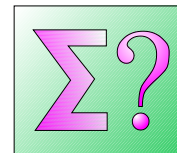


La física en problemes

Salvador Estradé i Jordi Vives



Tal com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'aními a participar-hi.

A cada número de la *Revista* es proposaran dos problemes: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i es premiarà els guanyadors amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

Juntament amb la solució, l'alumne ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 de juny de 2005

a: probuni@ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agraiem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

Problema per a l'alumnat de batxillerat

Llancem un cos des d'una altura H amb una velocitat inicial v_0 . Amb quin angle respecte a l'horitzontal caldrà fer aquest llançament perquè el cos impacti amb el terra a la màxima distància horitzontal possible del punt de sortida?

Problema per a l'alumnat universitari

Larry Niven en el seu llibre *Ringworld* (1970) va idear una construcció immensa consistent en un món en forma d'anell que rodeja completament un sol. La rotació de l'anell generaria força centrífuga per simular la gravetat a la superfície.

Verifiqueu que aquest sistema no és estable sota desplaçaments de l'eix de rotació de la posició del Sol.



Solució als problemes del número 27 de la *Revista*

Del problema per a l'alumnat de batxillerat

Com que no hem rebut cap resposta suficientment cor-

recta, donem la nostra solució:

El cost energètic perquè tota la biomassa M_b abandoni el lligam amb el camp gravitatori terrestre, ha de complir:

$$E_e + \left(-G \frac{M_{\text{Terra}} M_b}{R_{\text{Terra}}} \right) = 0.$$

Per tant, obtenim que E_e , l'energia d'escapament necessària és de $6,26 \cdot 10^{27}$ J.

D'altra banda, el cost energètic per augmentar el radi de l'òrbita de la Terra és:

$$E_{\text{co}} = \frac{1}{2} \left(-G \frac{M_{\text{Sol}} M_{\text{Terra}}}{R_{\text{final}}} \right) - \frac{1}{2} \left(-G \frac{M_{\text{Sol}} M_{\text{Terra}}}{R_{\text{inicial}}} \right).$$

S'ha tingut en compte que la biomassa és negligible enfront de la massa de la Terra i que per a un satèl·lit que descriu òrbites circulars es compleix que la seva energia mecànica val la meitat de la seva energia potencial gravitatori.

Així doncs, l'energia per augmentar el radi de l'òrbita de la Terra és de $8,42 \cdot 10^{32}$ J.

En conseqüència, la primera opció té un cost energètic més petit.

Del problema per a l'alumnat universitari

Com que no hem rebut cap resposta suficientment correcta, donem la nostra solució:

Formació de l'halo solar

El plantejament d'aquest problema va ser idea de la Dra. Estela Martín, del Departament de Física Aplicada i Òptica de la UB, a qui estem molt agraïts.

L'halo solar es forma per la presència de cristalls de gel a l'atmosfera. Els cristalls de gel poden ser plans com escates o prims com agulles, però sempre tenen forma de prisma hexagonal.

En la figura 1 mostrem com un raig de llum que incideix per la cara a només té descomposició cromàtica si surt per les cares c o e. Per les cares b i f no surt llum, perquè dintre del cristall apareix l'efecte de reflexió total i per la cara d la llum surt sense cap alteració, perquè és paral·lela a la cara a. L'angle entre les cares a i c és de 60° , igual que entre les cares a i e.

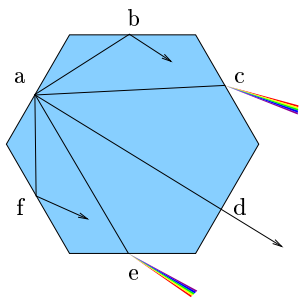


Figura 1: Diferents comportaments d'un raig de llum dintre d'un cristall de gel

En principi els cristalls no tenen per què estar alineats i la llum pot incidir en qualsevol angle. Si fem un tall del cristall, segons la direcció d'incidència (figura 2) podem veure que l'angle efectiu entre les cares és més gran de 60° .

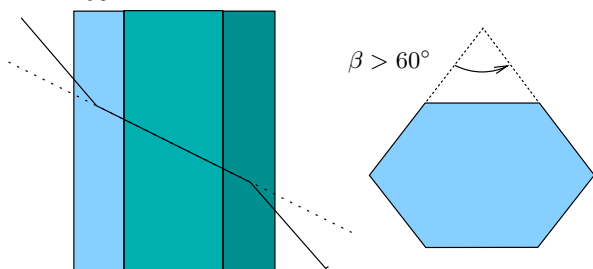


Figura 2: Tall d'un cristall de gel segons l'angle d'incidència

La funció entre l'angle efectiu β i l'orientació del cristall tindrà un mínim en $\beta = 60^\circ$ i pot arribar fins a 180° .

Estudiem la refracció entre dues cares d'un cristall separades per un angle β qualsevol (figura 3).

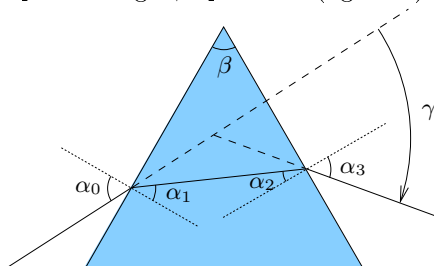


Figura 3: Refracció entre dues cares d'un cristall

Si considerem que l'índex de refracció de l'aire és 1 i l'índex de refracció del gel és n , obtenim les equacions següents:

$$\sin(\alpha_0) = n \sin(\alpha_1) \quad (1)$$

$$n \sin(\alpha_2) = \sin(\alpha_3) \quad (2)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta \quad (3)$$

$$\gamma = \alpha_0 + \alpha_3 - \beta \quad (4)$$

$$\sin(\alpha_2) \leq 1/n \quad (5)$$

Les equacions (1) i (2) són l'aplicació de la llei de Snell entre els angles d'incidència i refracció en entrar i sortir del cristall. L'equació (3) és una relació entre els

angles interiors del cristall. L'equació (4) obté l'angle γ , que és el desviament entre el raig de llum que entra en el cristall i el raig que en surt. L'equació (5) és la condició per evitar la reflexió total dintre el cristall.

En la figura 4 mostrem la gràfica resultant de resoldre les equacions d'(1) a (4) per obtenir el valor de γ en funció de l'angle d'incidència α_0 , prenent $n = 1.309$ i $\beta = 60^\circ$.

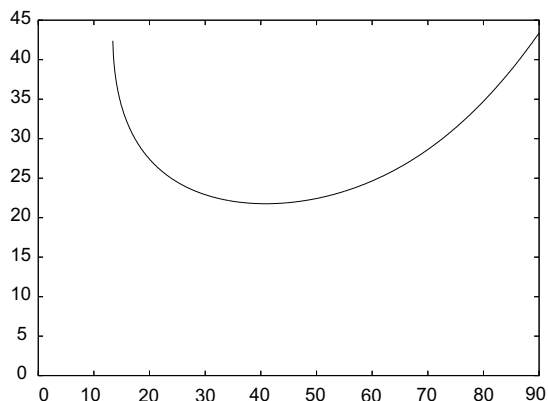


Figura 4: Angle de desviament en funció de l'angle d'incidència

Podem veure que la funció té un mínim per sota del qual no hi ha refracció i per tant el cel queda nítid. A partir d'aquest angle el cel queda emblanquinat i s'acumula la major intensitat de llum a prop del mínim.

Calculem el valor de γ mínim.

$$\frac{d\gamma}{d\alpha_0} = 0. \quad (6)$$

I obtenim les condicions:

$$\alpha_0 = \alpha_3 \quad (7)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\beta}{2} \quad (8)$$

que si substituïm en les equacions d'(1) a (5) obtenim:

$$\alpha_0 = \arcsin\left(n \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \quad (9)$$

$$\gamma = 2\alpha_2 - \beta \quad (10)$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \leq \frac{1}{n} \quad (11)$$

L'halo solar es forma quan els cristalls de gel estan orientats en qualsevol direcció i β està entre 60 i 180° .

$$\frac{\pi}{3} \leq \beta \leq \pi \quad (12)$$

Per la condició de reflexió total (11) obtenim:

$$\frac{\pi}{3} \leq \beta \leq 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \quad (13)$$

que, si substituïm en les equacions (9) i (10) arribem a:

$$2 \arcsin\left(\frac{n}{2}\right) - \frac{\pi}{3} \leq \gamma \leq \pi - 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right). \quad (14)$$

Prenent l'índex de refracció del gel, obtenim:

$$21,76^\circ \leq \gamma \leq 80,37^\circ. \quad (15)$$

S'acumula la major intensitat de llum al voltant del mínim i forma un cercle brillant entorn del Sol a 22° d'angle.

Altres fenòmens creats per la refracció del Sol en els cristalls de gel de l'atmosfera són:

- L'arc circumzenital, format per la llum que entra per un lateral del prisma hexagonal i surt per la base o tapa del mateix amb lo que $\beta = 90^\circ$ i l'arc es forma a $45,5^\circ$.

- Els arcs tangents formats quan els cristalls de gel molt prims en forma d'agulles són orientats pel vent horitzontalment respecte al terra. Com que depenen de la posició del Sol i de l'observador l'angle format pels cristalls varia, la corba resultant pot ser molt complexa.
- Els parhelis formats quan els cristalls de gel són plans com escates i suren com discos voladors, flotant pel vent. El càlcul és el mateix que per als arcs tangents, girant la figura 90° . Però com que les escates de gel són molt primes, la longitud de l'arc és molt petita i queda reduït a dues taques simètriques i brillants entorn dels 22° del Sol.

A la següent pàgina web hi ha una explicació bastant acurada d'aquests fenòmens i inclou una galeria de fotos: <http://www.sundog.clara.co.uk/atoptics/phenom.htm>