La física dels instruments musicals

Alfons Albareda i Tiana*
Departament de Física Aplicada. Universitat Politècnica de Catalunya

Introducció

Aquest treball vol acostar dos mons que no sempre són propers: el dels físics i el dels músics. A la vegada, aprofitarem l'estudi de les vibracions i les ones produïdes pels instruments musicals per posar exemples reals i motivadors a l'abast de professors de física.

Partirem de l'estudi de les ones estacionàries produïdes als instruments, que són les que condicionen la freqüència o nota de la música. Continuarem per les vibracions forçades i les ressonàncies que produeixen aquelles ones estacionàries en els instruments, i analitzarem els problemes i les solucions dels canvis de medi elàstic. Finalment veurem com influeix l'excitació de l'instrument en el seu to. Intentarem portar aquestes anàlisis als diferents tipus d'instruments musicals: vent, corda i percussió.

Aquest article no pot exhaurir el tema, que resta obert en moltes direccions. L'enfoc del treball és partir dels conceptes bàsics i les fórmules elementals i anar a buscar les aproximacions entre física i música, cercant interpretacions físiques a situacions noves per als físics i, de vegades, clàssiques per als instrumentistes.

Ones estacionàries en els instruments musicals

Tots els instruments musicals parteixen d'una vibració produïda en un medi elàstic, que podem modelitzar com unidimensional o bidimensional i que, a l'origen, sempre és una ona estacionària. Dins del model unidimensional analitzarem breument les ones estacionàries en una corda i després en veurem les diferències amb les ones en un instrument de vent o de percussió.

Les ones estacionàries poden ser formades per la superposició de dues ones viatjant en sentits oposats: una cap a la dreta i l'altra cap a l'esquerra, d'igual amplitud i freqüència. La velocitat de propagació de les ones en una corda ideal ve fixada per la tensió T que estira la corda, i per la seva densitat lineal de massa μ:

$$v = \sqrt{T/\mu}$$

de manera que si canviem el gruix o el material de les cordes, i per tant la densitat lineal de massa μ, aconseguirem velocitats de propagació diferents.

Com que la freqüència f d'una ona depèn d'aquesta velocitat i també de la longitud d'ona λ:

$$f = v/\lambda\,,$$

en utilitzar cordes més pesades (μ gran) el medi elàstic té més inèrcia i obtenim velocitats de propagació més petites i, per tant, freqüències baixes: notes greus; mentre que les cordes més lleugeres ens donen les notes de freqüència més alta: les agudes. En ajustar l'afinació d'un instrument de corda amb la clavilla, el que es fa és variar la tensió T de la corda acabant d'ajustar aquesta velocitat al seu valor correcte. Si s'augmenta la tensió farem més gran la velocitat de les ones i tindrem la nota més aguda.

L'altre paràmetre que condiciona la freqüència de la oscil·lació és la longitud d'ona. En el cas dels instruments de corda, aquesta ve fixada per la longitud de la corda. O millor dit, per la longitud L del tros de corda que es deixa vibrar. En efecte, són les condicions de contorn del medi elàstic les que condicionen la longitud de les ones estacionàries. En el cas de les cordes, això significa que els extrems han de ser punts de desplaçament nul, nodes de desplaçament per l'ona estacionària, i per tant, la longitud L ha de ser un múltiple enter de la meïtat de la longitud d'ona, ja que cada $\lambda/2$ es produeix un node de l'ona estacionària:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad f = n\frac{v}{2L} = nf_0$$

Si abans ja havíem fixat la velocitat de propagació de les ones (amb el tipus de corda i la tensió), ara en imposar una certa llargada a la corda limitem les longituds d'ona i, per tant, les freqüències de vibració, a les que siguin múltiples enters d'una freqüència f_0, que anomenarem la *freqüència fonamental*. Això vol dir que, si en excitar la corda ho fem amb qualsevol freqüència, només es produiran ones estacionàries per a aquelles freqüències que siguin múltiples de la fonamental, les altres desapareixeran molt ràpidament. Aquest conjunt de freqüències possibles són els diferents harmònics de la freqüència fonamental.

El guitarrista, en col·locar el dit sobre una de les cordes (primer tria una corda i, per tant, una velocitat

*__Alfons Albareda i Tiana__ (Barcelona,1948) és doctor en Física i professor titular a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Telecomunicació de Barcelona de propagació, i després limita la longitud L amb què pot vibrar aquesta corda), produeix una nota que ve definida per la seva freqüència fonamental, que és com la coneixem: *do*, *re*, etc. A la vegada que es produeix aquella freqüència fonamental, també es produeixen els harmònics superiors de freqüència doble, triple, etc.

En el cas dels instruments de vent, l'ona estacionària es produeix en una columna d'aire, amb unes condicions de contorn que corresponen, per a quasi tots els instruments de vent, a dos nodes de pressió, un a cada extrem. Aquests nodes, en els que la pressió és l'atmosfèrica, estan situats aproximadament als extrems oberts de l'instrument (la distància entre nodes és la llargada de l'instrument més una distància igual a 0,58 vegades el radi del forat de l'instrument, ja que l'extrem obert de l'instrument, per on radia el so, provoca un node una mica més enfora que l'extrem de l'instrument). En aquest cas, la velocitat de propagació de les ones és sempre la mateixa (el músic no la pot triar com fa el seu company de corda) i ve condicionada pel mòdul de compressibilitat de l'aire B i per la seva densitat ρ:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma B}{\rho}}$$

on $\gamma = 1,4$ és el quocient de les calors específiques a pressió constant i a volum constant.

En l'orgue la longitud d'ona la fixa un tub de llargada diferent per a cada nota. Això mateix fa la flauta del Perú: la quena.

Quan el músic de vent tapa tots els forats de l'instrument és quan la llargada L de l'ona estacionària és la màxima, és a dir, la llargada del seu instrument. A mesura que destapa algun forat provoca l'existència de nodes de l'ona a cada forat destapat i disminueix la longitud d'ona, de manera que la nota és més aguda.

Igual que amb els instruments de corda, les freqüències obtingudes amb els instruments de vent seran els harmònics sencers de la freqüència fonamental, ja que tots dos tipus d'instruments tenen nodes a cada extrem del medi unidimensional on es produeix l'ona estacionària, la corda o el tub. Només per a alguns pocs instruments de vent, com el clarinet, les condicions de contorn equivalen a un node en un extrem i a un antinode a l'altre. En aquest cas, la longitud L fixada per l'instrument correspon a la distància entre un node i un antinode, és a dir, un múltiple senar de quarts d'ona:

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$f = (2n+1)\frac{v}{4L} = (2n+1)f_0$$

En aquests instruments només es produeixen els harmònics senars.

Un aspecte que es pot deduir o verificar d'aquests models físics és la influència de la temperatura en l'afinació dels instruments. Tots els músics coneixen els maldecaps que tenen quan toquen a l'hivern en una sala freda i canvia l'afinació a mesura que avança el concert, en escalfar-se l'instrument. Si ens fixem en l'expressió de la velocitat de les ones en una corda deduïm que, en escalfar-se, quasi no varia la seva densitat lineal μ, però sí que ho fa la tensió T, ja que en dilatar-se la corda disminueix la tensió a què està sotmesa. Per tant, la velocitat de les ones i la freqüència de les notes disminueix amb l'escalfor en els instruments de corda.

Per als de vent, la influència és diferent. El mòdul de compressibilitat pràcticament no varia amb la temperatura, però la seva densitat disminueix en dilatar-se l'aire; per tant, la velocitat de les ones i la seva freqüència augmenta en escalfar-se l'aire a l'interior de l'instrument (la velocitat de propagació de les ones a l'aire augmenta en 1,3 m/s per a cada °C de temperatura). El problema, per tant, és greu perquè les cordes i els vents es desafinen en sentits oposats, els instruments de corda baixen de to mentre que els de vent es tornen més aguts.

No tots els instruments produeixen ones estacionàries unidimensionals: tota la gamma de percussions està plena d'instruments on la vibració es produeix en superfícies en general circulars: es tracta de la família dels timbals. En aquests instruments, on el medi elàstic és bidimensional, les ones estacionàries es poden obtenir per superposició de quatre ones, una en cada un dels sentits de propagació de les dues dimensions, i donar lloc a vibracions amb línies nodals que depenen de les condicions de contorn i del mode de vibració. Si la superfície a vibrar fos rectangular, els modes de vibració tindrien freqüències que estarien relacionades amb les dues freqüències fonamentals, f_{0x} i f_{0y}, de les dues direccions principals del rectangle, segons l'expressió:

$$f = \sqrt{n_x^2 f_{0x}^2 + n_y^2 f_{0y}^2}$$

és a dir, per mitjà de dos nombres enters al quadrat. Per tant, aquests modes ja no serien harmònics (múltiples) del mode fonamental.

En el cas de superfícies circulars, els modes de vibració són molt més complicats i les funcions d'ona amb simetria circular s'expressen per funcions de Bessel. Una conseqüència és que les freqüències dels modes superiors ja no són exactament els múltiples enters del mode fonamental com en els altres instruments de corda o vent. Aquesta és la raó principal per la qual la funció dels instruments de percussió en les orquestres va dirigida més a marcar les cadències musicals que a crear la melodia.

El fet que en tots els instruments de corda i de vent s'obtinguin els harmònics múltiples de la freqüència fonamental és una de les causes que condiciona el valor de les freqüències de les notes musicals i l'estructura en octaves. Per comprendre-ho, passem revista a la superposició de dues oscil·lacions diferents.

Si superposem dues oscil·lacions d'igual freqüència obtenim un senyal de la mateixa freqüència, on l'amplitud depèn de la fase relativa de les dues oscil·lacions originàries. Si aquestes dues oscil·lacions no coincideixen en freqüència però tenen valors molt propers, f_1 i f_2, el resultat és una oscil·lació de freqüència f_0, el valor mitjà de les dues freqüències, modulada en amplitud a una freqüència de batec que és igual a la diferència de freqüències δf:

$$f_0 = (f_1 + f_2)/2 \qquad \delta f = f_2 - f_1$$

Si aquesta diferència de freqüències és petita, l'oïda no arriba a percebre dues freqüències, sinó que les refon en una única: seran *consonants*. A més, la seva modulació d'amplitud és agradable a l'oïda. Per contra si la diferència de freqüències fos més gran, l'oïda les distingiria com a diferents i seria molest: serien *dissonants*.

Aquestes consideracions tenen diverses conseqüències. Per una banda, això afecta el valor de les freqüències de les notes. Si desitjem tocar dues notes a la vegada, per exemple en un piano, cada nota va acompanyada pels seus harmònics, de manera que aconseguirem que les dues siguin consonants si els harmònics respectius coincideixen entre ells. Això serà així si les freqüències de les dues notes estan relacionades per fraccions de nombres sencers: si $f_2 = 5/3 f_1$ resultarà que el cinquè harmònic de f_1 coincidirà amb el tercer harmònic de f_2, produïnt la consonància buscada. Com la consonància més senzilla de trobar seria si $f_2 = 2f_1$, aquesta tindrà un pes destacat: en efecte, aquesta és la relació entre dues octaves consecutives, de manera que la freqüència doble d'un *do* també és un *do*, però de l'octava superior següent. Aquesta és una de les raons per les quals cada octava correspon a relacions de freqüència 1, 2, 4, 8, etc.

A la vegada, les relacions de 3/2, 4/3, 5/3, 3/1, etc. són les que marquen els valors de les notes entre elles, configurant les escales.

Un altre aspecte de la superposició d'ones de freqüències properes són els agradables batecs d'amplitud. Un exemple d'aquests batecs són els vibratos del violinista que produeixen vibracions modulades. Un altre exemple és el piano: per donar més volum a les notes més greus, es posen dues, i fins i tot tres, cordes per una mateixa nota; l'afinació d'aquestes cordes es fa de tal manera que les seves freqüències, en lloc de coincidir exactament, estiguin un pèl "desafinades", per produir els esmentats batecs (a les notes més baixes cal posar més d'una corda, ja que la potència emessa disminueix en disminuir la freqüència i cal compensar aquest fenomen afegint cordes).

Ressonàncies de les vibracions

Ens interessa analitzar què passa amb les oscil·lacions lliures i forçades d'un sistema elàstic qualsevol. Més concretament, analitzarem les ressonàncies d'aquests sistemes: la freqüència f_0 on l'amplitud de la vibració és màxima.

En el cas d'un sistema com la massa-molla, es defineix la constant de temps τ com el quocient de la massa m i el coeficient de fregament viscós b (constant de proporcionalitat entre la velocitat i la força de fregament):

$$\tau = m/b \qquad F_{\mathrm{freg}} = -bv$$

La constant de temps τ mesura el temps que trigaria una oscil·lació lliure a esmorteir-se, passant d'una certa amplitud A a una altra A/e (on e=2,748.. és la base de logaritmes naturals).

Quan excitem un sistema elàstic a una freqüència f qualsevol podem estudiar-ne la seva resposta, representant l'amplitud de la vibració enfront de la freqüència de l'excitació, o corba de ressonància. L'amplitud màxima de l'oscil·lació es produeix en la freqüència f_0 de ressonància, i es defineix el factor de qualitat de l'oscil·lador com:

$$Q = 2\pi f_0 \tau$$

El factor de qualitat és més gran com més petites siguin les pèrdues per fregament, i ens mesura el nombre de vibracions que es produiran abans de parar-se el sistema. Com més petit sigui el fregament (b petit, τ gran i Q gran) més gran serà el factor de qualitat.

La corba de ressonància serà més aguda com més petites siguin les pèrdues per fregament d'aquest sistema i més alt sigui el factor de qualitat Q, com podem observar a la figura 1.

Vegem com s'aplica la teoria de les oscil·lacions als instruments musicals. En primer lloc, hem de fer una abstracció i adaptar el nostre model de massa-molla a l'instrument. De la mateixa manera que abans parlàvem de pèrdues viscoses, ara considerarem les pèrdues d'energia de la vibració per haver donat aquesta energia a un altre medi.

Per exemple, en un diapasó aquesta pèrdua d'energia és molt petita (quasi no se sent, a no ser que toquéssim l'orella amb el diapasó); per tant, la constant de temps serà molt gran i el so durarà molt de temps fins a apagar-se. A la vegada, el seu factor de qualitat Q també serà elevat, i per tant, la seva corba de ressonància serà molt aguda, la qual cosa vol dir que la freqüència a què oscil·la serà molt pura, amb molt poca imprecisió. Això és el que s'espera d'un diapasó, la seva puresa espectral.

En l'extrem oposat hi hauria el cas d'un instrument musical de corda, per exemple el violí. En aquest cas, l'energia que se li dóna a la corda es perd a través de la caixa del violí, i produeix una ona acústica en l'aire. Com que aquesta transmissió d'energia és molt bona,

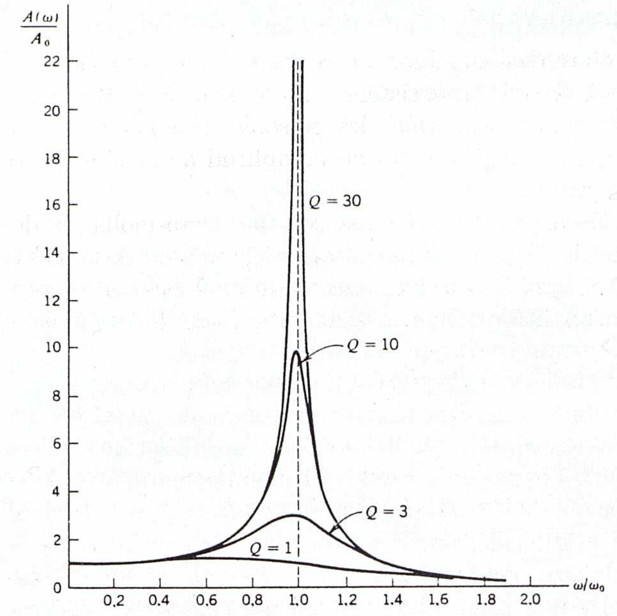

Figura 1: *Corba de ressonància: amplitud en funció de la freqüència de l'excitació per a sistemes amb diferents factors de qualitat.*

la pèrdua d'energia és molt gran (b gran, τ petit i Q petit) i un cop ha acabat de produir-se la nota a la corda, la vibració de la caixa del violí s'atura quasi instantàniament. A més, en ser el factor de qualitat Q petit, la corba de ressonància és molt ampla i, per tant, el violí pot donar tons musicals en moltes gammes de freqüències.

Adaptació entre medis

Un aspecte interessant dels instruments musicals és aconseguir una bona resposta acústica de l'instrument a partir de la vibració inicial, és a dir, transformar una ona estacionària, que es troba en un medi que en general és unidimensional, en una ona progressiva en l'aire. Analitzarem primer què significa per a una ona un canvi de medi, i després veurem com es resol tècnicament en cada una de les tres famílies d'instruments: corda, vent i percussió.

El paràmetre clau en produir-se un canvi de medi és la impedància Z del medi, que es defineix com el quocient entre la força excitadora sobre un element mecànic i la velocitat de la pertorbació.

$$Z = \frac{F_y}{\partial\psi/\partial t}$$

Quan una ona canvia de medi, la transmissió és total si les impedàncies dels dos medis coincideixen. En cas contrari, la potència transmesa P_{trans} depèn del quocient z entre les impedàncies dels dos medis:

$$P_{\text{trans}} = \frac{4z}{(1+z)^2} \qquad z = \frac{Z_2}{Z_1}$$

En el cas dels intruments de corda hem de passar d'un medi *corda*, on iniciem la vibració, al medi aire, de tres dimensions, on volem produir l'ona acústica. Es pot calcular que la impedància per a una corda és:

$$Z_{\text{corda}} = \sqrt{T\,\mu} = \mu\,v$$

mentre que la impedància de l'aire és pràcticament nul·la.

En el cas d'intentar passar directament d'una ona estacionària en una corda a una ona acústica, la diferència tan alta entre impedàncies fa que la potència emesa sigui quasi nul·la. Això és aproximadament el que passa en el cas del diapasó que comentàvem abans. La solució, per aconseguir una transmissió més gran, és adaptar la impedància entre els dos medis: intercalar un altre medi on el valor de la impedància sigui intermedi entre les impedàncies dels dos medis. Aquest medi és, per exemple, la caixa del violí, on la impedància és més petita que en la corda però més gran que en l'aire (el mòdul d'elasticitat és més alt que el de l'aire i més petit que el de la corda, a la vegada que la densitat és més alta que en l'aire però més petita que la de la corda).

Amb una imatge no tan matemàtica, podrem dir que la corda per si sola no pot excitar més que una petita quantitat d'aire i necessita la caixa perquè, en vibrar, exciti una gran quantitat d'aire. En efecte, en excitar més quantitat d'aire, la pressió sobre l'aire serà més petita i, per tant, la impedància també serà més petita que la de la corda.

En el cas del violí, per exemple, la vibració de les cordes es transmet a través del pont a la tapa superior, fent-la vibrar, i a la vegada a través de l'ànima (petit tros de fusta que s'aguanta entre la tapa superior i la inferior) també fa vibrar la tapa inferior, i dóna més volum al so. En el cas del piano també existeix un pont, sobre el qual s'aguanten les cordes, que transmet les vibracions a la tapa inferior o posterior, de fusta. En el cas del violoncel s'hi afegeix el fet de tocar a terra, i fent-lo vibrar també augmenta la massa d'aire que fa vibrar i per tant la sonoritat de l'instrument.

Tal com hem dit abans, interessa que aquests elements ressonin en fer-los sonar i, segons com ressoni, un violí tindrà un timbre més agut o més greu. Les ressonàncies de la capsa d'un instrument depenen de la fusta, del gruix, dels vernissos, etc., de molts aspectes que fan que la construcció d'un instrument musical sigui tot un art.

Per als instruments de vent, el problema és diferent, perquè la vibració no ha de canviar de medi, tant l'ona estacionària com l'ona progressiva acústica estan en l'aire. L'únic problema és passar d'una ona plana en un medi unidimensional, el tub de l'instrument, a una ona esfèrica en tres dimensions. La impedància d'una ona acústica plana en un medi unidimensional és:

$$Z_{\text{aire}} = \sqrt{\gamma\,B\,\rho} = \rho\,v$$

però, la impedància Z_{esf} d'una ona esfèrica tridimensional en l'aire és molt més petita i depèn de la freqüència:

$$Z_{\text{esf}} = \rho\, v \frac{y^2}{y^2+1} \quad \text{on} \quad y = \frac{2\pi R}{\lambda}$$

on R és el radi de l'emissor i λ és la longitut d'ona. En un instrument de vent, R coincideix amb el radi de l'instrument i és de l'ordre del centimetre, mentre que la longitut d'ona és de 10 cm o 1 m. Per tant, el valor de y és molt petit, $y \ll 1$, i la impedància de l'ona esfèrica és aleshores molt més petita que la de l'ona plana. Seguint el raonament d'abans, s'ha de fer vibrar més quantitat d'aire, disminuïnt la pressió i, amb ella, la impedància.

En molts instruments de vent, sobretot en els que tenen gran potència de so, l'adaptació es fa canviant el diàmetre de l'instrument, obrint la boca del tub exponencialment, com en el cas de la trompeta. Quan l'instrumentista vol disminuir el volum de so, el que fa en posar la sordina és precisament empitjorar aquesta adaptació d'impedàncies.

En els instruments de percussió aquest problema quasi no existeix, ja que la superfície vibrant és, a la vegada, la que excita l'ona acústica. L'adaptació d'impedàncies dels dos medis (més properes entre si que en el cas dels instruments de corda) s'aconsegueix per mitjà de la caixa que aguanta la membrana.

Excitació de les ones estacionàries

Un últim aspecte que estudiarem serà com es produeix l'excitació de les ones estacionàries en qualsevol instrument musical. Si partim de l'anàlisi de Fourier, qualsevol vibració (ona) és la superposició de vibracions (ones) sinusoïdals primàries, és a dir, de freqüència única. El conjunt d'harmònics que dóna un instrument i la seva intensitat és el que dóna el timbre característic de cada instrument. Encara que tots els instruments estiguin tocant la mateixa nota sabem distinguir un instrument d'un altre gràcies al timbre de cadascun. Hi han instruments amb pocs harmònics, com el diapasó, que només té el fonamental, o la flauta, que en té pocs, mentre que d'altres tenen harmónics més alts, com el violí. L'espectre de cada instrument musical, és a dir, l'amplitud que té cadascun dels harmònics, és el que defineix el timbre de cada instrument.

Per aconseguir ones acústiques amb un cert espectre cal que les ones estacionàries també tinguin aquelles freqüències, i a la vegada, cal que la pertorbació feta per l'excitació tingui com a mínim aquelles freqüències. Si volem que l'ona estacionària tingui tots els harmònics possibles, caldrà que l'excitació també tingui totes aquelles freqüències. Perquè totes les freqüències siguin excitades el que es fa, en els instruments de corda, és pertorbar l'equilibri de la corda en un lloc apropiat. Imaginem que la pertorbació és separar la corda pel seu punt mig i donar-li la forma d'una ona triangular simètrica (amb els dos costats igual de llargs; figura 2a); aquesta forma d'ona la podem descompondre en ones sinusoïdals de freqüències múltiples enters de la fonamental (figura 2b). Però a causa de la simetria de l'ona triangular hi mancaran tots els harmònics parells, ja que aquests tenen un node al centre de la corda, mentre que la pertorbació de la corda té un antinode. Per tant, aquesta pertorbació no produirà tots els harmònics esperats; al contrari donarà només els senars i a més la freqüència fonamental tindrà una amplitud massa gran.

Perquè tots els harmònics hi siguin presents cal que l'excitació tingui la forma d'una dent de serra, o d'un triangle asimètric, amb un costat més llarg que l'altre (figura 3a), on hi ha tots els harmònics (figura 3b). Això és el que fa el músic: tocar la corda amb el dit, l'arc o el martell del piano a prop d'un dels extrems de la corda, normalment entre 1/7 i 1/9 de la seva llargada. Com més a prop d'un extrem sigui l'excitació més rica en harmònics superiors, a costa dels inferiors, serà l'ona estacionària produïda.

A vegades els violinistes toquen una nota "fent harmònics"; consisteix a posar un dit suaument al mig de la corda que s'està tocant. Amb això, el que s'aconsegueix és forçar un node en el mig de la corda i, per tant, se suprimeixen tots els harmònics senars. "Fan harmònics" ja que l'harmònic més baix no és més que la nota que està tocant però d'una octava superior.

En el cas dels instruments de percussió el raonament és molt similar. El cop que es dóna al timbal no és al centre, sinó a prop d'un extrem, per produir tots els modes de vibració superiors possibles.

Podem classificar els instruments de vent en dues grans categories segons l'excitació: els de remolí de vent i els de membrana. Els primers, com els flabiols, flautes travesseres, orgues, etc., utilitzen com a excitació el remolí de vent provocat a l'orifici tipus xiulet del flabiol o al mateix orifici on es bufa a la flauta travessera. Segons com sigui la bufada, per exemple en intensitat, canviarà la riquesa d'harmònics de l'excitació, i per tant, de les ones estacionàries produïdes a l'instrument. En el cas de les flautes travesseres, bufant més fort s'aconsegueix passar a la nota de l'octava superior i, canviant l'angle amb el qual es fa la bufada, canvia la riquesa d'harmònics i, per tant, el timbre.

Els instruments de vent que utilitzen membrana, com l'oboè, el saxofon, etc., obtenen l'excitació de les vibracions produïdes en aquestes membranes. Si les membranes estan ben fetes, amb un material prou rígid i amb poca massa, aconseguiran les freqüències més altes, la qual cosa posa a prova la perícia de qui les construeix.

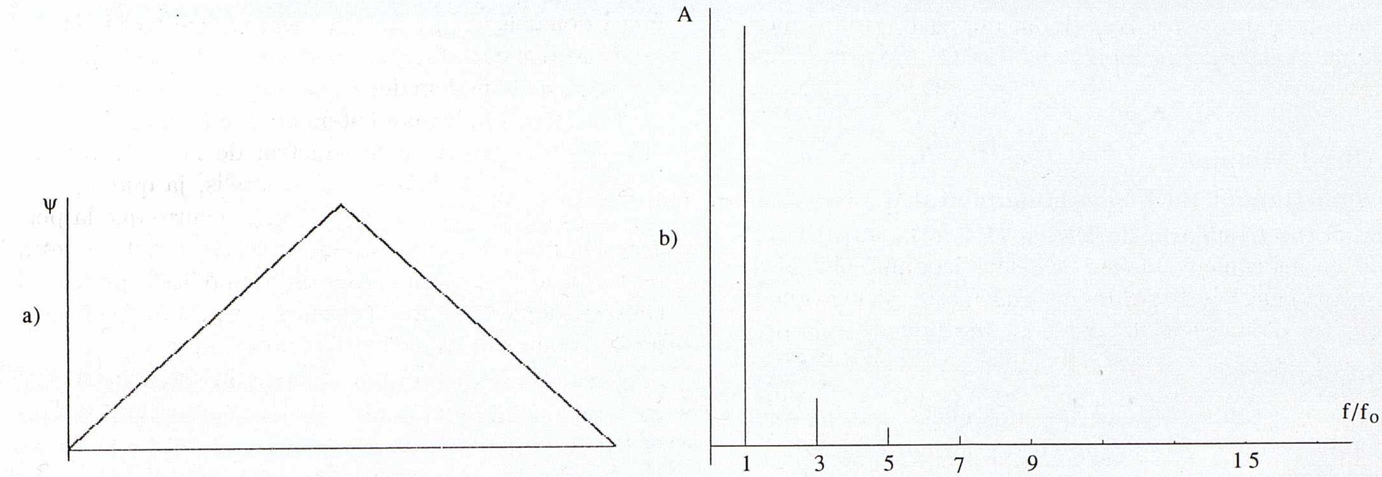

Figura 2: *(a) Ona triangular simètrica i (b) el seu espectre en freqüències, en el qual només apareixen els harmònics senars.*

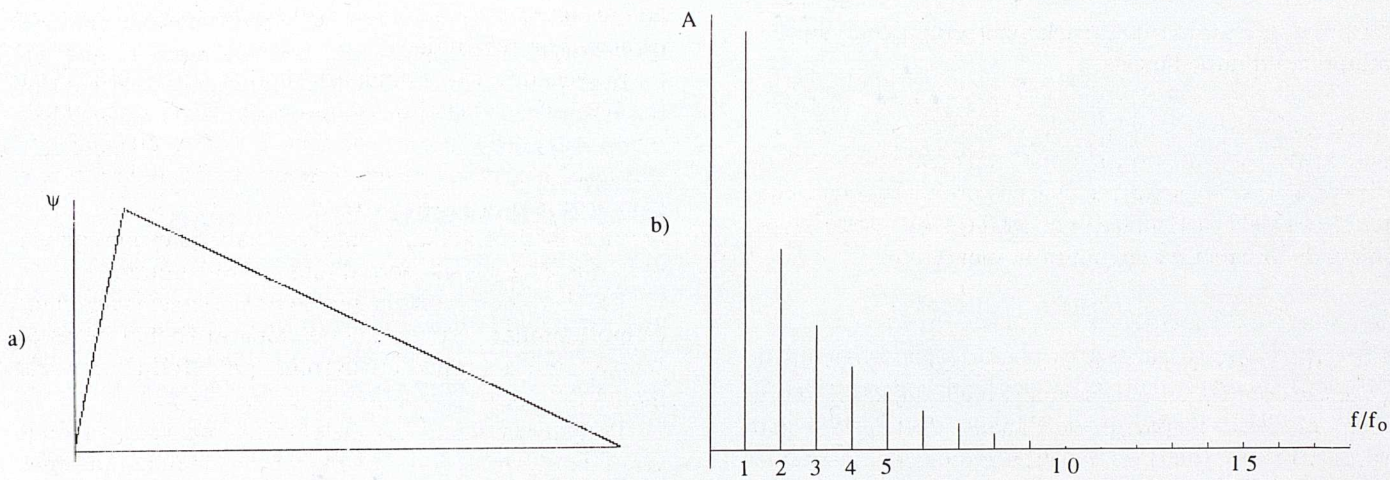

Figura 3: *(a) Ona triangular asimètrica i (b) el seu espectre en freqüències, en el qual apareixen tots els harmònics amb amplituds més grans.*

Referències

CRAWFORD, F. S., *Ondas. Berkeley Physics Course*,Vol. 3, Reverté, Barcelona (1977).
FRENCH, A.P., *Vibraciones y ondas*, Reverté, Barcelona (1974).
HUTCHINS, C. M., "Acústica de las tablas del violín" , *Investigación y Ciencia*, **63**, 54 (1981).
SAPOHKOV, M.A., *Electroacústica*, Reverté, Barcelona (1983).
BROWN, J. C., "Time dependent behavior of strings using Fourier analysis", *Am. J. Phys.*, **54**, 2 (1986).