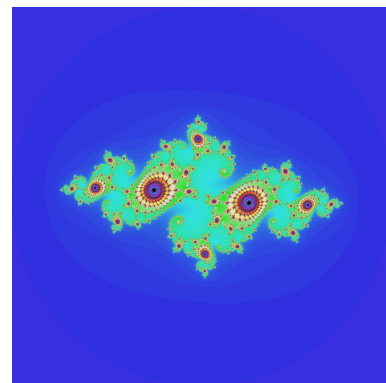


Figura 3: *Fractal de Julia* corresponent al paràmetre $\mu = -0,748903 + 0,134736i$

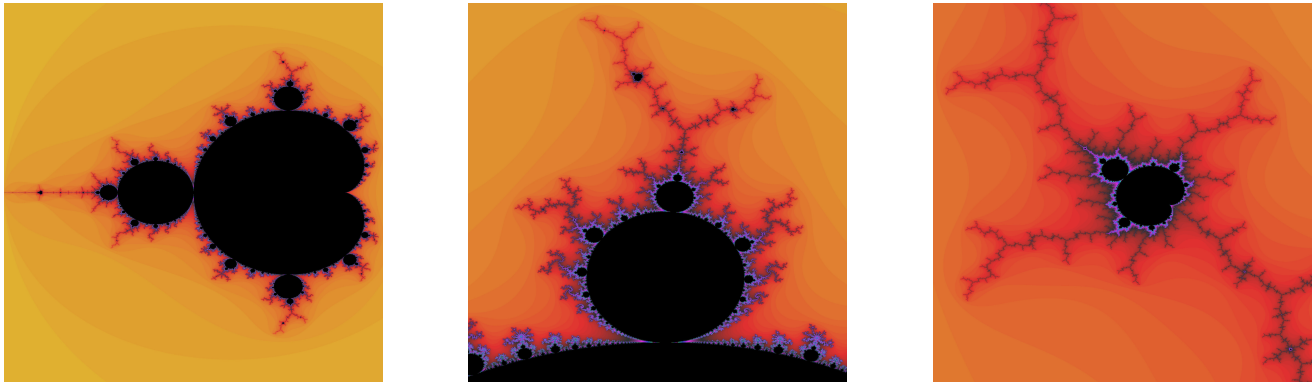


Figura 4: Conjunt de Mandelbrot i ampliacions successives

sota la transformació $z \rightarrow z^2 + \mu$.

La manera més senzilla de construir un conjunt de Julia amb ordinador consisteix a eliminar els punts del pla complex que donin lloc a una successió divergent. El que quedi formarà la fractal buscada. Com que es pot demostrar que, si $|z| > 2$, la successió divergeix sempre, per decidir si un punt s'ha d'eliminar o no, n'hi ha prou d'iterar (1) fins que

$$|z_n| > 2. \quad (2)$$

Les figures 2 i 3 mostren dues fractals de Julia, que són els conjunts en negre. Els punts veïns s'han colorejat en funció del nombre d'iteracions necessàries per arribar a $|z_n| > 2$ i rebutjar-lo.

El conjunt de Mandelbrot també està relacionat amb la iteració de l'operació (1), però en el pla dels paràmetres μ . És el conjunt de punts $\mu \in \mathbb{C}$ per als quals $z_0 = 0$ dona lloc a una successió no divergent. En la figura 4 es mostra el conjunt de Mandelbrot i dues ampliacions successives que fan palesa la propietat d'auto semblança de la fractal.

És interessant fer proves amb diferents ampliacions de la fractal per trobar-hi racons i imatges espectaculars. Però un cop ens hem passejat per tots els racons del conjunt de Mandelbrot i hem vist totes les modalitats de conjunts de Julia, què queda per fer?

Podem provar d'iterar altres aplicacions diferents de la (1). N'hi ha una infinitat i cadascuna donarà diferents fractals.

Una altra opció, molt més interessant, consisteix a buscar nous espais en què construir-hi fractals. Així, la regla (1) i la condició suficient de divergència $|z| > 2$ sempre es podran utilitzar en un espai en què estiguin definides les operacions de suma i multiplicació i el mòdul de cada element.

L'espai dels quaternions s'ha interpretat moltes vegades com una extensió quadridimensional del pla complex. Una fractal del tipus anterior en el pla complex sempre es podrà estendre a una fractal en l'espai dels

quaternions, de la qual podrem visualitzar seccions bidimensionals o tridimensionals. Per a la regla (1) ho va fer el mateix Mandelbrot els anys setanta.

Una altra opció és prendre com a espai una àlgebra de Clifford.

Àlgebra de Clifford

L'àlgebra de Clifford o àlgebra geomètrica, com la va denominar W. K. Clifford (1878), és una extensió multidimensional dels nombres complexos i dels quaternions. Una àlgebra de Clifford admet un conjunt de N generadors vectorials independents de quadrat $+1$ o -1 , que anticommenen entre si i que amb els seus productes originen les 2^N magnituds geomètriques extensives linealment independents que associem a línies, plans, volums, etc. de l'espai

$$e_n^2 = \pm 1, \quad e_n e_m = -e_m e_n, \forall n \neq m. \quad (3)$$

Una àlgebra concreta queda determinada pel nombre de vectors generadors i per la signatura (el nombre de les que tenen quadrat positiu o negatiu). Així, $C_{2,1}$ és l'àlgebra de Clifford generada per dos vectors de quadrat positiu i un de quadrat negatiu. Un element d'aquesta àlgebra és un polinomi del tipus:

$$z = \alpha + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \gamma_1 e_{12} + \gamma_2 e_{23} + \gamma_3 e_{13} + \delta e_{123} \quad (4)$$

on hem abreujat: $e_{ab} = e_a e_b$. Queda ara clar que una àlgebra de tres generadors és un espai de $2^3 = 8$ dimensions i, en general, una àlgebra de N variables és un espai de 2^N dimensions.

Per sumar dos d'aquests polinomis se sumen directament coeficient a coeficient. El producte es defineix de manera que val la propietat distributiva, tenint en compte que cada vegada que multipliquem dos monomis hem de:

- multiplicar els coeficients,
- aplicar la regla d'anticommutació (3) i
- reduir els quadrats dels elements de la base.

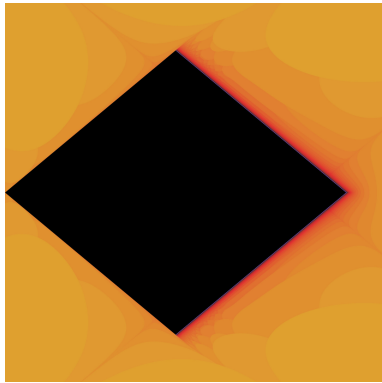


Figura 5: Conjunt de Mandelbrot sobre $C_{1,0}$

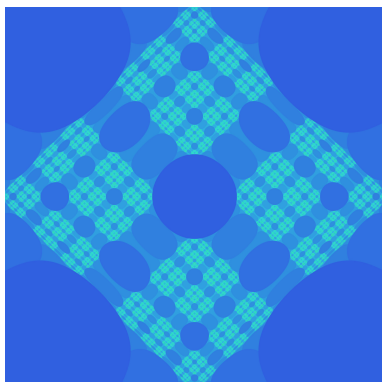


Figura 6: Conjunt de Julia sobre $C_{1,0}$ per al valor del paràmetre $\mu = -2, 2$

Vegem com a exemple el producte següent en $C_{2,1}$:

$$3e_3 \cdot 2e_{13} = 6e_3e_1e_3 = -6e_1e_3e_3 = -6e_1e_3^2 = -6e_1(-1) = 6e_1$$

Les àlgebres de Clifford reals (a coeficients reals) donen com a resultat uns espais amb una estructura més rica i variada que el pla complex i altres generalitzacions que s'obtenen a partir d'aquest pla o dels quaternions, perquè a més de l'element escalar i dels elements de la base tenim els productes binaris, ternaris, etc. d'elements de la base, cada un d'ells de quadrat ± 1 . Els complexos són la subàlgebra parella de $C_{0,2}$ i $C_{2,0}$, o l'àlgebra $C_{0,1}$. Els quaternions, definits o descoberts per Hamilton (1843), són la subàlgebra parella de les àlgebres de Clifford $C_{0,3}$ i $C_{3,0}$, o bé l'àlgebra $C_{0,2}$. A $C_{3,0}$, isomorfa a la tan utilitzada àlgebra de les matrius de Pauli, σ_i hi és inclòs de manera natural el grup de les rotacions $SO(3)$ i a $C_{3,1}$, el grup de transformacions de Lorentz de la teoria de la relativitat. Finalment, potser convé recordar que una àlgebra és un espai vectorial amb un producte intern. Els vectors tridimensionals amb el producte vectorial són una àlgebra no associativa i sense element unitat. L'àlgebra de Clifford és l'àlgebra

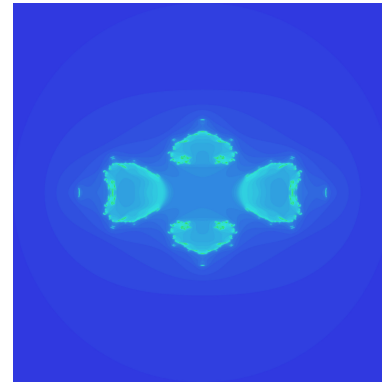


Figura 7: Tall 2D d'un conjunt de Julia sobre $C_{0,2}$

associativa i amb element unitat que incorpora totes les operacions del càlcul vectorial (Lounesto, 1997).

Conjunts de Julia

Com ja hem vist l'àlgebra $C_{0,1}$ és el conjunt dels nombres complexos i els conjunts de Julia i Mandelbrot que s'hi obtenen són prou coneguts. Si ara provem amb l'àlgebra $C_{1,0}$, trobem que el corresponent conjunt de Mandelbrot és simplement el quadrat que mostra la figura 5. També mostrem en la figura 6 la fractal de Julia corresponent al paràmetre $\mu = -2, 2$.

Les àlgebres $C_{0,2}$, $C_{1,1}$ i $C_{2,0}$ tenen quatre dimensions. Un punt de qualsevol d'aquests espais (així és com els designarem d'ara endavant en atenció a la construcció de fractals) es pot representar per:

$$z = \alpha + \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta e_{12}.$$

Els conjunts de Julia o de Mandelbrot que obtenim són objectes quadridimensionals que no es poden visualitzar fàcilment. Una manera d'obtenir una figura representable consisteix a fer un tall o secció. Si fixem dues direccions obtenim figures bidimensionals (a partir d'ara 2D), com la que mostra la figura 7. I si només fixem una de les quatre direccions i deixem variar les altres tres, la fractal resultant és un objecte tridimensional (d'ara endavant, 3D).

Les figures 8a i 8b mostren diversos talls d'una fractal de Julia en l'espai dels quaternions identificat amb l'àlgebra $C_{0,2}$, per al valor del paràmetre $\mu = -0, 8 + 0, 285e_1$. La figura 8a és el tall per l'hiperplà $\delta = 0$ (prenem el component segons e_{12} constant i igual a zero), mentre que la figura 8b correspon al tall per l'hiperplà $\beta = 0$ (es considera que el coeficient de e_1 és nul). Aquestes són les fractals que va trobar el mateix Mandelbrot en estendre a l'espai dels quaternions el mètode que inicialment havia aplicat al pla complex. Aquí les hem tornat a obtenir per un altre camí, en el marc de l'àlgebra de Clifford $C_{0,2}$.

El camí iniciat ens permet, però, trobar o definir fractals completament noves utilitzant altres àlgebres,

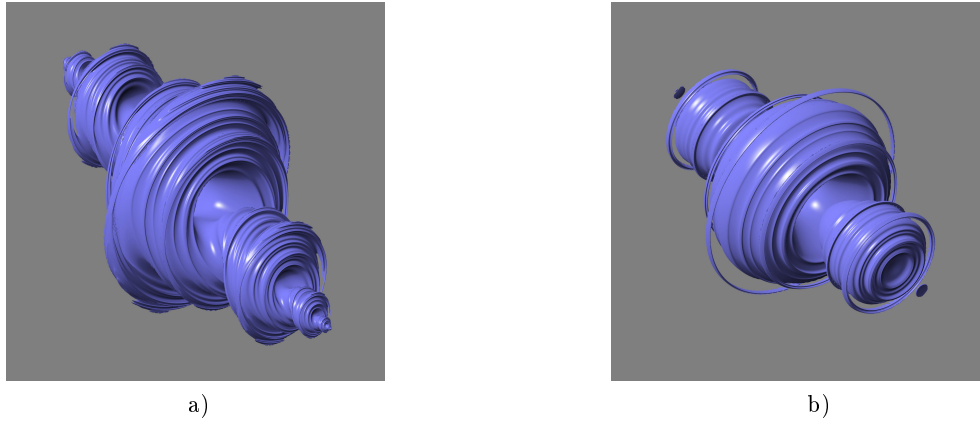


Figura 8: Diversos talls del conjunt de Julia sobre $C_{0,2}$ corresponent al paràmetre $\mu = -0,8 + 0,285e_1$. a) Tall 3D per l'hiperplà $\delta = 0$. b) Tall 3D per l'hiperplà $\beta = 0$

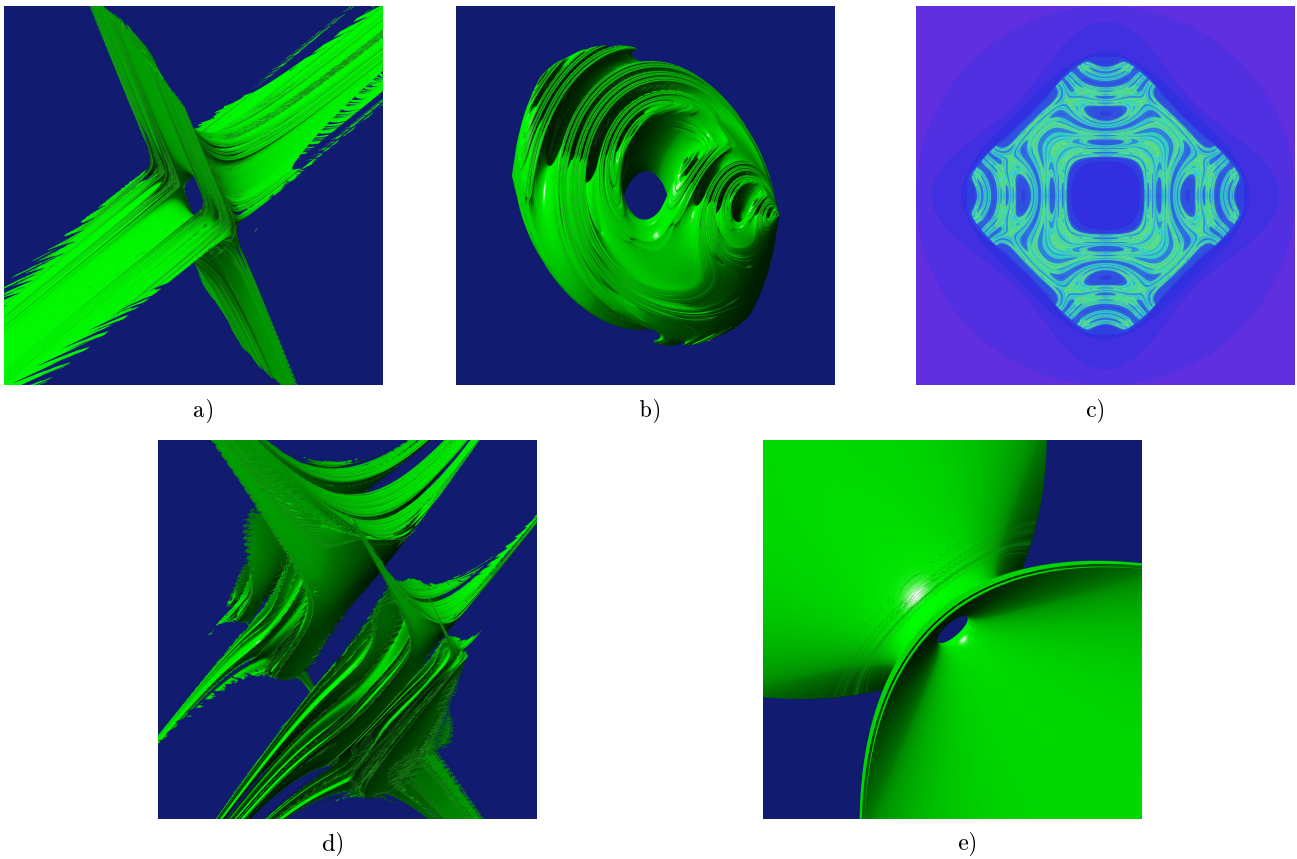


Figura 9: Diversos talls del conjunt de Julia sobre $C_{2,0}$ corresponent al paràmetre $\mu = -1,5 + 0,75e_1$. a) Tall 3D per l'hiperplà $\beta = 0$. b) Tall 3D per l'hiperplà $\delta = 0$. c) Tall 2D pel pla $\beta = \delta = 0$. d) Tall 3D per l'hiperplà $\gamma = 0$. e) Tall 3D per l'hiperplà $\alpha = 0$

com ara la $C_{2,0}$, que genera un espai hiperbòlic quadri-dimensional, perquè té elements de la base amb quadrat positiu:

$$e_1^2 = e_2^2 = +1$$

$$e_{12}^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1 e_1 e_2 e_2 = -e_1^2 e_2^2 = -1$$

Les fractals que s'hi obtenen són molt més curioses i variades, ja que la seva estructura presenta reminiscències del caràcter hiperbòlic de l'espai. En la figura 9a mostra el tall per l'hiperplà $\beta = 0$ del conjunt de Julia corresponent al paràmetre $\mu = -1, 5 + 0, 75e_1$, en l'àlgebra $C_{2,0}$. En canvi, la fractal que s'obté fent un tall del mateix conjunt de Julia per l'hiperplà $\delta = 0$ és completament diferent (figura 9b). A la figura 9c es mostra el tall 2D que s'obté fixant $\beta = \delta = 0$. Les figures 9d i 9e corresponen a talls 3D del mateix conjunt de Julia pels hiperplans $\gamma = 0$ i $\alpha = 0$, respectivament.

Si seguim amb aquest mateix joc obtenim formes suggestives: la figura 10 és el drac autohiperbòlic¹, la figura 11 sembla una moto futurista i la 12 fa pensar en una nau de *La Guerra de les Galàxies*.

L'àlgebra $C_{1,1}$, pel fet de ser isomorfa a la $C_{2,0}$, dóna les mateixes fractals, intercanviant els eixos e_2 i e_{12} . En efecte, adonem-nos que:

$C_{2,0}$	$e_1^2 = +1$	$e_2^2 = +1$	$e_{12}^2 = -1$
$C_{1,1}$	$e_1^2 = +1$	$e_2^2 = -1$	$e_{12}^2 = +1$



Figura 10: Tall 3D per l'hiperplà $\gamma = 0$ del conjunt de Julia corresponent a $\mu = 0, 4 - 0, 3e_{12}$ en $C_{2,0}$. La imatge del fons és el tall 2D de la mateixa fractal per $\gamma = 0$ i $\delta = 1, 5$

¹Aquesta imatge va guanyar el primer premi al *II Concurso Nacional de Imágenes Fractales*, organitzat per la Facultat de Informàtica de la UPM.

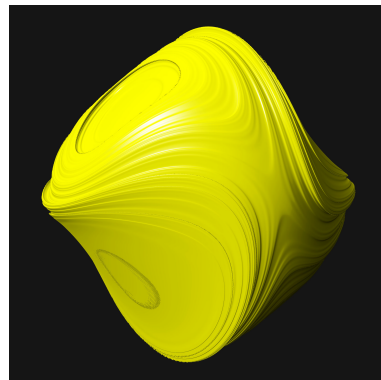


Figura 11: Tall 3D per l'hiperplà $\delta = 0$ del conjunt de Julia corresponent a $\mu = 0, 5 + 0, 6e_{12}$ en $C_{2,0}$

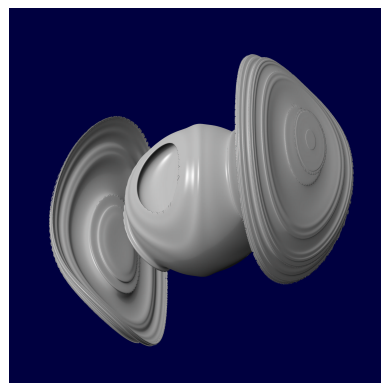


Figura 12: Tall 3D per l'hiperplà $\delta = 0$ del conjunt de Julia corresponent a $\mu = 0, 1 + 0, 2e_1 + 0, 3e_2 + 0, 75e_{12}$ en $C_{2,0}$

Les àlgebres $C_{0,3}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$ i $C_{3,0}$ són espais estructuralment graduats de vuit dimensions i això dóna molt joc per obtenir talls 2D i 3D de diverses classes, en funció dels coeficients que fixem. Les fractals 13 i 14 són dos talls d'un mateix conjunt de Julia en l'àlgebra $C_{3,0}$ per al paràmetre $\mu = -0, 7 + 0, 3e_1 + 0, 3e_3 + 0, 2e_{12} + 0, 2e_{23}$. El tall de la figura 13 correspon a prendre nuls els coeficients de e_2 , e_3 , e_{12} , e_{13} i e_{23} , mentre que el tall de la figura 14 pren nuls els coeficients de e_3 , e_{12} , e_{13} , e_{23} i e_{123} .

Dibuixant les imatges

Els talls bidimensionals s'obtenen d'una manera completament anàloga a com es construeixen les imatges dels conjunts de Julia i de Mandelbrot en el pla complex. Es pren un punt z_0 del subespai bidimensional de l'àlgebra de Clifford, s'itera l'aplicació (1) fins que es compleix la condició (2) i se li assigna un color segons el nombre d'iteracions necessàries. Les figures 15(a) i 15(b) mostren com canvia l'aspecte d'una mateixa fractal si canviem l'assignació de colors.

És important notar que la fractal queda delimitada per capes de punts que porten a la desigualtat (2) al cap

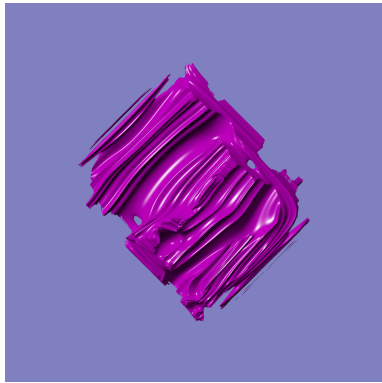


Figura 13:

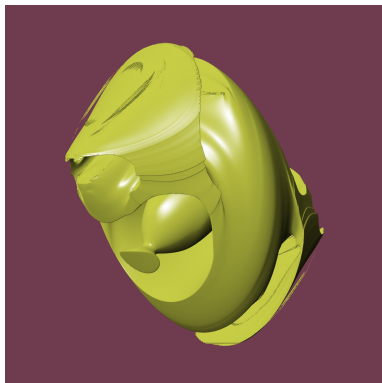


Figura 14:

d'un nombre diferent d'iteracions. Les primeres capes i els seus contorns són molt suaus, però en augmentar el nombre d'iteracions la silueta de la capa es va tornant més sinuosa. En el límit tenim el contorn de la fractal que és infinitament anfractuosa.

Tot això serveix per entendre millor com es fan les imatges dels talls tridimensionals.

Podem prendre la imatge per una finestra en què el color de cada punt es determina pel raig de llum que la travessa. Aquest mètode de creació d'imatges 3D es coneix com a *traçat de raigs (Ray tracing)* i consisteix a seguir cap enrere els raigs de llum a partir de la imatge a través de l'escena 3D fins a arribar a determinar-ne el color.

El *traçat de raigs* pot arribar a ser molt complicat, ja que es poden assignar diferents propietats òptiques a les superfícies i s'han de seguir tots els raigs reflectits i refractats en cada superfície. Fer tot això complicaria el programari i dificultaria el reconeixement de la fractal: pot arribar a ser impossible fer-se una idea mental de la forma d'un objecte tan complicat com una fractal si, a més, la imatge està plena de reflexos d'ella mateixa. Per això hem optat per simplificar les opcions i només permetem un objecte completament opac i llis, amb un únic color per a l'objecte i un altre per al fons, i per il·luminar l'escena amb una única font de llum puntual a

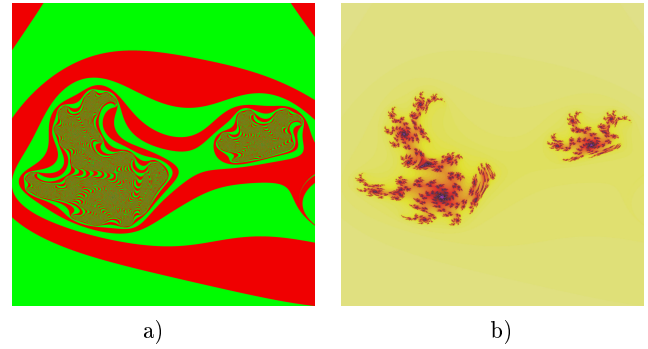


Figura 15: (a) Ampliació d'un tall 2D d'un conjunt de Julia en $C_{2,0}$ alternant els colors verd i vermell. (b) La mateixa iteració amb una combinació de colors diferent

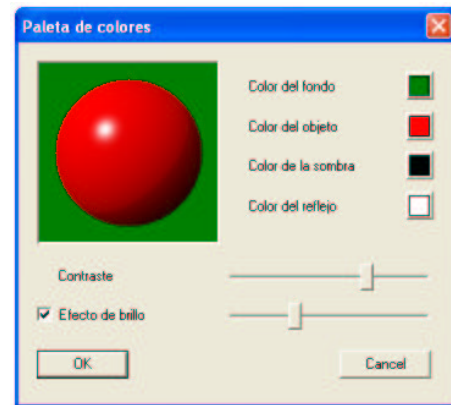


Figura 16: Captura de pantalla de diàleg per escollir els colors del tall 3D

l'infinit. La figura 16 mostra la pantalla per seleccionar el color del tall 3D.

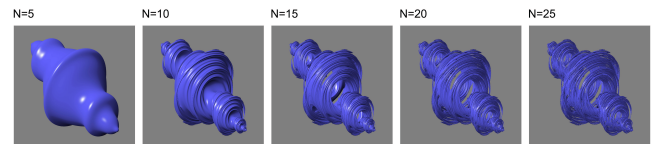


Figura 17: Vista de diverses aproximacions de la fractal de la figura 8

Es pot seleccionar el color de l'objecte, el color de la cara fosca i, amb la barra de contrast, fer que el canvi sigui més o menys gradual. També es pot seleccionar si es vol que aparegui un reflex sobre la superfície, de quin color i quina difuminació ha de tenir.

Prentem com a eix X l'eix horitzontal de la imatge i l'eix Y vertical, l'eix Z ens indica la direcció que han de seguir els raigs per trobar el tall de la fractal. Cada raig busca a través de l'espai tridimensional que conté el tall. Si arriba al final sense trobar res, li assigna el color del fons i, si troba un punt de la fractal, li assigna el color corresponent a la seva orientació.

Per a cada valor (x, y) anem augmentant z i per al punt (x, y, z) iterem N vegades l'aplicació (1) fins que es compleixi la condició (2). Si això passa abans d'un nombre d'iteracions N escollit considerem que el punt és fora de la fractal i continuarem avançant en z . En cas contrari, considerarem que hem trobat un punt de la superfície de la fractal.

Com ja hem dit abans, la fractal és el límit del procés anterior per a N tendint a infinit. El que obtenim per a un valor de N fix és una superfície que recobreix la fractal amb precisió creixent. La figura 17 mostra diverses aproximacions a la mateixa fractal, per als valors de N : 5, 10, 15, 20, 25. Hi veiem com amb un nombre d'iteracions petit la superfície resultant és una aproximació

molt grollera de la fractal, molt suau. En canvi, per a valors més grans de N l'aproximació és més bona i apareixen les anfractuositats que hem dit més amunt. Tampoc no convé fer gaires aproximacions perquè per determinar el color en cada punt de la superfície de la imatge necessitem determinar el vector normal a la superfície. Si ens aproximem massa a la fractal, la superfície és «pràcticament no diferenciable» (el vector normal varia molt ràpidament).

Convé prendre, doncs, un valor intermedi de N , que doni una imatge prou acurada sense perdre massa «diferenciabilitat». En les imatges 3D que hem presentat aquí N té valors entre 10 i 15.

Bibliografia

- MANDELBROT, B., *La Geometría fractal de la naturaleza*, Metatemas 49, Tusquets (1997).
PENROSE, R., *The emperor's new mind*, Oxford University Press (1989).
HESTENES, D., *New foundations for classical mechanics*, Kluwer Academic (Dordrecht, 1990).
RIESZ, M., *Clifford numbers and spinors*, Kluwer Academic (Dordrecht, 1993).
LOUNESTO, P., *Clifford algebras and spinors*, Cambridge University Press (1997).

Ve de la pàgina 1

El que passa, però, és que en aquest cas —com en tants d'altres— una cosa és el país ideal i una altra, el país real. I, al país real, les beques són un clar arcaisme. Perquè no estan servint ni per formar futurs professors ni per ajudar estudiants avantatjats. Les beques són, diguem-ho clar, una forma de precarització del treball, perquè els becaris, avui en dia, no són més que treballadors de la recerca. I, sense ells, un gran percentatge de la nostra recerca simplement no es podria dur a terme. Per això, en una època en què —se suposa— els drets laborals gaudeixen d'una protecció i d'un reconeixement amplis, ens trobem davant d'un col·lectiu amb un caràcter clarament laboral que no té els mateixos drets que la resta de treballadors del país.

Certament que hi ha avenços: a Catalunya, als becaris de la Generalitat, els dos darrers anys, se'ls fa un contracte laboral (cosa que, per cert, ha implicat que perdin salari net respecte als becaris de fa uns anys, abans de l'establiment dels contractes). Però això no deixa de ser un pedaç. Un pedaç des del punt de vista dels beneficiaris, que al capdavall obtenen només el privilegi d'entrar al gran col·lectiu de treballadors en precari. I pedaç també —i potser això, amb sentit de país, és el més greu— des del punt de vista de l'activitat científica i de recerca.

No és bo —entenem— que la major part de la recerca recaigui encara sobre les universitats. Una recerca evolucionada necessita centres especialitzats, complexos, formats per científics, enginyers i tècnics. Això no vol dir que no creguem que sigui positiu el fet de compatibilitzar docència i recerca a les universitats. De cap manera. La universitat ha de fer recerca. És indispensable. Però no ha de ser la universitat, ni els professors universitaris, els que hagin de portar la major part de la recerca. La recerca no és ni una afició ni un complement. És una activitat a temps complet. La gran recerca, al món occidental, no la fan solament les universitats, sinó també centres que s'hi dediquen exclusivament. Cal superar el voluntarisme. Pot ser encomiable, però així no arribarem —com a país— enlloc.

És precisament en aquest context que caldria ja anar-se plantejant la creació d'una autèntica carrera de científic. Aquest, i no altre, ha de ser el camí per on ha d'evolucionar, modernitzar-se i encaixar en la societat, l'arcaica figura del «becari».