# La interacció gravitatòria: de Newton a Einstein o de l'espai i temps absoluts newtonians a la geometrodinàmica einsteiniana

**Carme Martín*** **i Josep Graells**†
**Departament de Física Aplicada i Òptica. UB**

## Introducció

«I weigh all that is.
Nowhere in the Universe
Is there anything over which
I do not have domain.
As spacetime
As curved all - pervading spacetime
I reach everywhere.
My name is Gravity.»
J. A. Wheeler (1990)

En el present article s'analitza l'estructura general de la teoria gravitatòria, des d'Isaac Newton fins a Albert Einstein, i la seva singular relació amb la resta de la física, com ha fet palès la relativitat general. Aquesta anàlisi es concreta en una revisió crítica de les estructures fisicomatemàtiques que descriuen la interacció gravitatòria així com els seus lligams amb la resta de la física. Però per reflexionar sensiblement sobre la relació entre la interacció gravitatòria i la resta de la física, cal endinsar-se en les arrels de la física i preguntar-se pels seus objectius i conceptes bàsics, sobre els quals es construeix. Per tant, també esdevindrà pertinent analitzar la relació entre les idees, conceptes i lleis físiques amb les corresponents estructures matemàtiques que els representen.

És dins d'aquest context general que s'ha organitzat el present treball amb algunes senzilles i simples pinzellades epistemològiques. En la primera secció, «Reflexions elementals sobre models i teories» es fa un resum de les arrels cinemàtiques i dinàmiques del món newtonià. Tot seguit es complementa amb la segona secció, «Estructura geomètrica bàsica de la física: alguns models d'espaitemps», en la qual, fent ús del concepte unificat d'espaitemps, es reflexiona sobre l'espai i temps pressuposats en la física galileianonewtoniana, newtoniana i minkowskiana. La tercera secció, «Anàlisi de la interacció gravitatòria newtoniana», s'ha subdividit en tres apartats que s'han qualificat de global, infinitesimal i local o einstenià. Considerem que d'aquesta anàlisi comparativa de la interacció gravitatòria aflora amb tota la seva potencialitat física i matemàtica la metodologia einsteiniana, com es vol fer palès amb el mètode didàctic emprat. Finalment en la quarta secció, «Geometrodinàmica einsteiniana», s'introdueixen els conceptes matemàtics bàsics i s'infereix el model dinàmic d'espaitemps i les corresponents equacions de la relativitat general que el determinen, tot fent ús del contingut dels capítols precedents, i de la formulació de la gravitació newtoniana que E. Cartan va idear el 1923.

## Reflexions elementals sobre models i teories

Per començar, no és sobrer recordar que en física s'acostumen a seleccionar els fenòmens de la natura que són relativament senzills i és possible enginyar un mètode que identifica algunes quantitats característiques i bàsiques del fenomen, a vegades anomenades pels experimentadors *paràmetres de control*. Un altre aspecte, no menys important, és la repetibilitat del fenomen. Potser, una excepció a la repetibilitat fenomènica rau en la cosmologia, i. e. en la física del mateix Univers, bé que en els acceleradors de partícules se suposa que es reprodueixen algunes condicions que van tenir lloc en l'Univers primigeni.

Atès que els fenòmens seleccionats són senzills, és possible crear un model predictiu que els descrigui, fet bàsic per al procés cognitiu en física. Per exemple, considerem el moviment d'un projectil en les proximitats de la superfície de la Terra. S'hi poden distingir diversos fenòmens objecte d'estudi:

1) El moviment d'un cos en un camp gravitatori.
2) Fenòmens aerodinàmics i acústics.
3) Fenòmens tèrmics.
4) Fenòmens de xoc en impactar el projectil sobre el terra.
5) ...

Dins del context del present article interessa analitzar els aspectes mecànics del fenomen, o sia en un sentit estricte, sols el moviment del cos. Com és ben conegut, els factors que controlen el moviment són la posició

*Carme Martín i Torres (Barcelona, 1950) és doctora en Física per la Universitat de Barcelona (1981) i és professora del col·legi La Salle Gràcia.

†Josep Graells i Casanellas (Cervera, 1946) és pèrit industrial elèctric per l'Escola d'Enginyeria Tècnica Industrial de Terrassa (1967) i doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1978).

i velocitat inicial així com la gravetat. Si no es té en compte la resistència de l'aire, la qual cosa es pot fer per a un ampli ventall de velocitats i sota certes restriccions referents a la forma i mida del projectil, llavors ni la massa, ni la forma, ni la mida del cos tenen cap efecte rellevant sobre el moviment. Després d'aquesta observació, es tracta de formular una llei matemàtica que serveixi de base per modelar el fenomen. La llei té la forma $m_I\ddot{\vec{r}} = m_g\vec{g}$; tot el que es pot observar sobre el moviment del projectil es dedueix d'aquesta equació diferencial i del fet de la igualtat entre les masses inercial $m_I$ i gravitatòria $m_g$. La igualtat $m_I = m_g$ s'ha verificat cada vegada amb més precisió: $10^{-3}$ I. Newton (pèndol, 1680), $10^{-5}$ F. W. Bessel (pèndol, 1832), $10^{-8}$ R. Eötvös (balança de torsió, 1890), $2\cdot10^{-11}$ R. H. Dicke *et. al.* (balança de torsió, 1964), $10^{-12}$ V. Braginski *et. al.* (balança de torsió, 1971). Si es fa necessari incloure l'efecte de la fricció de l'aire, s'ha d'ampliar el model matemàtic afegint al costat dret de l'equació anterior el terme de fricció. En la formulació de l'equació s'ha suposat que està definida en un espai euclidià, en el qual les corbes solució es desenvolupen en funció del temps. No és sobrer recordar que el paràmetre temps es defineix en física de manera que la descripció del moviment sigui la més senzilla i simple possible. Tot el que s'ha exposat delimita i precisa el model matemàtic newtonià del moviment del projectil. Però abans d'aquesta formulació, G. Galileu (1610) el va anticipar amb la sentència següent: tots els cossos suficientment petits cauen amb la mateixa acceleració independentment de la seva constitució, frase que actualment també es coneix com a principi d'equivalència galileià.

I. Newton va fer un gran avenç en descobrir que la caiguda dels cossos a la Terra té la mateixa causa que la que ocasiona el moviment (caiguda) de la Lluna. Newton va postular la llei de la gravitació universal, que conjuntament amb les seves tres lleis de la dinàmica expliquen tots aquests moviments, així com els dels planetes i cometes al voltant del Sol, i el de les llunes al voltant dels planetes. Atès que el model newtonià té en compte i explica predictivament un ampli ventall de fenòmens se'l qualifica de teoria. La línia divisòria entre un model i una teoria és quelcom difusa, si bé es parla de model quan s'aplica a un fenomen o grup similar de fenòmens, mentre que una teoria proporciona models per a un ampli rang de fenòmens aparentment desconnexos, i el que és tant o més important, en preveu d'altres totalment insospitats abans de formular la teoria.

Un fet important és que la teoria newtoniana incorpora el principi d'equivalència galileià, $m_I = m_g$, més com a afegitó numèric que com a principi físic, ja que en darrera instància es neutralitza matemàticament en resoldre les equacions del moviment. En l'exemple del projectil l'equació se simplifica a $\ddot{\vec{r}} = \vec{g}$. Dit d'una altra manera, si no es complís la igualtat exacta entre les masses inercial i gravitatòria, la teoria newtoniana no tan sols continuaria verificant-se, sinó que no exigiria cap modificació. De fet la transició de la cinemàtica a la dinàmica consisteix a seleccionar una classe particular de moviments com a moviments estàndards, també anomenats *inercials* o *lliures*. La forma tradicional d'introduir-los consisteix a postular la llei de la inèrcia o primera llei de Newton: Existeixen els moviments lliures de forces són aquells que respecte als referencials galileians o inercials tenen acceleració nul·la $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$. Si sobre la partícula actua una força $\vec{F}$ (per exemple elàstica) i està situada en un camp gravitatori $\vec{g}$, el moviment que efectua la partícula ve definit per la segona llei de Newton:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{m_g}{m_I}\vec{g}(\vec{r}(t)) + \frac{\vec{F}}{m_I}.$$

Aquesta equació, quan la partícula s'observa des d'un referencial no galileià, adopta la forma següent

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \Big[\frac{m_g}{m_I}\vec{g}(\vec{r}(t)) - \vec{A}(t) - 2\vec{w}(t)\wedge\dot{\vec{r}}(t) - \dot{\vec{w}}(t)\wedge\vec{r}(t) - \vec{w}(t)\wedge(\vec{w}(t)\wedge\vec{r}(t))\Big] + \frac{\vec{F}}{m_I}. \quad (1)$$

Aquí $\vec{A}(t)$ i $\vec{w}(t)$ representen respectivament l'acceleració translacional i la velocitat angular del referencial arbitrari, per exemple el laboratori, respecte a algun referencial inercial. Quan el principi d'equivalència galileianonewtonià, $m_I = m_g$, se substitueix en l'equació (1), sorgeix un fort paral·lelisme entre les forces gravitatòries i les anomenades inercials. D'aquí que ambdós tipus de forces s'han ubicat en l'equació (1) dins d'un mateix parèntesi. És més, aquesta equació mostra que mentre $\vec{w}$ i $\vec{g}-\vec{A}$ poden ser mesurades, esdevé impossible mesurar $\vec{g}$ i $\vec{A}$ separadament. Newton i els seus seguidors no van atribuir rellevància física a aquesta conclusió operacional que es deriva de les seves equacions. Per exemple, és ben segur que Newton considerava les forces inercials intrínsecament diferents a les gravitatòries, ja que, com s'explicarà en l'apartat següent, atribuïa la causa de les forces inercials a l'acció de l'espai absolut. En canvi, A. Einstein el 1907 va atribuir-li tanta rellevància física que va considerar que aquesta conclusió s'havia d'incorporar com a pilar bàsic en la teoria relativista de la gravitació que estava recercant. Com s'explicarà en la secció tercera, Einstein es va basar en el fet que la magnitud mesurable és $\vec{g} - \vec{A}$, per idear un mètode local d'anàlisi de la interacció gravitatòria. Aquest mètode condueix a una reinterpretació radical de la llei de la inèrcia, és a dir, del que s'ha d'entendre per moviments lliures i alhora unifica la descripció de les forces gravitatòries i inercials. Però abans és pertinent d'aprofundir en l'estructura espacial i temporal que sosté la interpretació newtoniana per així facilitar l'explicitació dels seus límits d'aplicabilitat.

## Estructura geomètrica bàsica de la física: alguns models d'espaitemps

Qualsevol teoria física, ja sia clàssica o quàntica, pressuposa per a la seva formulació i interpretació de les seves lleis, alguna geometria per al temps i l'espai, o per a la noció encara més bàsica d'espaitemps. H. Minkowski el 1908 va definir l'espaitemps com el conjunt de tots els esdeveniments. Emprant les seves paraules: «Els objectes de la nostra percepció invariablement inclouen llocs i temps en combinació. Ningú ha identificat mai un lloc, excepte en un temps, o un temps excepte en un lloc.» Pocs anys després A. Einstein i H. Weyl van evidenciar que la geometria de l'espaitemps, o sia, les estructures que la defineixen, no poden ser considerades aïlladament de la resta de la física. Els seus conceptes i lleis estan relligats amb els de la mecànica, l'electromagnetisme, etc. Aquest punt de vista es farà palès en el darrer apartat del present article, i és de més llarg abast epistemològic que el pur convencionalisme de H. Poincaré.

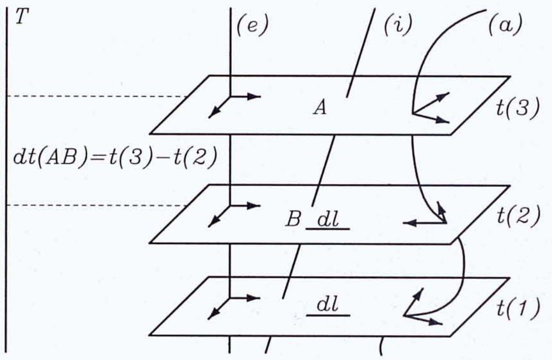


Figura 1: *Espaitemps newtonià. L'observador (e) està en repòs absolut i transporta uns eixos no giratoris. L'observador (i) es mou uniformement, amb velocitat constant, respecte a l'espai absolut. L'observador (a) està accelerat i transporta uns eixos giratoris*

Tornant a la teoria de la gravitació universal, Newton va postular l'existència real d'un temps absolut i d'un espai absolut sobre els quals fonamentar la interpretació i formulació de les seves lleis. Els fenòmens físics es desenvolupen en l'espai absolut i mentre ho fan el temps va transcorrent. Segons Newton, els efectes de l'espai absolut es podrien detectar mitjançant experiències mecàniques, per exemple, observant la curvatura de la superfície de l'aigua d'una galleda sotmesa a un moviment giratori *absolut*. O sia, segons Newton, donats dos esdeveniments arbitraris, ha de ser factible decidir objectivament si els dos esdeveniments són simultanis o bé si tenen lloc o no en un mateix punt de l'espai. Seguint J. Ehlers, es representarà el temps i l'espai absoluts mitjançant la figura 1, que vol esquematitzar-los dins del context unificador d'espaitemps, bé que Newton els considerava entitats independents.

El conjunt $M(N)$ dels esdeveniments que constitueixen l'espaitemps newtonià és el producte cartesià del conjunt $T$ de tots els instants de temps i el conjunt $E$ de tots els punts de l'espai, i. e., $M(N) = T \times E$. Addicionalment se suposa que $E$ és un espai euclidià tridimensional, sent la mètrica $dl^2$ mesurable mitjançant regles, i $T$ se suposa que és un espai euclidià unidimensional, de coordenada natural $t$, la qual es mesura mitjançant rellotges estàndard. $t$ resta definida llevat de transformacions lineals afins $t \to at + b, (a > 0)$. A. Trautman resumeix l'estructura geomètrica i dinàmica de la física en l'espaitemps newtonià de la manera següent:

$$\{\underbrace{M(N), V, (dt, dl^2), (e)}_{\text{Absoluts}};$$

$$\underbrace{\text{coordenades de les partícules, pressions, etc.}\}}_{\text{Dinàmics}}$$

$M(N)$ s'identifica amb un espai afí quadridimensional, $V$ el seu espai vectorial associat (parelles ordenades d'esdeveniments), sobre el qual hi ha definides les mètriques $(dt, dl)$. $dl$ mesura la distància entre dos esdeveniments arbitraris $A$ i $B$ però simultanis $dt(AB) = 0$. $dt$ és la mètrica temporal, que mesura la separació temporal absoluta entre dos esdeveniments. $(e)$ representa un observador en repòs absolut. L'estratificació de $M(N)$, segons s'esquematitza en la figura 1, es pot interpretar com l'estructura causal de $M(N)$. L'hiperplà $t(A)$, que passa per un esdeveniment $A$, separa el futur causal de $A$, o també el seu domini d'influència ($t > t(A)$), del seu passat ($t < t(A)$). El fet que passat i futur tenen un contorn comú, que és el present, reflecteix la hipòtesi que la interacció gravitatòria s'ha de propagar amb velocitat infinita, suposició coherent amb la hipòtesi dels sòlids rígids ideals.

En l'espaitemps newtonià els observadors $(e)$ són absolutament privilegiats per a la formulació de les lleis de la física, tant respecte als observadors $(i)$, que es mouen amb velocitat constant respecte als $(e)$, com respecte als observadors $(a)$. Newton considerava l'espai absolut la font de les forces inercials, les quals podia detectar un observador accelerat. Per tant, segons va explicitar A. Einstein, es va introduir en la física una entitat, l'espai absolut, que podia actuar sobre els sistemes físics, però que mai no podia ser influenciada per ells. Potser per raons semblants Newton també emprava arguments teològics per defensar-lo. Però, tant el principi de relativitat galileià, com les tres lleis de la dinàmica newtoniana, no singularitzen com a privilegiats els observadors $(e)$. En canvi, sí que permeten seleccionar com a privilegiats tots els moviments rectilinis i uniformes enfront dels accelerats. En resum, en l'estructura d'espaitemps, anomenada galileiana newtoniana $M(GN)$, s'incorporen els observadors $(e)$ a la família dels moviments inercials o lliures de forces, com un més, bé que de velocitat nul·la:

$$\underbrace{\{M(GN), V, (dt, dl^2)}_{\text{Absoluts}};$$

$$\underbrace{\text{coordenades de les partícules, pressions, etc.}\}}_{\text{Dinàmics}}$$

Aquesta inclusió, $(e) \in \{(i)\}$, implica que el grup de transformacions que preserva l'estructura fisicogeomètrica de $M(GN)$ és el grup de Galileu, mentre que el corresponent grup de $M(N) = E \times T$ és el producte directe del grup de les rotacions i translacions de $E$, i el grup afí de $T$. És a dir, el grup d'automorfismes de $M(N)$ és un subgrup del de Galileu. Sota un punt de vista físic s'ha emprat la llei de la inèrcia, o primera llei de Newton, per definir l'estructura afí de l'espaitemps via la definició dels moviments estàndards o inercials. Les dues lleis de Newton restants pressuposen aquesta estructura i no l'enriqueixen més. Per tant, no és lícit, dins d'aquest context, considerar la primera llei de Newton inclosa en la segona $\vec{F} = m\vec{a}$. Per aquest motiu A. Einstein qualificava la llei de la inèrcia com la *clau* de la física clàssica. L'existència dels dos models d'espaitemps $M(N)$ i $M(GN)$ considerats i d'altres que no s'han explicat planteja la qüestió: *Quin és el que representa més fidedignament l'estructura geomètrica de la natura?*

El desenvolupament de l'electromagnetisme maxwellià, en la segona meitat del segle XIX, va donar esperances als físics per poder detectar finalment el repòs absolut, ja que l'espai absolut es va identificar amb l'hipotètic èter o suposat suport mecànic del camp electromagnètic. Es pensava que sols respecte a l'èter la velocitat de la llum seria igual a $c(\approx 3{,}00\,10^8 \mathrm{ms}^{-1})$. En definitiva es va apostar pel model $M(N)$ enfront de $M(GN)$.

Aquest programa, que va ser defensat fins a les últimes conseqüències racionals pel gran físic H. A. Lorentz, no va reeixir. Ni la teoria de Maxwell-Lorentz, ni les de l'èter deformable, ni les d'emissió de Ritz, eren capaces d'explicar el conjunt dels fenòmens mecànics, electromagnètics i òptics. L'èter o espai absolut esdevenia indetectable i cada vegada més innecessari. Però van ser les incoherències teòriques a què conduïa el programa basat en el model $M(N)$, per exemple duplicitat asimètrica d'explicacions d'un mateix fenomen físic, i no pas els resultats experimentals negatius per detectar l'espai absolut o èter, les que van guiar A. Einstein el 1905 per a la creació de la relativitat especial. A. Einstein va adoptar el principi de relativitat per a *tots* els fenòmens físics i la independència de la velocitat de la llum respecte a la velocitat de la seva font. Les conseqüències cinemàtiques d'aquests dos principis impliquen un canvi radical en les nocions d'espai i de temps. Cada moviment lliure, i. e. observador inercial, té el seu propi espai i el seu propi temps, per tant s'elimina l'estructura estratificada dels models $M(N)$ i $M(GN)$. Tres anys després, el 1908, H. Minkowski va reformular la relativitat especial dins del context d'espaitemps, anomenat *espaitemps minkowskià*, $M$:

$$\underbrace{\{M, V, (ds^2 = \eta_{ab}dx^a dx^b = -c^2dt^2 + d\vec{r}^{\,2})}_{\text{Absoluts}};$$

$$\underbrace{\text{Línies de món, camp electromagnètic, etc.}\}}_{\text{Dinàmics}}$$

Cal observar que $M$ és estructuralment més senzill que $M(N)$ i $M(GN)$, atès que els dos absoluts $dt$ i $dl^2$ s'unifiquen en un únic absolut $ds^2 = \eta_{ab}dx^a dx^b = -c^2dt^2 + d\vec{r}^{\,2}$ essent $(\eta_{ab}) = diag.(-1, 1, 1, 1)$ la mètrica minkowskiana respecte a qualsevol referencial inercial. Les transformacions que deixen invariant l'estructura geomètrica de $M$ són les del grup de Poincaré-Lorentz, que quan $(v/c) \ll 1$ es pot aproximar amb el grup de Galileu. Per tant, la física basada en $M(GN)$ esdevé una bona aproximació a la relativitat especial quan $(v/c) \ll 1$.

Recordem que en $M$ les línies rectes del gènere temps $(ds^2 < 0)$ representen les línies de món de les partícules lliures, i. e., els moviments estàndards o inercials. Els cons de llum $(ds^2 = 0)$ descriuen la propagació dels senyals electromagnètics en el buit i alhora defineixen l'estructura causal de $M$, i. e., substitueixen l'estratificació dels models $M(N)$ i $M(GN)$. Qualsevol partícula descriu en $M$ una línia de món del gènere temps $(ds^2 < 0)$, sent la longitud d'arc entre dos esdeveniments $A$ i $B$:

$$s_{AB} = \int_A^B \sqrt{-\eta_{ab}dx^a dx^b} = \int_{t_b}^{t_a} \sqrt{1 - (\vec{v}/c)^2}dt$$

el temps propi mesurat per un rellotge estàndard transportat per la partícula. Els trets característics de l'espai-temps minkowskià es poden representar de la següent manera:

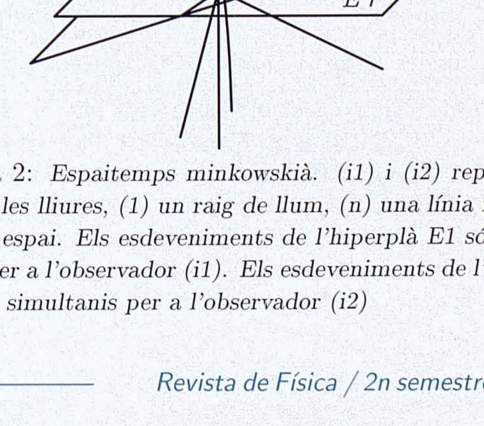


Figura 2: *Espaitemps minkowskià. (i1) i (i2) representen partícules lliures, (1) un raig de llum, (n) una línia recta del gènere espai. Els esdeveniments de l'hiperplà E1 són simultanis per a l'observador (i1). Els esdeveniments de l'hiperplà E2 són simultanis per a l'observador (i2)*

El desenvolupament de la física del segle XX ha demostrat que, *llevat precisament de la interacció gravitatòria*, totes les lleis de la física, ja siguin clàssiques o quàntiques, que es basen en el model $M$ condueixen a prediccions que han estat ratificades pels resultats experimentals. Per ubicar el present article dins d'aquest context més ampli, es farà ús del cub de R. Penrose (fig. 3). Les diferents teories físiques se situen en els vèrtexs del cub i els tres eixos es corresponen amb les tres constants fonamentals de la física: la constant gravitatòria $G$ (eix horitzontal), la inversa de la velocitat de la llum $1/c$ (eix diagonal) i la constant de Planck $h$ (eix vertical cap a baix).

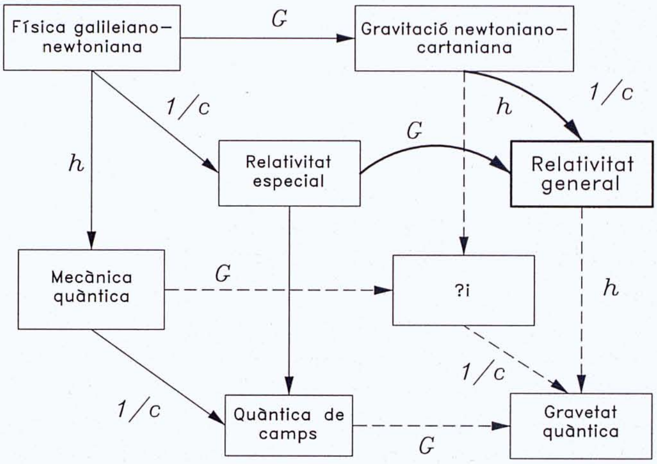


Figura 3: *Cub de R. Penrose, la cara superior del qual és l'objecte de les reflexions del present article*

Si es consideren nul·les les constants $(G, 1/c, h)$, que són nombres vertaderament petits en el sistema d'unitats S. I., s'obté la dinàmica galileianonewtoniana, basada en el model d'espaitemps $M(GN)$. La inclusió de la constant $G$ porta horitzontalment a la teoria de la gravitació newtoniana, basada en el model d'espaitemps $M(N)$, i també, com es demostrarà en l'apartat darrer, en un model d'espaitemps corbat creat per E. Cartan el 1923. Si permetem que $1/c$ sigui diferent de zero s'arriba a la teoria de la relativitat especial sostinguda en el model d'espaitemps minkowskià. Si les dues constants $(G, 1/c)$ es consideren no nul·les, s'obté la teoria de la relativitat general, objectiu bàsic de la resta de l'article. No obstant això, aquesta generalització té les seves subtileses, com R. Penrose ho vol simbolitzar amb segments no rectilinis en el seu cub. En els apartats següents s'intentarà d'exposar, d'una manera el més senzilla i didàctica possible, l'estratègia que A. Einstein va emprar per arribar a la creació de la relativitat general, procés al qual va dedicar deu anys, del 1905 al 1915. Segons C. Lanczos, els físics haurien de conèixer aquesta dècada com la dècada d'A. Einstein, ja que va contribuir amb formulacions i idees revolucionàries a l'avenç de tots els camps de la física.

## Anàlisi de la interacció gravitatòria newtoniana

> «Here and elswhere in science, as emphasized not least by H. Poincarè, that view is out of date which used to say 'Define yours terms before you proceed'. All the laws and theories of physics, including Newton's laws of gravity, have this deep and subtle characther, that they both define the concepts they use and make statements about these concepts.» C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. Gravitation. (1973)

La formulació i anàlisi de les teories físiques empren des de Newton dos mètodes matemàtics complementaris: el global i l'infinitesimal. A grans trets la metodologia global estudia les propietats de les magnituds físiques en un domini, o en tot l'espaitemps, mentre que la metodologia infinitesimal estudia les propietats de les magnituds i les de les seves derivades en un esdeveniment arbitrari de l'espaitemps. El mètode infinitesimal condueix a les equacions diferencials de la física, bé que per solucionar-les s'han de concretar prèviament les condicions inicials i de contorn que necessàriament han d' incorporar aspectes globals de l'espaitemps. Complementàriament, el mètode global condueix a equacions integrals, que ja de bell antuvi incorporen l'estructura pressuposada de l'espaitemps així com les condicions inicials i de contorn.

A. Einstein va idear el que els autors considerem un tercer mètode. Aquest mètode, en contraposició als dos anteriors, és essencialment físic i es pot qualificar de *local*. El seu objectiu és analitzar les propietats de les magnituds físiques en l'entorn *físic* d'un esdeveniment arbitrari de l'espaitemps. La mida de l'entorn, en lloc de definir-la l'estructura matemàtica del problema, la defineix la precisió dissenyada pels experiments que mesuren les magnituds objecte d'estudi. I a més a més, els experiments s'han d'efectuar en un laboratori en caiguda lliure, per exemple una nau espacial.

Segons J. A. Wheeler, la gran lliçó que es deriva d'aquesta metodologia és que: *La física esdevé més senzilla si s'analitza i s'observa localment.* És a dir:

1) En caiguda lliure.

2) En un entorn petit de l'espaitemps.

Quan l'entorn convergeix cap a un esdeveniment, com a conseqüència d'anar incrementant cada vegada més la precisió dels experiments, la metodologia local esdevé infinitesimal. Els tres dibuixos següents (figura 4), esquematitzen els trets més rellevants de les tres metodologies.

A continuació s'ampliarà el contingut de cada una de les tres figures.

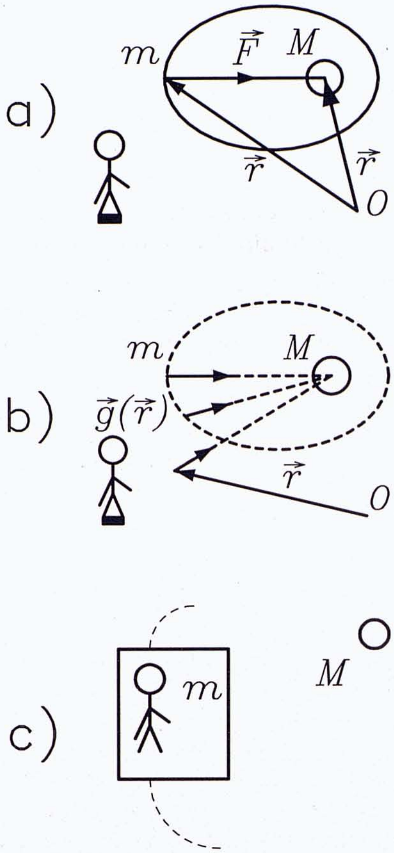


Figura 4: *Esquema simbòlic de les tres metodologies d'anàlisi de la interacció gravitatòria: a) global (acció a distància, espaitemps $M(N)$, llei de la gravitació universal), b) infinitesimal (acció a través d'un camp $g(\vec{r})$, espaitemps $M(N)$, equacions diferencials per al camp) i c) local (ingravidessa, acció a través de camps de marea, espaitemps localment minkowskià, equacions diferencials per als gradients dels camps)*

## Mètode global: Newton

Sigui $M$ la massa d'un cos, per exemple la Terra, distribuïda en un volum $\tau$ segons la funció densitat de massa $\rho(\vec{r}\,')$. Si $m$ és la massa d'una partícula monopolar situada en $\vec{r}$, llavors, segons la llei de la gravitació universal de Newton, s'exerceixen mútuament una força definida per la cadena d'igualtats següents:

$$\begin{aligned}\vec{F}_m \equiv \vec{F}_{M\to m} &= -m\int_\tau \frac{G(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\rho(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,' \\ &= -\vec{F}_{m\to M} = -\vec{F}_M\,.\end{aligned}$$

L'energia potencial de $m$, associada a la força $\vec{F}_m$, es defineix com

$$V_m = -m\int_\tau \frac{G}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\rho(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,',$$

ja que $\vec{F}_m = -\vec{\nabla}V_m$. Per tant l'equació de moviment de la partícula $m$ és

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_m$$

o

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\vec{\nabla}V_m}{m} = 0\,,$$

on, atès que $m_I = m_g$, no s'ha fet cap discriminació entre les dues masses. Newton, com ja s'ha explicat en l'apartat anterior, per desenvolupar i interpretar la seva teoria va postular l'existència de l'espai i el temps absoluts, i. e. de l'espaitemps $M(N)$.

## Mètode infinitesimal: Laplace, Poisson

Quan hom s'apercep que tant $\vec{F}_m$ com $V_m$ són proporcionals a $m$, cal fer abstracció de $m$ i definir les magnituds intensitat de camp gravitatori $\vec{g}(\vec{r})$ i potencial gravitatori $\Phi(\vec{r})$, de manera que sols siguin funció de la seva font $(\rho(\vec{r}), \tau)$ i de les propietats geomètriques de l'espaitemps en què estan definits:

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \frac{V_m}{m} = -G\int_\tau \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3\vec{r}\,' \qquad (2)$$

$$\vec{g}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}_m}{m} = -G\int_\tau \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\rho(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,'\,. \qquad (3)$$

Aquesta formulació evidencia un fort paral·lelisme matemàtic amb les equacions del camp electrostàtic $\vec{E}(\vec{r})$. Per exemple el camp $\vec{g}(\vec{r})$ es representa mitjançant línies de flux $(d\vec{r}//\vec{g}(\vec{r}))$ i $\Phi(\vec{r})$ mitjançant les superfícies equipotencials ($\Phi(\vec{r}) =$ constant). Si s'accepten les equacions globals (2) i (3), llavors quan s'hi aplica els operadors vectorials divergència (densitat de flux) i rotacional (densitat de circulació), s'obtenen les equacions diferencials per a $\vec{g}(\vec{r})$ i $\Phi(\vec{r})$, similars a les de la formulació diferencial de l'electrostàtica:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r}), \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{g}(\vec{r}) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}), \quad \nabla^2\Phi = 4\pi G\rho\,.$$

Aquestes equacions, tenint en compte el teorema de Helmholtz, o bé el teorema d'unicitat de l'equació de Laplace-Poisson, defineixen unívocament $\vec{g}$ i $\Phi$ respectivament. Per tant això condueix a la metodologia infinitesimal.

L'equació de moviment de la partícula de massa $m$ esdevé explícitament independent de $m$, $\ddot{\vec{r}}+\vec{\nabla}\Phi = \vec{0}$. És a dir, es retroba el principi d'equivalència galileià: totes les partícules cauen en un camp gravitatori $\vec{g}(\vec{r})$ amb la mateixa acceleració $\vec{A} = \vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$.

Molts autors extrapolen l'analogia matemàtica entre les equacions de l'electrostàtica i les de la gravitació newtoniana al domini físic, en el sentit d'atribuir a $\vec{g}(\vec{r})$ el mateix nivell de realitat física per al camp gravitatori que el camp electrostàtic posseeix per a la interacció electrostàtica. Tant és així que en molts tractats d'introducció a la física universitària s'expliquen ambdós camps simultàniament. Però per bé que l'analogia matemàtica de les equacions anteriors és manifesta, estimem que la física, àdhuc dins del model newtonià, no ho és tant com els arguments següents intenten explicitar:

1). Ja s'ha explicat en l'apartat primer, en discutir l'equació (1), que $\vec{g}$ i $\vec{A}$ no són mesurables independentment. La magnitud que mesuren els acceleròmetres és $\vec{g}-\vec{A}$.

2). L'autoenergia d'un sistema gravitatori $U$, i. e. el treball quasiestacionari de formació del sistema $(\rho,\tau)$ a partir dels seus constituents infinitesimals, infinitament allunyats uns dels altres, és sempre negativa, a causa de la natura atractiva de la interacció gravitatòria.

$$U=-\frac{1}{2}\int_\tau\int_\tau \frac{G\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3\vec{r}d^3\vec{r}\,'=$$
$$\frac{1}{2}\int_\tau \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})d^3\vec{r}=-\int_\tau \frac{(\vec{g}(\vec{r}))^2}{8\pi G}d^3\vec{r}<0\,.$$

És a dir, s'ha d'associar al camp $\vec{g}(\vec{r})$ una densitat d'energia negativa

$$\frac{dU}{d\tau}=-\frac{(\vec{g})^2}{8\pi G}\,,$$

en contraposició a la densitat d'energia del camp electrostàtic, que sempre és positiva. L. Brillouin va idear una teoria gravitatorioestacionària basada en la teoria electrostàtica, però per defugir incoherències físiques va haver d'assignar al buit una constant *diagravitatòria* $\epsilon_g=-1/G$.

3). La realitat física, irreductible, del camp electromagnètic rau en la parella camps elèctric i magnètic $(\vec{E},\vec{B})$ i no en cadascun d'ells considerats aïlladament. Com és ben conegut, no és possible construir una teoria dinàmica del camp gravitatori basant-se en el formalisme matemàtic maxwel·lià, formalisme que sempre ha de tenir en compte tant forces atractives com repulsives, i. e., càrregues positives i negatives. Potser reflexions d'aquest tipus van forçar A. Einstein a idear el mètode local que tot seguit s'explicarà.

## Mètode local: A. Einstein

Poc després de crear la relativitat especial al 1905, A. Einstein i altres físics es van proposar construir la teoria relativista de la interacció gravitatòria, que per a velocitats petites, $(v/c)^2\ll 1$, i baixes energies,

$$\frac{GM}{c^2r}\approx\frac{\Phi}{c^2}\ll 1,$$

contingués les acurades prediccions i concordança experimental de la gravitació Newtoniana. S'ha de tenir present que el 1905 la concordança entre la teoria de la gravitació newtoniana i l'experiència era quasiperfecta. Sols es coneixia una petita discrepància de 43" d'arc per segle en el corriment del periheli de Mercuri, ja que la teoria newtoniana, via càlcul pertorbacional, explicava satisfactòriament els 5.557" d'arc per segle restants.

El mateix any de la publicació de la relativitat especial, el 1905, i en el mateix volum 17 dels *Annalen der Physik*, A. Einstein, en un article de menys de tres pàgines, demostrà la inèrcia del contingut energètic d'un cos arbitrari ($\Delta E=\Delta mc^2$). Aquest resultat té profundes implicacions per a la interacció gravitatòria, ja que si les masses són les seves fonts, llavors també ho ha de ser qualsevol forma d'energia, i alhora tot camp gravitatori ha d'actuar, o sia, s'ha d'acoblar a qualsevol sistema físic. Per tant, això condueix a considerar el bucle lògic següent:

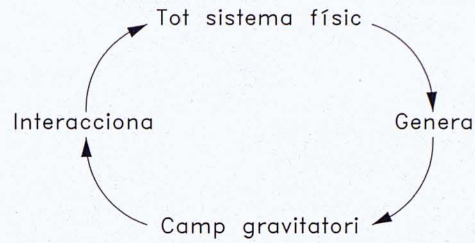


Figura 5: *Bucle de la interacció gravitatòria*

D'aquí la primera frase del present article i el poema de J. A. Wheeler que l'encapçala. Ambdós manifesten la singular relació de la interacció gravitatòria amb la resta de la física. Aquest bucle, típic d'un procés de realimentació, ha de conduir a equacions de camp no lineals. Però, com es pot descobrir la seva estructura interna? En altres paraules, com es pot entrar dins del bucle i descobrir els seus mecanismes interns de funcionament? A. Einstein el 1907 va idear la metodologia local per fer-ho. Com és lògic, primer va aplicar la metodologia local a l'anàlisi de la gravitació newtoniana, que en aquells anys ja es considerava una bona aproximació lineal, i no relativista, a la teoria relativista que s'estava recercant.

A continuació es concretarà el mètode local, també conegut com a principi d'equivalència fort o d'A. Einstein.[1] Com ja s'ha anticipat abans, la concreció del mètode local és essencialment física, i els aspectes matemàtics passen a un segon terme. La formulació matemàtica rigorosa es desenvoluparà en l'apartat següent.

La materialització del mètode local inclou:

1) Un laboratori en caiguda lliure sense rotar, per exemple una nau espacial en òrbita al voltant de la Terra, amb els motors apagats i guiada mitjançant giroscopis.

2) La nau va equipada amb els aparells d'un laboratori de física. El físic astronauta limita els experiments a dins de la nau i els prepara de curta durada.

Els resultats dels experiments es poden resumir en

[1] Alguns relativistes rellevants de forta inclinació matemàtica rebutgen el principi d'equivalència. Per exemple, J. L. Synge opinava: «[...] el principi d'equivalència va fer el paper d'una llevadora en el naixement de la relativitat general [...] ara suggereixo que la llevadora sigui enterrada amb tots els honors i els fets de l'espaitemps pseudoriemannià s'encarin de bell antuvi».

els punts següents:
a) Els acceleròmetres del laboratori marquen zero, o sia respecte a la nau el camp gravitatori $\vec{g}$ és nul. El físic es troba en un entorn d'ingravidesa.
b) Tota partícula deixada en repòs en el laboratori resta en repòs, i si es mou amb velocitat constant continua amb la mateixa velocitat fins que xoca amb les parets del laboratori. És a dir, si el físic deixa lliure una poma enfront del seu nas resta en repòs enfront del seu nas.
c) Dels experiments de xoc amb partícules macroscòpiques observa que pot jugar al billar tridimensional, i. e., es verifiquen totes les lleis dels xoc (conservació del vector energia-moment lineal). Els experiments de dispersió de partícules a altes energies corroboren que també es verifiquen les lleis del xoc en els dominis de la física atòmica i nuclear, àdhuc amb més precisió.
d) El físic continua amb experiments electromagnètics. Observa que els senyals electromagnètics es propaguen dins de la nau en línia recta i que no hi ha cap corriment de freqüències, i. e., no detecta cap efecte Doppler. En general corrobora totes les prediccions de les equacions de Maxwell.

Aquests quatre punts obliguen a inferir que l'interior de la nau representa, amb els seus equips, un referencial inercial, bé que local i dins els límits de precisió dissenyats pels experiments realitzats. Evidentment aquesta conclusió implica que els moviments estàndard o lliures, que permeten passar de la cinemàtica a la dinàmica, segons s'ha explicat en els apartats anteriors, es converteixen en els moviments de les partícules monopolars en caiguda lliure. És a dir, implica una reinterpretació radical de la llei de la inèrcia, que alhora qüestiona la significació de $\vec{g}$ com a força per unitat de massa.

El físic comunica els resultats dels experiments i la seva agosarada conclusió a l'enginyer en cap del centre de seguiment de la Terra, el qual li contesta:
«Recorda que estàs caient amb una acceleració $\vec{A} = \vec{g}$ i que, segons el principi d'equivalència galileià , $m_I = m_g$, conjuntament amb l'equació (1), és obligat que $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$, o sia que et trobis en un entorn ingràvid; pel que fa a la resta de resultats experimentals...»

El físic, després d'esperar una estona prudencial la contraargumentació a la resta de resultats, li contesta sobtadament:
«Oblida't de l'acceleració...! Això és paradoxalment la lliçó que s'ha d'extreure del fet que tots els cossos cauen amb la mateixa acceleració. No hi ha res de més natural en l'univers físic que la caiguda lliure. Quan la nau sigui aturada per la Terra, llavors sí que hi ha d'intervenir la física, i sobretot per a la meva seguretat, la física aplicada. També li he d'anticipar que quan incrementi la precisió dels experiments no dubto que detectaré els efectes físics associats als gradients de $\vec{g}$, però no de $\vec{g}$.»

La metodologia local obliga a focalitzar la descripció de la gravitació newtoniana no en $\vec{g}$, sinó a considerar com a magnitud bàsica els gradients de $\vec{g}$. Per exemple, una gota petiteta de líquid deixada lliure dins de la nau adoptarà una forma no esfèrica, ja que les parts de la gota més properes a la Terra són més atretes que les parts més allunyades. La manca d'esfericitat és deguda a les forces de marea o gradients de $\vec{g}$. Per simplificar la descripció matemàtica d'aquests efectes, es considerarà una partícula lliure dins de la nau, situada a una distància $\vec{\eta}$ respecte a l'origen del referencial local, per exemple el centre de la nau. Respecte al centre de seguiment de la Terra, si $\vec{r}$ i $\vec{r}_0$ són els vectors posició de la partícula i l'origen del referencial local, llavors $\vec{\eta} = \vec{r} - \vec{r}_0$. L'aplicació de l'equació (1) proporciona la llei del moviment de la partícula respecte a l'astronauta:

$$\frac{d^2\vec{\eta}}{dt^2} = \vec{g}(\vec{r}_0 + \vec{\eta}) - \vec{g}(\vec{r}_0) = \vec{\eta} \cdot \nabla\vec{g}(\vec{r}_0) + O(\eta^2) . \quad (4)$$

Negligint els termes quadràtics en $\eta$ (que són d'ordre $\eta^2/r_0^4 \ll 1$), l'equació (4) mostra que l'acceleració de la partícula respecte a l'astronauta depèn linealment de $\vec{\eta}$ i del gradient de $\vec{g}$ en l'origen. Per tant, sols en l'origen del referencial local, o bé si les inhomogeneïtats de $\vec{g}$ són negligibles, l'equació de moviment es reduirà a $\ddot{\vec{\eta}} = \vec{0}$. Aquest resultat condueix a interrogar la natura en el cas més senzill de tots, o sia el cas ideal $\vec{g} =$ constant, com s'ho va plantejar A. Einstein el 1907.

Primer es considerarà un laboratori en caiguda lliure segons s'esquematitza en la figura 6.

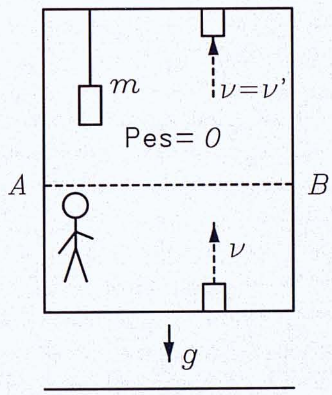


Figura 6: *Laboratori en caiguda lliure en un camp $\vec{g}$ constant*

Dels experiments del físic astronauta es pot inferir que per a l'observador del laboratori en caiguda lliure, es verifiquen totes les lleis de la relativitat especial, per exemple un raig de llum es propaga en línia recta de $A$ a $B$, un senyal electromagnètic de freqüència $\nu$ manté la freqüència, els acceleròmetres marquen zero, etc. Aquests resultats exemplifiquen la sentència del físic: «Oblida't de l'acceleració.»

En canvi, per a un observador en repòs respecte a les fonts de $\vec{g}$ = constant, mentre el raig de llum es propaga de $A$ a $B$ el laboratori ha caigut una distància

$\Delta z \approx g\Delta t^2/2 \approx g/2\, L^2/c^2$, sent $L = AB$. És a dir, el raig de llum deflecteix un angle:

$$\Delta\alpha \approx \tan\alpha \approx \frac{\Delta z}{L} \approx \frac{1}{2}\frac{g}{c^2}L.$$

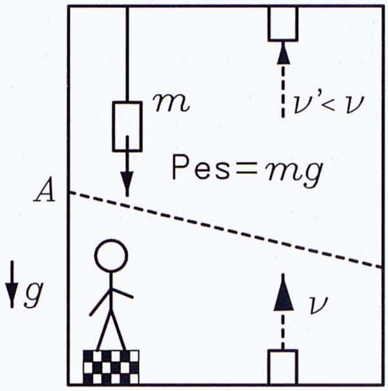


Figura 7: *Laboratori en repòs respecte a les fonts de $\vec{g}$ = constant*

Pel que fa a la freqüència del senyal electromagnètic, ha de mesurar un corriment Doppler a causa de la velocitat diferent, $\Delta v \approx g\Delta t \approx gL/c$, entre els esdeveniments d'emissió i recepció; per tant, el desplaçament de freqüència és de l'ordre

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta v}{c} \approx \frac{g}{c^2}L.$$

En resum, el camp gravitatori considerat ha d'acoblar-se als sistemes físics analitzats com s'esquematitza a la figura 7. Aquestes conclusions, bé que aproximades, sols es poden obtenir estrictament dins del context de la metodologia local, ja que de la infinitesimal i global no s'infereix cap tipus d'acoblament del camp gravitatori newtonià amb l'electromagnètic. Però, per al cas real d'un camp gravitatori no uniforme, com l'experimentat per l'astronauta en caiguda lliure al voltant de la Terra, bé que hom es pot oblidar de l'acceleració o camp $\vec{g}$, com repetidament s'ha raonat, el que no es pot fer és no tenir en compte les seves inhomogeneïtats. Precisament la determinació de les inhomogeneïtats de $\vec{g}$ s'emprarà per caracteritzar la interacció gravitatòria. En efecte, si l'equació (4) s'expressa en funció del potencial gravitatori $\Phi$ adopta la forma següent:

$$\frac{d^2\eta^\alpha}{dt^2} + (\partial^\alpha\partial_\beta\Phi)_0\eta^\beta = 0\,, \qquad (5)$$

on s'ha emprat la notació amb índex ($\alpha = (x, y, z)$ o (1, 2, 3) i $\partial^\alpha = \partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$).

Per tant, el físic del laboratori en caiguda lliure considera més pertinent descriure la gravitació newtoniana a l'origen del seu referencial local $\vec{r_0}$ emprant les equacions següents:

$$(\vec{g}(\vec{r}) - \vec{g}(\vec{r_0}))_0 = \vec{0}, \quad \text{ingravidesa}$$

$$R^\alpha{}_{0\beta 0}(\vec{r_0}) \equiv (\partial^\alpha\partial_\beta\frac{\Phi}{c^2})_0, \quad \text{camp de marea.} \qquad (6)$$

Per facilitar la comparança amb les magnituds corresponents de la relativitat general s'ha inclòs en la definició del tensor camp de marea els dos subíndexs zero addicionals i el factor $1/c^2$; llavors, com que $\Phi/c^2$ és adimensional, les dimensions del camp de marea són $L^{-2}$. Per exemple, per al cas de la Terra de massa $M$ fàcilment s'obté:

$$R^\alpha{}_{0\beta 0}(\vec{r_0}) = \frac{GM}{c^2}\frac{\vec{r_0}^2\delta^\alpha_\beta - 3\vec{r_0}^\alpha\vec{r}_{0\beta}}{r_0^5},$$

on $r_0$ és la distància entre el centre de la Terra i l'origen del referencial local en caiguda lliure, per exemple el centre de la nau, i $\delta^\alpha_\beta$ la delta de Kronecker tridimensional. Si s'escull l'eix $z$ en la direcció radial $\vec{r_0}$, l'expressió matricial del camp de marea esdevé:

$$(R^\alpha{}_{0\beta 0}(\vec{r_0})) = \frac{GM}{c^2 r_0^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aquesta igualtat, substituïda en l'equació (5) i tenint en compte la definició (6), proporciona tres equacions desacoblades per a $\vec{\eta} = (\eta^x, \eta^y, \eta^z)$

$$\frac{d^2\eta^x}{dt^2} + \frac{GM}{r_0^3}\eta^x = 0, \quad \frac{d^2\eta^y}{dt^2} + \frac{GM}{r_0^3}\eta^y = 0,$$

$$\frac{d^2\eta^z}{dt^2} - 2\frac{GM}{r_0^3}\eta^z = 0$$

equacions que determinen, per exemple, com una gota de líquid ideal (de tensió superficial pràcticament nul·la) inicialment esfèrica, es transformarà, sota el camp de marea estudiat, en un el·lipsoide de revolució.

En resum, el camp gravitatori newtonià, quan s'analitza amb el mètode local, cal definir-lo mitjançant el tensor $R^\alpha{}_{0\beta 0}$, que, en cada esdeveniment, mesura les forces de marea i governa l'evolució temporal de la distància $\eta^\alpha$ d'una partícula respecte a una altra propera i ambdues en caiguda lliure:

$$\frac{d^2\eta^\alpha}{dt^2} + R^\alpha{}_{0\beta 0}\eta^\beta = 0\,. \qquad (7)$$

La substitució de l'equació de Poisson $\partial^\alpha\partial_\alpha\Phi = 4\pi G\rho$ en la definició de $R^\alpha{}_{0\beta 0}$, equació (6), permet relacionar el camp de marea amb les seves fonts:

$$\text{traça}\,(R^\alpha{}_{0\beta 0}) \equiv R^\alpha{}_{0\alpha 0} = \partial^\alpha\partial_\alpha\frac{\Phi}{c^2} = \frac{4\pi G}{c^2}\rho\,. \qquad (8)$$

La reformulació equivalent de la gravitació newtoniana mitjançant les equacions (7) i (8) òbviament no pot tenir en compte les conclusions fonamentals del mètode local einsteinià. La conclusió bàsica, que la física és localment minkowskiana, no està continguda en les equacions (7) i (8), ja que ambdues pressuposen un espaitemps estratificat induït pel temps absolut $t$, i d'estructura mètrica $(dt, d\vec{r}^{\,2})$. En canvi, sí que permeten, respectant l'estructura estratificada i mètrica anterior, reinterpretar la llei de la inèrcia, identificant els moviments estàndards o lliures amb els de les partícules monopolars en caiguda lliure, com ho va demostrar E. Cartan el 1923, i com s'explicarà en l'apartat següent. Amb aquesta formulació, l'analogia electrostàtica perd tant contingut matemàtic com físic.

En l'apartat següent es demostrarà que la formulació de la teoria newtoniana segons les equacions (7) i (8) és la idònia per comparar-la amb la teoria relativista, ja que les equacions de la relativitat general es redueixen a les equacions (7) i (8) en el límit $(v/c)^2 \ll 1$ i $\Phi/c^2 \ll 1$.

## Geometrodinàmica einsteiniana

En aquest darrer apartat s'intentarà d'explicar les idees i estructura bàsica de la teoria relativista de la gravitació o relativitat general. V. Fock, i més recentment R. Wald, la qualifiquen de *teoria de l'espai, el temps i la gravitació*, però considerem que pot ser més ajustat al seu contingut seguir J. A. Wheeler i anomenar-la *geometrodinàmica einsteiniana*, ja que se sosté en un model dinàmic d'espaitemps, les estructures geomètriques del qual representen i mesuren la interacció gravitatòria.

En l'apartat anterior s'ha aplicat el mètode d'anàlisi local a la gravitació newtoniana, i s'han fet algunes inferències, per necessitat aproximades, de com la interacció gravitatòria s'ha d'acoblar a la resta de la física. El físic astronauta ho resumeix en els quatre punts següents:

1) Localment les lleis de la relativitat especial, ja siguin clàssiques o quàntiques, són vàlides. O sia, la física és en tot esdeveniment localment minkowskiana.

2) Aquesta simplicitat es mostra molt clarament si s'empra en cada esdeveniment un sistema de coordenades lorentzià, i. e., un referencial inercial local.

3) Per comprovar la inercialitat del referencial local s'ha de comprovar la ingravidesa, i. e., s'ha de treballar en un laboratori en caiguda lliure i sense girar.

4) El punt clau per detectar els efectes gravitatoris, en un entorn prefixat, consisteix a incrementar la precisió dels experiments, per exemple, fins a arribar a mesurar l'acceleració d'una partícula de prova en caiguda lliure respecte a l'origen del referencial inercial local. L'increment de la precisió dels experiments equival matemàticament a passar del mètode local a l'infinitesimal.

En els dos apartats següents s'ampliarà el contingut d'aquests quatre punts i s'analitzaran les seves conseqüències, tant des d'un punt de vista matemàtic com físic.

### Model dinàmic d'espaitemps

Una primera conseqüència rau en l'acceleració mútua dels referencials inercials locals; en efecte, sols cal contemplar dues partícules de prova properes en caiguda lliure i associar a cada una d'elles referencials inercials locals. Per tant, en lloc del referencial inercial global de la física galileianonewtoniana o de la minkowskiana, s'han de tenir en compte molts referencials inercials locals mútuament accelerats. En el límit matemàtic s'ha de considerar un en cada esdeveniment. O sia, s'ha d'abandonar l'espaitemps minkowskià global de la relativitat especial i com a màxim considerar-lo aplicable en un entorn infinitesimal de cada esdeveniment. Aquest fet implica que tant les transformacions de Lorentz $\Lambda^i_j$ com els vectors base $(\hat{e}_j)$ del referencial inercial local són funcions de l'esdeveniment $P$.[2] Si $P$ és l'origen del referencial local, llavors es verifica en $P$ i sols en $P$ que el producte escalar dels vectors base és igual a la mètrica minkowskiana $\hat{e}(P)_i \cdot \hat{e}(P)_j = \eta_{ij}$. En un esdeveniment $P'$ de l'entorn de $P$, el producte escalar dels corresponents vectors base, i. e., la mètrica en $P'$, incorporarà els efectes de les inhomogeneïtats del camp gravitatori i ja no coincidirà amb la mètrica minkowskiana. Però en $P$, i en el seu entorn infinitesimal, s'incorpora a l'espaitemps l'estructura física i geomètrica de la relativitat especial: cons de llum i la seva estructura causal, línies de món dels gèneres temps, espai i nul, significació de l'element d'arc d'una línia del gènere temps com a mesura temporal d'un rellotge estàndard transportat segons la línia de món, etc. Totes aquestes suposicions, contingudes en els quatre punts anteriors i corroborades experimentalment, mantenen un fort paral·lelisme matemàtic amb la teoria local dels espais corbats (geometria diferencial de les varietats riemannianes). En efecte, per exemplificar-ho de la manera més senzilla possible es considerarà el cas típic de les superfícies bidimensionals. Per concretar les idees, sigui una fina placa de vidre plana i quadrada, i una esfera segons s'esquematitza en la figura 8.

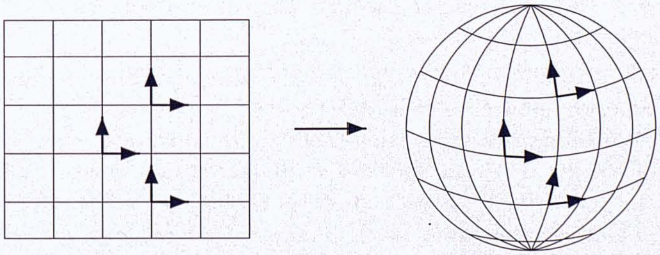

Figura 8: *Aplicació local d'un espai pla en un espai corbat*

La placa plana de vidre representarà l'espai euclidià bidimensional i la superfície de l'esfera un espai bidimen-

[2] El fet que els elements del grup de Lorentz siguin funcions de l'esdeveniment és característic de les teories de Gauge, en les quals el grup de simetria cinemàtic (algebraic) de la teoria esdevé dinàmic en fer-lo dependre del punt de l'espaitemps. Ja el 1956 Utiyama (*Phys. Rev.* **101**, 1597) va reformular la relativitat general dins d'aquest esquema teòric emprant el fibrat dels referencials ortonormalitzats. Vegeu, per exemple, P. Ramond. *Field theory: A modern primer*. Segona edició. Addison Wesley (1989).

sional riemannià. Suposem que es vol cobrir l'esfera amb la placa de vidre. Per fer-ho, es talla la placa de vidre en quadradets, com més petits, millor per així assolir un bon encaix, i es cobreix l'esfera amb ells. En l'analogia física, la placa de vidre simbolitza l'espaitemps minkowskià; l'esfera, un possible espaitemps corbat i els quadradets, referencials inercials locals. Evidentment ambdós espais són quadridimensionals i la signatura de la mètrica és $(-,+,+,+)$, enfront de l'exemple bidimensional de mètrica amb signatura $(+,+)$.

El cobriment de l'esfera amb quadradets representa un model del procés de descripció d'un espai corbat (superfície de l'esfera) mitjançant aplicacions locals amb l'espai pla (pla euclidià). El pla euclidià pot descriure's amb una sola aplicació (sistema de coordenades cartesià global), mentre que l'esfera no. Per aquesta raó s'han hagut de tallar petits quadradets (aplicacions locals) per poder-los situar sobre els punts de l'esfera el més ajustadament possible. Com més petits siguin els quadradets més precís serà l'encaix. Procedint d'aquesta manera es pot reemplaçar l'esfera per un conjunt de petites superfícies planes, que han d'estar interrelacionades, però, d'una manera definida, per exemple, mitjançant la determinació de l'angle de gir dels vectors base d'un quadradet envers els vectors base dels quadradets veïns. En altres paraules, la diferència entre el conjunt de quadradets situats en la placa plana i el mateix conjunt localitzats sobre la superfície de l'esfera, és que l'angle de rotació és zero en el primer cas, però no ho és en el segon cas. Traslladat, emprant llenguatge geomètric, significa que un espai corbat es pot considerar com un conjunt d'espais plans *soldats* mitjançant la prescripció d'uns coeficients connectors que determinen com s'han d'ajuntar. Aquests coeficients o connexió, com són anomenats pels matemàtics, defineixen la magnitud de la rotació relativa dels espais plans locals. És a dir, l'esfera és equivalent al conjunt de plans més el camp de connexió.

Per formular matemàticament el concepte de connexió se suposarà que en el pla euclidià s'empra un sistema global de coordenades cartesianes, els vectors base del qual es representaran segons $\hat{e}_i = (\hat{e}_1, \hat{e}_2)$, $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$. Llavors en cada quadradet i per a tot el pla es verifica $d\hat{e}_i = \vec{0}$. Però en l'esfera, com que $\hat{e}_i$ és funció del punt, sols es verificarà $d\hat{e}_i = \vec{0}$ en l'origen del sistema cartesià local del quadradet *soldat* a l'esfera en aquest punt. En efecte, si $P$ i $P + \Delta P$ són dos punts que pertanyen a quadradets veïns, s'ha de verificar:

$$\Delta \hat{e}_i = \hat{e}_i(P + \Delta P) - \hat{e}_i(P) \equiv \omega_i^j \hat{e}_j \equiv \Gamma_{ik}^j \hat{e}_j \Delta x^k(P) \quad (9)$$

on $\omega_i^j \equiv \Gamma_{ik}^j \Delta x^k$ són els coeficients de la connexió entre quadradets veïns. En el límit infinitesimal, quan el quadradet tendeix i es confon amb el pla tangent a l'esfera, la connexió és zero en l'origen $P$ del sistema cartesià local, però necessàriament és diferent de zero en qualsevol altre punt per proper que sigui a $P$. En altres paraules, les diferencials de la connexió d'un espai corbat no poden ser nul·les.

En aquest punt és pertinent observar que la magnitud connexió no apareix explícitament identificada en l'anàlisi local de la gravitació newtoniana efectuada en l'apartat anterior. Això és degut al fet que la connexió, dins del context de la teoria newtoniana, és proporcional a la intensitat del camp gravitatori $g^\alpha = -\partial^\alpha \Phi$, com va demostrar E. Cartan i com s'explicarà més endavant. Per tant, com que en l'origen del referencial local en caiguda lliure (ingravidesa), $g^\alpha$ és zero, també ho serà la connexió en aquest esdeveniment i referencial. En canvi les seves diferencials, com que són proporcionals al camp de marea, necessàriament són diferents de zero.

Tornem ara a l'exemple de la placa plana i la superfície de l'esfera, amb l'objectiu d'esbrinar el significat geomètric dels camps de marea. Primer recordem que les línies rectes del pla, també anomenades *geodèsiques*, es caracteritzen pel fet de ser les de longitud mínima entre dos punts, o bé pel trasllat paral·lel del vector tangent. Les línies rectes es transformen en cercles màxims sobre la superfície de l'esfera mitjançant les aplicacions locals (quadradets). Els cercles màxims són les geodèsiques de la superfície de l'esfera, ja que, igual que les rectes del pla, es caracteritzen per minimitzar la distància entre dos punts i també pel trasllat paral·lel del vector tangent a elles. La realització del trasllat paral·lel sobre la superfície de l'esfera s'ha de fer intrínsecament, sense *sortir* de la superfície, o sia, mantenint sempre el vector tangent a l'esfera. Això vol dir que si el trasllat es fa emprant el triespai euclidià en el qual la superfície de l'esfera està immersa, llavors s'ha d'anihilar en el procés de trasllat el component perpendicular a la superfície, com si no existís. *De facto*, per a la superfície no existeix, ja que trivialment és un espai bidimensional. En l'equació (9), que defineix la connexió, aquest fet ja s'ha tingut en compte, ja que $\Delta \hat{e}_i$ s'expressa linealment en funció de ($\hat{e}_1$ i $\hat{e}_2$). Per tant, l'equació diferencial de les geodèsiques s'obté anul·lant la variació del vector tangent quan es trasllada paral·lelament al llarg d'elles. Sigui $\vec{u} = u^i \hat{e}_i \equiv \hat{e}_i dx^i/dl$ el vector unitari tangent a la geodèsica i $dl$ l'element d'arc; llavors aplicant la definició de connexió, equació (9), s'obté:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{D\vec{u}}{dl} = \frac{D}{dl}(u^i \hat{e}_i) &= \frac{du^i}{dl}\hat{e}_i + u^i \frac{D\hat{e}_i}{dl} \\ &= \left(\frac{du^i}{dl} + \Gamma^i_{km} u^k u^m\right)\hat{e}_i = u^1 \nabla_1 u\,, \end{aligned} \quad (10)$$

on s'ha emprat la notació $D/dl \equiv u^l \nabla_l$, per recordar que $\vec{u}$ s'està derivant intrínsecament, sense *sortir* de la superfície de l'esfera. En resum, l'equació de les geodèsiques del pla

$$\frac{du^i}{dl} = \frac{d^2 x^i}{dl^2} = 0$$

es transforma en els espais corbats (superfície de l'esfera, en l'exemple analitzat), com segueix:

$$\frac{d^2x^i}{dl^2} + \Gamma^i_{km}\frac{dx^k}{dl}\frac{dx^m}{dl} = 0\,. \tag{11}$$

Com es pot deduir fàcilment, pel que s'acaba d'exposar, la connexió s'empra en general per efectuar la derivació intrínseca, o també anomenada *covariant*, de qualsevol magnitud en els espais corbats. Tot seguit es consideraran dues geodèsiques properes, o cercles màxims per al cas de la superfície de l'esfera. Com abans, sigui $u^i$ el vector unitari tangent a la geodèsica de referència, i $\eta^i$ el vector que les connecta. Llavors la teoria dels espais corbats proporciona la següent equació diferencial per a $\eta^i$:

$$\frac{D^2\eta^i}{dl^2} + R^i{}_{nkm}u^n\eta^k u^m = 0\,, \tag{12}$$

on $D^2\eta^i/dl^2 = u^l\nabla_l(u^m\nabla_m\eta^i)$, i $R^i{}_{nkm}$ és el tensor de Riemann o de curvatura de l'espai corbat, que s'obté com una derivació antisimetritzada de la connexió $\Gamma^i_{km}$. Si $\{e_a\}$ són els vectors base associats al sistema de coordenades $\{x^a\}$ llavors, $e_aR^a{}_{bcd} = (\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)e_b$. La comparança de l'equació (12) amb l'equació (7) induirà a identificar els camps de marea, tant newtonians com relativistes, amb la curvatura dels respectius espaitemps. La teoria matemàtica dels espais riemannians o pseudoriemannians proporciona les equacions que defineixen l'estructura geomètrica en els tres nivells: mètrica, connexió i curvatura.

Ja s'han exposat totes les eines matemàtiques imprescindibles per formular la teoria relativista de la gravitació o relativitat general, però abans es considera pertinent completar de manera coherent amb el mètode local la interpretació de la gravitació newtoniana, per facilitar així la inferència de la teoria relativista. Es recorda que el mètode local descriu la gravitació newtoniana mitjançant les equacions (7) i (8), les quals resten definides en un espaitemps d'estructura estratificada i plana definida pel temps absolut $t$. En aquest espaitemps, l'equació (1) determina el moviment d'una partícula en caiguda lliure referida a un referencial galileià global de coordenades $(t, x^\alpha)$, on

$$\vec{A} = \vec{0},\ \vec{\omega} = \vec{0}\ \text{i}\ \vec{F} = \vec{0}: \quad \frac{d^2x^\alpha}{c^2dt^2} + \partial^\alpha\frac{\Phi}{c^2} = 0.$$

Aquesta equació es pot formular de la manera equivalent següent, si es té en compte que el temps absolut resta definit llevat transformacions afins $t \to \lambda = at + b$:

$$\frac{d^2ct}{d\lambda^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \left(\partial^\alpha\frac{\Phi}{c^2}\right)\frac{dct}{d\lambda}\frac{dct}{d\lambda} = 0\,.$$

Si es comparen amb l'equació (11) de les geodèsiques d'un espai corbat, permeten definir una connexió, que respecte al referencial galileià global emprat és: $\Gamma^\alpha_{00} = \partial^\alpha\Phi/c^2$; la resta de components són zero.

Evidentment, la connexió s'anul·la en l'origen del referencial local en caiguda lliure definit per la partícula, ja que de la mateixa equació (1) es dedueix la llei de transformació de la connexió a aquest referencial ($A^\alpha = g^\alpha = -\partial^\alpha\Phi$):

$$\Gamma'^\alpha_{00} = \Gamma^\alpha_{00} + \frac{A^\alpha}{c^2} = \partial^\alpha\frac{\Phi}{c^2} - \partial^\alpha\frac{\Phi}{c^2} = 0\,.$$

La identificació matemàtica acabada d'efectuar té profundes repercussions en la interpretació física de la gravitació newtoniana, atès que selecciona com a moviments estàndards o lliures els que tenen les partícules monopolars en caiguda lliure, moviment que s'ha identificat amb les geodèsiques de l'espaitemps, en què la connexió és l'estructura geomètrica addicional. És a dir, com ens ha ensenyat el físic astronauta, els referencials inercials passen a ser els laboratoris en caiguda lliure i no els galileians globals. Aquesta reinterpretació de la llei de la inèrcia implica una geometrització de la gravitació newtoniana, ja que la intensitat del camp gravitatori $g^\alpha/c^2 = -\partial^\alpha\Phi/c^2$ s'ha identificat amb la connexió i el camp de marea, amb el tensor curvatura de l'espaitemps estratificat. S'ha de tenir present que l'entitat que es corba és l'espaitemps, però resten invariables i euclidianes les simultaneïtats definides pel temps absolut $t$ = constant, que s'identifiquen amb l'espai. Amb aquesta interpretació, la causa, tant de les forces gravitatòries com de les inercials, s'ubica en l'estructura geomètrica (connexió, curvatura) de l'espaitemps, i s'ha d'explicitar que deixaria de ser vàlida si no es verifiqués la igualtat exacta entre les masses inercial i gravitatòria, i. e., el principi d'equivalència galileià. Perquè sols es requereix un sols tipus de massa, atès que les equacions de moviment de les partícules lliures s'han identificat amb les geodèsiques de l'espaitemps.

Òbviament aquesta formulació no és localment minkowskiana, ja que la seva estructura mètrica és definida a priori per la parella d'absoluts globals $(dt, dl^2)$ independents de la connexió i curvatura. No obstant això, si aquesta estructura mètrica se substitueix localment per la minkowskiana, com requereix i demana el mètode local einsteinià, porta a postular la igualtat simbòlica següent, base de la teoria de la relativitat general:

*espaitemps minkowskià local + interacció gravitatòria (mètrica, connexió, curvatura)= espaitemps pseudoriemannià.*

Aquesta igualtat condueix a transcriure d'una manera matemàticament rigorosa la metodologia local sintetitzada en els quatre punts de contingut físic que han iniciat aquest apartat; en efecte, amb les eines matemàtiques dels espais corbats, es poden reformular, punt per punt, de la manera següent:

1) En cada esdeveniment $P$ i respecte a un referencial inercial local, la mètrica adopta en $P$ la forma

minkowskiana $(\eta_{ij}) = \text{diag.}\ (-1, 1, 1, 1)$. En un esdeveniment $P'$ proper a $P$ i de coordenades inercials respecte a $P$ $\hat{x}^i = (ct, x^\alpha)$, l'expressió de la mètrica exacta fins a segon ordre en $|\hat{x}^i|$ és:

$$ds^2 = (\eta_{ij} + \frac{1}{3} R_{iljk} \hat{x}^l \hat{x}^k) d\hat{x}^i d\hat{x}^j \, .$$

2) Les primeres derivades dels components de la mètrica s'anul·len en $P$.
3) Els components de la connexió també s'anul·len en $P$.
4) L'equació que en $P$ obeeix el vector separació $\eta^i$ entre dues geodèsiques properes és l'equació (12), en que $u^i$ és el vector unitari tangent a la geodèsica de referència, i. e., la quadrivelocitat si la geodèsica és del gènere temps.

Les tres primeres sentències defineixen unívocament el nou model d'espaitemps: l'espaitemps és una varietat quadridimensional (conjunt de tots els esdeveniments) amb una mètrica $g_{ab}$ pseudoriemanniana de signatura $(-, +, +, +)$. Les geodèsiques nul·les representen raigs de llum, les geodèsiques del gènere temps representen les línies de món de les partícules en caiguda lliure i l'arc de longitud de qualsevol línia del gènere temps mostra el temps mesurat per un rellotge estàndard. El quart punt es dedueix dels tres primers. O sia, hom ha d'acceptar la realitat d'un espaitemps dinàmic, l'estructura geomètrica del qual (mètrica, connexió i curvatura) descriu completament la interacció gravitatòria relativista. S'ha de tenir present, però, que aquests tres nivells descriptius de la interacció gravitatòria estan directament relacionats, ja que a partir de la mètrica $g_{ab}$ es dedueix unívocament la connexió $\Gamma^a_{bc}$ en verificar-se $\nabla_c g_{ab} = 0$, i tal com ja s'ha explicat, la curvatura es dedueix de la connexió.

Emprant la terminologia del primer apartat, el model d'espaitemps és:
$\{M; (g_{ab}, \Gamma^a{}_{bc}, R^a{}_{bcd})$, camp electromagnètic, línies de món, $\cdots\}$.

L'únic absolut és l'espaitemps $M$ *despullat* de tota l'estructura mètrica; per tant, el grup d'automorfismes de l'espaitemps i de les equacions de la física definides en ell és el grup de totes les transformacions difeomòrfiques de coordenades (principi de covariància). Cal observar que la metodologia didàctica emprada en el present article es pot esquematitzar simbòlicament mitjançant una trajectòria seqüencial nítida que connecta els vèrtexs del pla superior del cub de R. Penrose, figura 3, com segueix:

$$\underset{\text{Galileu-Newton}}{(G = 0, (1/c) = 0, h = 0)} \rightarrow \underset{\text{Newton-Cartan}}{(G, (1/c) = 0, h = 0)} \rightarrow \underset{\text{Einstein}}{(G, 1/c, h = 0)}$$

enfront de trajectòries en ziga-zaga emprades per molts autors; potser per això es difumina l'amplitud i potencialitat fisicomatemàtica del mètode local einsteinià. Estimem que el mètode didàctic emprat, basat en les aportacions d'Elie Cartan (1923) a la teoria gravitatòria, dóna resposta a les crítiques raonables de J. L. Synge al principi d'equivalència einteinià, (vegeu el peu de pàgina núm. 1).

Ara sols resta inferir les equacions que determinen la dinàmica de l'espaitemps, cosa que es farà en el subapartat següent.

## Equacions de la relativitat general

Per començar aquest darrer subapartat és pertinent tornar a considerar el bucle de la figura 5, el qual amb paraules de J. A. Wheeler es pot expressar de la manera següent: *l'espaitemps actua sobre la matèria dient-li com s'ha de moure, i alhora la matèria reacciona sobre l'espaitemps dient-li com s'ha de corbar.*

Ja s'ha explicat com operativitzar la part esquerra del bucle o primera part de la sentència anterior: totes les lleis de la física, ja siguin clàssiques o quàntiques, adopten en cada esdeveniment $P$ de l'espaitemps la forma matemàtica que posseeixen en la relativitat especial, si en $P$ es refereixen a un referencial inercial local, i. e., la física és localment minkowskiana. Matemàticament equival al fet que en les equacions minkowskianes es facin les substitucions $\eta_{ij} \rightarrow g_{ab}$ i, $\partial_i \rightarrow D_a$, si s'empra en l'espaitemps un sistema de coordenades arbitrari. S'ha de tenir present que aquestes substitucions no proporcionen una transcripció unívoca per a equacions que contenen derivades de segon o ordre superior, atès que les derivades covariants $D_a$ no commuten.

Tot seguit es desenvoluparà la segona part de la sentència de J. A. Wheeler, o sia, la part dreta del bucle de la figura 5. Per fer-ho, primer s'han d'identificar les fonts de la interacció gravitatòria, (mètrica, connexió, curvatura). En l'aproximació newtoniana, vegeu l'equació (8), les fonts són les densitats de massa; per tant, un candidat podria ser la densitat de massa-energia. Però és impossible construir una teoria relativista, i. e., localment minkowskiana, en la qual la densitat d'energia sigui l'única font. Sols cal recordar que la densitat d'energia és la component $T_{00}$ del tensor impuls-energia. El que es manifesta com a densitat d'energia pura $\rho = T_{00}$, respecte a un referencial inercial local en $P$, esdevé una barreja lineal de totes les components $T_{ij}$ quan la densitat d'energia es calcula respecte a un altre referencial inercial local en $P$, ja que $\rho' = T'_{00} = \Lambda^i_0(P)\Lambda^j_0(P)T_{ij}$. Per tant això porta a postular que la font de la interacció gravitatòria és el tensor impuls-energia de tots els sistemes físics, llevat el del mateix camp gravitatori, ja que la interacció gravitatòria s'ha identificat amb l'estructura geomètrica de l'espaitemps.

Finalment, per tal d'inferir les equacions d'Albert Einstein de la relativitat general, es tindran en compte les tres suposicions restrictives següents:
1) Les equacions relativistes han de contenir les prediccions de la gravitació newtoniana en el domini en què

aquesta teoria és aplicable, és a dir, per a velocitats petites $(v/c)^2 \ll 1$ i camps febles o baixes energies

$$\frac{GM}{c^2 R} \approx \frac{\Phi}{c^2} \ll 1 .$$

2) Atès que en relativitat especial el tensor impuls-energia d'un sistema tancat verifica l'equació de conservació $\partial_a T^{ab} = 0$, llavors en l'espaitemps corbat, i. e., en acoblar-se al camp gravitatori que genera, s'ha de substituir per $D_a T^{ab} = 0$.
3) Tenint en compte que les fonts de la interacció gravitatòria s'han identificat amb el tensor impuls-energia $T_{ab}$, se suposarà l'estructura matemàtica següent per a les equacions de camp:

$$\text{(Tensor associat a la geometria de l'espaitemps,} \\ \text{funció de la mètrica i les seves derivades)} \equiv G_{ab} = \kappa T_{ab} .$$

El punt segon anterior implica que la divergència de $G^{ab}$ ha de ser nul·la, $D_a G^{ab} = 0$.

Les tres restriccions anteriors, conjuntament amb la teoria matemàtica dels espais pseudoriemannians, condueixen unívocament a les equacions d'Albert Einstein de la relativitat general:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} . \qquad (13)$$

$G_{ab} = G_{ba}$ es coneix com a tensor d'Einstein. $R_{ab} = R^c{}_{acb} = R_{ba}$ és el tensor de Ricci, i $R = R^a_a$ l'escalar curvatura. S'ha de recalcar que el tensor d'Einstein sempre verifica $D_a G^{ab} = 0$; per tant, les equacions d'Einstein inclouen *automàticament* la llei $D_a T^{ab} = 0$. Les equacions (13) expressades en funció de la mètrica $g_{ab}$ constitueixen un sistema acoblat d'equacions diferencials de segon ordre en les derivades parcials de $g_{ab}$. Aquest sistema és no lineal en les derivades primeres, però lineal en les derivades segones, i atès que les equacions són tensorials qualsevol transformació de coordenades transforma solucions en solucions.

Les conseqüències i les aplicacions que es deriven de les equacions d'Einstein són d'una gran potencialitat i riquesa, potser com cap altre sistema d'equacions de la física. Per exemple, governen l'estructura de l'espaitemps extern a un cos estacionari, governen la generació i propagació d'ones gravitacionals, determinen la propagació, a través de l'Univers, de qualsevol tipus d'ones i la formació d'imatges de cossos galàctics radiants per les anomenades *lents gravitacionals*, governen l'expansió i recontracció del mateix Univers, governen el col·lapse d'un estel fins a formar un forat negre, i això determina unívocament la geometria de l'espaitemps del seu exterior, contenen les equacions de moviment dels sistemes físics, ja que $D_a T^{ab} = 0$ es verifica *automàticament*, i molt més. Però també resta molt a fer; sols cal tenir present el cub de R. Penrose, figura 3, per evidenciar que encara no existeix cap teoria quàntica satisfactòria de la gravitació, bé que des de la dècada dels setanta s'han fet avenços rellevants en aquesta direcció. Fins i tot en el domini clàssic les equacions d'Einstein amaguen sorpreses, ja que ni en el buit es coneix la solució general de les equacions; tampoc no existeix una teoria coherent dels sistemes termoelàstics i en general de la teoria de materials, encara que hi ha candidats prometedors.

Per acabar l'article, i deprés de més de 85 anys d'existència de la relativitat general, potser és pertinent recordar la resposta de P. A. M. Dirac a un col·lega que li va preguntar: «Quan podia dir-se que s'entenia una teoria física?» Dirac li va respondre que: «Quan hom és capaç de preveure les propietats de les solucions de les equacions de camp de la teoria sense necessitat de resoldre-les.» Estimem que l'assenyada resposta de Dirac identifica una de les principals dificultats i alhora apunta un mètode per comprendre i dominar la relativitat general.

## Referències


MOLINA, A., *Desarrollo conceptual de la teoria de la relatividad*, NAVARRO, L. (ed.), *El siglo de la física*, Tusquets (1992).

EHLERS, J., *The nature and structure of spacetime*, *Jornades d'homenatge a Einstein*, Institut d'Estudis Catalans (1981).

EINSTEIN, A. et al., *The principle of relativity*, Dover (1952).

EINSTEIN, A., *The meaning of relativity*, Princeton U. P. (1953).

MISNER, C. W., THORNE, K. S. i WHEELER, J. A., *Gravitation*, Freeman (1973).

SYNGE, J. L., *Talking about relativity*, North Holland (1970).

KOPCYNSKY, W. i TRAUTMAN, A., *Spacetime and gravitation*, J. Wiley (1992).