Dinàmica relativista d'un objecte corpuscular de massa pròpia variable. Aplicacions

Josep Graells* **i Carme Martín**†

Introducció[1]

«Tot cal fer-ho tan senzill com sigui possible, però no simple» (A. Einstein).

Tot estudiant de física sap que, a altes energies, una primera anàlisi dels processos de col·lisió de partícules es fonamenta en la cinemàtica relativista. En els processos de col·lisió se suposa que la interacció entre les partícules és d'abast finit, per tant, la suma dels vectors energia-moment lineal de les partícules abans i després del xoc és igual. Això és, si $p^a(i) = m(i)u^a(i)$ representa el vector energia-moment lineal de la partícula i-èsima, sent $m(i)$ la massa pròpia i $u^a(i)$ la quadrivelocitat, es verifica:

$$\sum_{(i)} p^a[(i), \text{abans del xoc}] = \sum_{(j)} p^a[(j), \text{després del xoc}], \tag{1}$$

equació que representa la llei de conservació de l'energia i el moment lineal totals en el xoc.

Uns exemples típics d'aplicació de l'equació (1), però pertinents per als nostres objectius, són els tres següents:

1. Formació d'isòtops d'un àtom ^mA, mitjançant la reaccció de captura neutrònica:

$$n + {}^mA \rightarrow {}^{m+1}A$$

$$p^a(n) + p^a({}^mA) = p^a({}^{m+1}A).$$

2. Desexcitació d'un àtom de sodi, Na, mitjançant l'emissió d'un fotó γ:

$$\mathrm{Na}^* \rightarrow \mathrm{Na} + \gamma$$

$$p^a(\mathrm{Na}^*) = p^a(\mathrm{Na}) + p^a(\gamma).$$

3. Interacció d'un electró e amb un fotó γ:

$$e + \gamma \rightarrow e + \gamma$$

$$p^a(e) + p^a(\gamma) = \tilde{p}^a(e) + \tilde{p}^a(\gamma).$$

En aquests casos, i en d'altres de similars, és útil determinar la variació del vector energia-moment lineal que ha experimentat, com a conseqüència del xoc, una de les partícules reaccionants. En els tres exemples anteriors, es pot plantejar la determinació de Δp^a per a l'àtom A, per a l'àtom de sodi i per a l'electró:

$$\Delta p^a(A) \equiv p^a({}^{m+1}A) - p^a({}^mA) = p^a(n)$$

$$\Delta p^a(\mathrm{Na}) \equiv p^a(\mathrm{Na}) - p^a(\mathrm{Na}^*) = -p^a(\gamma)$$

$$\Delta p^a(e) \equiv \tilde{p}^a(e) - p^a(e) = p^a(\gamma) - \tilde{p}^a(\gamma).$$

D'aquestes igualtats es dedueix que $\Delta p^a(A)$ és un vector del gènere temps, $\Delta p^a(\mathrm{Na})$ és del gènere llum i $\Delta p^a(e)$ és del gènere espai. Els dos primers casos són exemples de col·lisions inelàstiques, en les quals la massa pròpia dels elements amb estructura interna varia, mentre que el darrer és un exemple típic de col·lisió elàstica (efecte Compton), entre objectes sense estructura interna.

Aquestes senzilles consideracions tenen per objectiu explicitar que, a nivell fonamental, la variació del vector energia-moment lineal corresponent a una partícula, pot ser de qualsevol gènere: espacial, temporal o nul. El gènere de Δp^a està directament relacionat amb el tipus de partícula i la interacció que experimenta.

En aquest article s'analitzaran les equacions del moviment d'un objecte macroscòpic corpuscular de massa pròpia $M(\tau)$ variable, és a dir, s'haurà de determinar la variació del vector energia-moment lineal respecte al seu temps propi τ. Atès que M és variable, s'ha de suposar que la partícula posseeix estructura interna, bé que es considerarà puntual i monopolar.

Des de fa dècades, és habitual en el món acadèmic no donar massa rellevància formativa al problema que acabem de plantejar. Per exemple, en l'aproximació newtoniana, es tracta per la via de la resolució de problemes més o menys complicats. No obstant això, aquest és el punt de vista oposat a l'enfocament didàctic que A. Sommerfeld va adoptar en el seu curs de física teòrica (Sommerfeld, 1952) de les primeres decàdes d'aquest segle. A A. Sommerfeld el preocupava que els estudiants de física poguessin copsar de bell antuvi la significació

* **Josep Graells i Casanellas** (Cervera, 1946) és pèrit Industrial Elèctric per l'Escola d'Enginyeria Tècnica Industrial de Terrassa (1967) i doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1978).

† **Carme Martín Torres** (Barcelona, 1950) és doctora en Física per la Universitat de Barcelona (1981) i és professora del col·legi La Salle Gràcia.

[1] En tot l'article s'empra un sistema d'unitats en el qual la velocitat de la llum en el buit, c, és la unitat fonamental ($c = 1$). També es pressuposa que el lector coneix la formulació quadridimensional de la relativitat especial. La mètrica minkowskiana s'escull de signatura +2.

i abast físic de la derivada temporal del moment lineal, en relació amb la segona llei de Newton.

El present article farà extensiva al món relativista la metodologia didàctica que A. Sommerfeld va fer servir per a la mecànica newtoniana.

Força generalizada de Minkowski

Tornem a centrar l'interès en l'objecte macroscòpic corpuscular de massa pròpia variable $M(\tau)$, corresponent al temps propi τ, de la seva línia de món $x^a(\tau)$. La quadrivelocitat de $M(\tau)$ és

$$u^a(\tau) = \frac{dx^a}{d\tau} = (\gamma(u), \gamma(u)\vec{u}),$$

sent $\gamma(u) = (1-\vec{u}^2)^{-1/2}$, i on el seu vector energia-impuls es defineix $p^a(\tau) = M(\tau)u^a(\tau)$.

En relativitat especial, per descriure la interacció de $M(\tau)$ amb el seu entorn és habitual d'introduir el vector K^a, anomenat *força minkowskiana*. En funció de K^a , la llei del moviment de $M(\tau)$ es formula de la manera següent:

$$\frac{dp^a(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(M(\tau)u^a(\tau)\right) = K^a. \qquad (2)$$

Però com W. Rindler adverteix, l'equació (2) és en rigor una «semillei», ja que esdevé una mera definició de K^a, si no es complementa amb una altra «semillei» que proporcioni, alhora, una expressió per a K^a.

Les dues metodologies d'anàlisi de la interacció, representades per la llei de conservació de l'energia-moment lineal, segons l'equació (1), i la llei del moviment, equació (2), es poden relacionar formalment d'una manera senzilla. En efecte, sols cal integrar l'equació (2) al llarg de la línia de món de $M(\tau)$, escollint com a límit inferior d'integració qualsevol τ previ a l'actuació de la interacció, és a dir $K(\tau) = 0$ per a $\tau \leq \tau_1$, i com a límit superior d'integració qualsevol τ posterior a l'actuació de la interacció, és a dir $K(\tau) = 0$ per a $\tau \geq \tau_s$, per obtenir:

$$\Delta p^a \equiv p^a(\tau_s) - p^a(\tau_i) = \int_{\tau_i}^{\tau_s} K^a(\tau)d\tau =$$

$$\sum_{(i)\neq(M)} p^a\left[(i), \text{abans}\right] - \sum_{(j)\neq(M)} p^a\left[(j), \text{després}\right].$$

No obstant això, els objectius d'ambdós mètodes són fins a cert punt complementaris: en els problemes de col·lisió es poden inferir propietats de la interacció sense conèixer-la en tots els seus detalls, mitjançant l'aplicació de la llei de conservació de l'energia-moment lineal, mentre que l'aplicació de la llei del moviment pressuposa que es coneix la interacció per tal d'obtenir el resultat de la seva acció.

És evident que el gènere vectorial de K^a, espacial, temporal o nul, ha de coincidir amb el de dp^a, atès que segons l'equació (2), $dp^a = K^a d\tau$. Sobre això, si es desenvolupa el primer membre de l'equació (2) i seguidament es projecta sobre la quadrivelocitat, s'obté:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\tau}u^a + M\frac{du^a}{d\tau} &= K^a \\ -\frac{dM}{d\tau} &= u_a K^a, \end{aligned} \qquad (3)$$

on s'ha tingut en compte que $u_a u^a = -1$ i, per tant, $u_a du^a = 0$.

De l'equació (3) es dedueix que $M(\tau)$ romandrà constant, això és,

$$\frac{dM}{d\tau} = 0,$$

si i solament si $u_a K^a = 0$; per tant, atès que u^a és del gènere temps, necessàriament K^a ha de ser del gènere espai si M roman constant. Per exemple, la força de Lorentz

$$K^a = qu_b F^{ab} = q\gamma(u)\,(\vec{E}\cdot\vec{u}, \vec{E} + \vec{u}\wedge\vec{B})$$

és d'aquest tipus, ja que verifica automàticament $u_a K^a = 0$, atesa l'antisimetria del tensor camp electromàgnetic.

En resum, per tal de descriure la dinàmica de $M(\tau)$, sent

$$\frac{dM}{d\tau} \neq 0,$$

s'haurà de recórrer a una força minkowskiana K^a de gènere temps o nul. Alguns autors l'anomenen quasi-força o força impura.

En l'estudi de la dinàmica relativista (no quàntica) de les partícules, s'accepta com un fet evident que la massa pròpia roman constant, ja que com que la partícula és puntual, es considera que no pot tenir estructura interna. Llavors l'equació (2) condueix al conegut desenvolupament que, per motius de comparació posterior, es resumeix seguidament:

$$\frac{dp^a}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(Mu^a) = M\frac{du^a}{d\tau} = K^a = \left(K^0, \vec{K}\right).$$

De $0 = u_a K^a = -\gamma(u)K^0 + \gamma(u)\vec{u}\cdot\vec{K}$, se segueix que $K^0 = \vec{u}\cdot\vec{K}$. Per tant

$$\frac{dp^a}{d\tau} = M\frac{du^a}{d\tau} = (\vec{u}\cdot\vec{K}, \vec{K}),$$

o bé, tenint en compte que:

$$\frac{dp^a}{dt} = \left(\vec{u}\cdot\frac{\vec{K}}{\gamma(u)}, \frac{\vec{K}}{\gamma(u)}\right)$$

i definint la triforça:

$$\vec{f} \equiv \frac{\vec{K}}{\gamma(u)},$$

s'obté la descomposició (1 + 3)-dimensional de l'equació del moviment en el cas en el qual M roman constant:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(M\gamma) = \vec{u}\cdot\vec{f}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\gamma\vec{u}) = \vec{f}.$$

En el cas d'una càrrega de prova situada en un camp electromagnètic $\vec{f} = q(\vec{E}+\vec{u}\wedge\vec{B})$ és la força de Lorentz.

Tornem a recordar, però, que l'objectiu de l'article consisteix a analitzar l'equació del moviment d'una partícula puntual de massa pròpia variable. La metodologia emprada no farà ús de les necessàries i inevitables «complicacions» fisicomatemàtiques que requereix un tractament rigorós de la problemàtica intrínseca als cossos amb estructura interna. Aquest domini de la física relativista, actualment encara és objecte de recerca, atès que no es consideren resolts alguns dels problemes bàsics que planteja, i encara molt menys en relativitat general. Dins d'aquest context, el present article es podria considerar com un primer atansament a aquest domini, bé que fent ús dels mètodes acadèmics estàndard i seguint les pautes didàctiques d'A. Sommerfeld.

Equacions del moviment de $M(\tau)$

En l'apartat anterior s'ha deduït l'equació (3) que relaciona la força minkowskiana K^a amb la variació de massa pròpia $M(\tau)$ de la partícula, que reproduïm seguidament:

$$\frac{dM}{d\tau} = -u^a K_a.$$

Aquesta equació es redueix a $K^0 = dM(\tau)/d\tau$ quan es refereix a la família de referencials inercials que en cada instant τ estan en repòs respecte a la partícula. Són els anomenats *propis* o *comòbils*, i els representarem mitjançant $\Sigma(x^a(\tau))$, sent $x^a(\tau)$ la línia de món de la partícula. És evident que K^a ha d'incorporar en la seva estructura el mecanisme que genera la variació de massa pròpia. Per bé que, si se segueix per aquest camí, s'arriba a interpretacions del formalisme discutibles i confuses, sobretot quan es fa la quasi sempre necessària descomposició (1 + 3)-dimensional de la llei del moviment. W. G. Dixon resol, al nostre parer satisfactòriament, aquesta problemàtica mitjançant la descomposició de K^a en dues parts, una paral·lela a u^a, i l'altra ortogonal a u^a. La component paral·lela a u^a es pot interpretar com una font energètica pura, allunyada del concepte newtonià de força. La component ortogonal a u^a, és a dir, segons la simultaneïtat de $M(\tau)$, en tractar-se d'un vector del gènere espai, es pot interpretar com una força típicament propulsora que genera l'acceleració $du^a/d\tau$ de la partícula. Més endavant es tractarà la metodologia de W. G. Dixon. Però per al problema concret referent a l'equació del moviment de $M(\tau)$, estimem més pertinent, i didàcticament més entenedor, segregar de K^a la part que aporta o rep massa pròpia de $M(\tau)$. És l'enfocament que A. Sommerfeld va adoptar per a la mecànica newtoniana.

Per tant, el fet que $dM/d\tau \neq 0$ s'atribuirà a la interacció de $M(\tau)$ amb un flux $\delta\pi^a$ d'energia-moment lineal, tal que

$$\frac{dM}{d\tau} = -u_a\frac{\delta\pi^a}{\delta\tau}.$$

Per tal de concretar la metodologia proposada, seguidament veurem tres exemples senzills de $\delta\pi^a$, però relacionats amb aplicacions rellevants, com es farà palès més endavant.

1. Flux unidireccional i homogeni de partícules, $\delta\pi^a = \delta m v^a$. Flux de massa pròpia δm i quadrivelocitat v^a, absorbit o emès per $M(\tau)$ durant l'interval de temps propi $d\tau$.

2. Flux unidireccional i homogeni de radiació electromagnètica, $\delta\pi^a = \delta E_{rad} l^a$, on $l^a l_a = 0$. És habitual normalitzar l^a amb la prescripció $u_a l^a = -1$. Llavors, respecte a cada $\Sigma(x^a(\tau))$, les components de l^a són $(1, \hat{u}_r)$, sent $\hat{u}_r$ el vector unitari que defineix la direcció i el sentit de propagació de la radiació electromagnètica, respecte a la partícula $M(\tau)$. δE_{rad} és l'energia radiant absorbida o emesa per $M(\tau)$ durant $d\tau$, segons la mesuren els observadors propis $\Sigma(x^a(\tau))$, atès que $\delta E_{rad} = -u_a \delta\pi^a$.

3. Flux calorífic associat a un procés reversible, $\delta\pi^a = \delta Q u^a$. Se suposa que $M(\tau)$, de quadrivelocitat u^a, està submergida en un bany tèrmic que intercanvia reversiblement calor amb la partícula. Si l'intercanvi de calor no és reversible, llavors $\delta\pi^a = (\delta Q, \delta\vec{\pi}) \neq \delta Q u^a$.

La segregació de $\delta\pi^a/\delta\tau$, efectuada sobre K^a, permet de formular l'equació (2) del moviment de $M(\tau)$, de la manera següent:

$$\frac{d}{d\tau}\left(M(\tau)u^a(\tau)\right) = \frac{\delta\pi^a}{\delta\tau} + K^a, \tag{4}$$

on K^a, atès que

$$\frac{dM}{d\tau} = -u_a\frac{\delta\pi^a}{\delta\tau},$$

queda reduïda a una típica força minkowskiana pura o propulsora $u_a K^a = 0$, com la descrita al final de l'apartat anterior.

Si s'accepta la llei de conservació de l'energia-moment lineal com a bàsica, l'equació (4) n'és un corol·lari. En efecte, sols cal efectuar el balanç d'energia-moment lineal experimentat per $M(\tau)$ durant $d\tau$, per obtenir:

$$d\left(M(\tau)u^a(\tau)\right) - \delta\pi^a = K^a d\tau,$$

on ha calgut ampliar l'abast de l'equació (1), introduint-hi l'energia-moment lineal transmès a $M(\tau)$ per la força minkowskiana pura K^a durant $d\tau$. I s'ha escollit com a conveni de signes positiu, el flux absorbit $+\delta\pi^a$ per $M(\tau)$ durant $d\tau$.

Anàlisi de les equacions del moviment de $M(\tau)$

En aquest apartat s'analitzarà l'equació del moviment de $M(\tau)$ i es demostrarà l'equivalència de la metodologia seguida amb la de W. G. Dixon.

Per començar, s'estudiaran les components de l'equació (4) segons la família dels successius referencials inercials $\Sigma(x^a(\tau))$, instantàniament en repòs amb $M(\tau)$, això és, segons un observador associat a la partícula $M(\tau)$. Matemàticament equival a projectar l'equació (4), primer en la direcció de u_a, i després segons un hiperplà ortogonal a u^a.

La component paral·lela a u^a s'obté multiplicant escalarment l'equació (4) per u^a. Si es tenen en compte les igualtats

$$u_a K^a = 0, \qquad u_a u^a = -1 \text{ i } \qquad u_a \frac{du^a}{d\tau} = 0,$$

resulta:

$$\frac{dM(\tau)}{d\tau} + u_a \frac{\delta\pi^a}{\delta\tau} = 0, \tag{5}$$

equació que representa la llei de conservació de l'energia en un sistema de coordenades adaptat a $M(\tau)$, és a dir, segons la família d'observadors inercials $\Sigma(x^a(\tau))$.

Per calcular les components ortogonals a u^a, això és, segons els hiperplans espacials de $\Sigma(x^a(\tau))$ que corresponen a les simultaneïtats de $M(\tau)$, sols cal aplicar a l'equació (4) el projector $h^a_b = \delta^a_b + u^a u_b$. En efecte, si es tenen en compte les igualtats següents:

$$h^a_b u^b = 0, \quad h^a_b \frac{du^b}{d\tau} = \frac{du^a}{d\tau} \quad \text{i} \quad h^a_b K^b = K^a,$$

s'obté fàcilment:

$$M\frac{du^a}{d\tau} - h^a_b \frac{\delta\pi^b}{\delta\tau} = K^a. \tag{6}$$

Quan l'equació (6) es refereix explícitament al sistema de coordenades adaptat, esdevé una equació intrínsecament trivectorial, atès que la component temporal, que correspon a l'índex $a = 0$, equival a la igualtat trivial $0 = 0$. En efecte, respecte a la família de referencials inercials $\Sigma(x^a(\tau))$, es verifica:

$$\frac{du^a}{d\tau} = (0, \vec{a}_0),$$

sent $\vec{a}_0$ l'acceleració pròpia de $M(\tau)$;

$$K^a = (0, \vec{F}_0),$$

sent $\vec{F}_0$ la triforça exterior;

$$h^a_b \frac{\delta\pi^b}{\delta\tau} = \left(0, (\frac{\delta\vec{\pi}}{\delta\tau})_0\right),$$

sent $\delta\vec{\pi}/\delta\tau)_0$ el trimoment lineal absorbit per $M(\tau)$ per unitat de temps propi. Per tant, és una triforça pura o propulsora, exercida pel flux $\delta\pi^a$ d'energia-moment lineal.

En resum, l'equació (6) es redueix a l'equació trivectorial:

$$M\vec{a}_0 - \left(\frac{\delta\vec{\pi}}{\delta\tau}\right)_0 = \vec{F}_0. \tag{7}$$

Tant per motius didàctics, com per la seva rellevància pràctica, seguidament es particularitzaran les equacions (5) i (7) del moviment de $M(\tau)$, per als tres tipus de flux $\delta\pi^a$, estudiats a l'apartat anterior.

1. Flux de partícules $\delta\pi^a/\delta\tau = v^a\delta m/\delta\tau$.

   Tenint en compte que:

   $$u_a v^a = (-1, 0) \cdot (\gamma(v_{rel}), \gamma(v_{rel})\vec{v}_{rel}) = -\gamma(v_{rel}),$$

   sent $\vec{v}_{rel}$ la trivelocitat relativa de δm respecte a $M(\tau)$, l'equació (5) s'expressa:

   $$\frac{dM}{d\tau} - \frac{\delta m}{\delta\tau}\gamma(v_{rel}) = 0, \tag{5.1}$$

   i l'equació (7) esdevé:

   $$M\vec{a}_0 - \frac{\delta m}{\delta\tau}\gamma(v_{rel})\vec{v}_{rel} = \vec{F}_0, \tag{7.1}$$

   ja que

   $$h^a_b v^b = v^a - u^a u_b v^b = (0, \gamma(v_{rel})\vec{v}_{rel}).$$

   L'equació (7.1), aplicada al cas d'un coet, se la coneix en la bibliografia especialitzada com a equació de Mescersky-Levi-Civita. En aquest cas, pel conveni de signes adoptat, s'ha de canviar el signe del terme del flux, ja que $M(\tau)$ l'emet en lloc d'absorbir-lo.

2. Flux de radiació electromagnètica $\delta\pi^a/\delta\tau = l^a\delta E_{rad}/\delta\tau$.

   Les equacions (5) i (7) esdevenen:

   $$\frac{dM}{d\tau} - \frac{\delta E_{rad}}{\delta\tau} = 0 \tag{5.2}$$

   $$M\vec{a}_0 - \frac{\delta E_{rad}}{\delta\tau}\hat{u}_r = \vec{F}_0, \tag{7.2}$$

   ja que $u_a l^a = -1$ i $h^a_b l^b = l^a - u^a u_b l^b = (0, \hat{u}_r)$.

3. Flux reversible de calor $\delta\pi^a/\delta\tau = u^a\delta Q\delta\tau$.

Atès que $u_a u^a = -1$ i $h^a_b u^b = 0$, les equacions (5) i (7) es redueixen a les següents:

$$\frac{dM}{d\tau} - \frac{\delta Q}{\delta\tau} = 0 \tag{5.3}$$

$$M\vec{a}_0 = \vec{F}_0. \tag{7.3}$$

Cal tenir molt present l'equació (7.3) en el desenvolupament de la termodinàmica relativista de l'equilibri, ja que, com queda palès, un flux reversible de calor no porta associada cap força de reacció. En conseqüència, en cap referencial inercial, l'efecte del flux calorífic pot contribuir al terme de treball del primer principi de la termodinàmica. Malgrat que en el present context aquesta conclusió és quasi òbvia, molts autors que tracten de la termodinàmica relativista de l'equilibri no la tenen en compte, fet que genera confusió i formulacions allunyades de l'esperit pràctic d'aquesta disciplina.

Resulta interessant, per finalitzar aquest apartat, deduir l'equivalència entre el formalisme desenvolupat i el de W. G. Dixon.

Les equacions (5) i (7) expliciten el fet que $\delta\pi^a$ té dos efectes ben diferenciats sobre $M(\tau)$. El primer, com reflecteix l'equació (5), quantifica la variació de massa pròpia $M(\tau)$ de la partícula. El segon efecte, com indica l'equació (7), solament actua si

$$h^a_b \frac{\delta\pi^b}{\delta\tau} \neq 0,$$

i contribueix a la variació de la quadrivelocitat de $M(\tau)$, tal com ho fa una força pura o propulsora. Matemàticament, aquesta partició de $\delta\pi^a$ es pot expressar mitjançant la igualtat següent:

$$\frac{\delta\pi^a}{\delta\tau} = -u^a u_b \frac{\delta\pi^b}{\delta\tau} + h^a_b \frac{\delta\pi^b}{\delta\tau} \equiv G u^a + h^a_b \frac{\delta\pi^b}{\delta\tau}, \tag{8}$$

on s'ha introduït la terminologia de W. G. Dixon:

$$G \equiv \frac{dM}{d\tau} = -u_b \frac{\delta\pi^b}{\delta\tau}.$$

En substituir la igualtat (8) en l'equació (4) del moviment de $M(\tau)$ i, tot seguit, agrupar els termes del segon membre en funció dels dos efectes abans esmentats, s'obté:

$$\frac{d}{d\tau}\left(M(\tau)u^a(\tau)\right) = \left(K^a - h^a_b \frac{\delta\pi^b}{\delta\tau}\right) + G u^a,$$

equació que, en referir-la a un referencial inercial arbitrari $\Sigma(t,\vec{r})$, no és sinó la descomposició (1 + 3)-dimensional de les equacions del moviment de $M(\tau)$ segons W. G. Dixon:

$$\frac{dE}{dt} = G + \vec{u}\cdot\vec{\mathcal{F}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\mathcal{F}} + G\vec{u},$$

on $\vec{\mathcal{F}}$ està unívocament definida per la igualtat:

$$K^a + h^a_b \frac{\delta\pi^b}{\delta\tau} = \gamma(u)(\vec{u}\cdot\vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{F}})$$

i inclou tant l'efecte de la força pura externa

$$K^a = \gamma(u)(\vec{u}\cdot\vec{F}, \vec{F})$$

com l'efecte de la força pura de reacció del flux d'energia-moment lineal $\delta\pi^a$

$$h^a_b \frac{\delta\pi^b}{\delta\tau} = \gamma(u)\left(\frac{\delta\pi^0}{\delta t} - G, \frac{\delta\vec{\pi}}{\delta t} - G\vec{u}\right).$$

Aplicacions del formalisme

Límit newtonià i l'efecte Poynting-Robertson

Estrictament, el límit newtonià sols es pot plantejar per a les equacions (5.1) i (7.1) corresponents a un flux de partícules, ja que en mecànica newtoniana no s'atribueix inèrcia a l'energia. Per tant, caldrà centrar-se en les equacions (5.1) i (7.1) que es reprodueixen a continuació:

$$\frac{dM}{d\tau} - \frac{\delta m}{\delta\tau}\gamma(v_{rel}) = 0 \tag{5.1}$$

$$M\vec{a}_0 - \frac{\delta m}{\delta\tau}\gamma(v_{rel})\vec{v}_{rel} = \vec{F}_0. \tag{7.1}$$

Cal recordar que aquestes equacions determinen l'evolució dinàmica de $M(\tau)$, quan està sotmesa a l'acció d'una força

$$K^a = (0, \vec{F}_0)$$

i a l'absorció d'un flux

$$\delta\pi^a = \delta m v^a = \delta m(\gamma(v_{rel}), \gamma(v_{rel})\vec{v}_{rel}),$$

segons la descriuen els observadors comòbils $\Sigma(x^a(\tau))$.

El límit newtonià s'obté fàcilment, efectuant el desenvolupament de $\gamma(v_{rel})$ i $d\tau$ fins als termes de primer ordre en la velocitat, altrament $\delta m\gamma(v_{rel}) = \delta m$ i $d\tau = dt$. Són aproximacions que equivalen a menysprear la inèrcia de l'energia cinètica, i reintroduir el temps absolut. En conseqüència, tenint present que l'acceleració i la força són invariants galileonewtonians, les equacions newtonianes del moviment de $M(t)$, referides a un referencial inercial arbitrari, són

$$\frac{dM}{dt} - \frac{\delta m}{\delta t} = 0 \tag{9.1}$$

$$M\vec{a} - \frac{\delta m}{\delta t}\vec{v}_{rel} = \bar{F}. \tag{9.2}$$

Cal remarcar que la llei de conservació de l'energia, equació (5.1), s'ha transformat en la llei de conservació de la massa, equació (9.1), això és, $dM = \delta m$ (absorció), $dM = -\delta m$ (emissió).

En alguns casos pràctics, com per exemple l'estudi de la dinàmica d'un coet, els paràmetres bàsics de control són dM/dt i $\vec{v}_{rel}$. Per tant, l'equació (9.2) està adaptada a les dades, llevat que cal canviar el signe corresponent al terme del flux, atès que un coet perd/emet un flux màssic:

$$M\vec{a} = \vec{F}_0 + \frac{dM}{dt}\vec{v}_{rel},$$

on $\vec{F}_0$ és la força gravitatòria, més la de la resistència de l'aire, i $+dM/dt(\vec{v}_{rel})$ és la força propulsora de reacció dels gasos de combustió. Tanmateix, en altres casos, la dada immediata no és la $\vec{v}_{rel}$ de δm respecte a $M(t)$, sinó la velocitat $\vec{v}$ de δm respecte a un referencial inercial Σ. Si la velocitat de $M(t)$ respecte a Σ és $\vec{u}(t)$, llavors $\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{u}$, i l'equació (9.2) es pot expressar de la manera següent:

$$\frac{d}{dt}\left(M(t)\vec{u}(t)\right) - \frac{dM}{dt}\vec{v} = \vec{F}. \tag{9.3}$$

Un cas típic d'aplicació de l'equació (9.3), el constitueix l'estudi de la dinàmica d'una gota d'aigua que cau en un ambient quiet i saturat de vapor d'aigua, mentre que respecte al referencial de l'ambient $\vec{v} = 0$.

La formulació (9.3) de l'equació del moviment de $M(t)$ és emprada pels astrofísics per descriure el moviment d'una partícula de pols còsmica sotmesa a la radiació solar. És l'efecte conegut com a Poynting-Robertson, que tot seguit es resumirà, tenint present que, en aquest context newtonià, s'ha de forçar la introducció de la inèrcia de la radiació de l'energia solar.

Si $\dot{E}$ és la potència total radiada pel Sol per unitat d'angle sòlid, el flux de radiació incident sobre la partícula $M(t)$, que està a una distància r del centre del Sol és $\dot{E}A/4\pi r^2$, on A és la secció transversal de la partícula segons un pla perpendicular a la recta que uneix el Sol amb la partícula. Llavors l'increment de $M(t)$ és:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\dot{E}A}{4\pi r^2}.$$

Si es té present que la velocitat $\vec{v}$ de la radiació és igual al vector unitat $\hat{u}_r = \vec{r}/r$, (c = 1), l'equació (9.3) s'expressa:

$$\frac{d}{dt}\left(M(t)\vec{u}(t)\right) - \frac{\dot{E}A}{4\pi r^2}\hat{u}_r = -\frac{GM_\odot M(t)}{r^2}\hat{u}_r,$$

o bé:

$$M(t)\frac{d\vec{u}}{dt} = -\left(GM_\odot M(t) - \frac{\dot{E}A}{4\pi}\right)\frac{\hat{u}_r}{r^2} - \frac{\dot{E}A}{4\pi r^2}\vec{u},$$

on $M_\odot$ és la massa del Sol, i G la constant gravitatòria.

En general, com que la força radial és la dominant, l'efecte de la pressió de radiació redueix l'atracció solar, per bé que, sobreposada a aquest efecte, hi ha una petita força efectiva en la direcció de $-\vec{u}$, que ocasiona un moviment en espiral cap al Sol. Es proposa al lector interessat, la deducció d'aquestes equacions, però a partir de les equacions relativistes (5.2) i (7.2).

Coet de propulsió fotònica *versus* estàndard

En aquest darrer exemple, s'aplicaran les equacions del moviment de $M(\tau)$ per tal de comprovar l'eficiència relativa d'un coet que pot ser propulsat per dos tipus de motors. Es consideraran motors estàndard en front de motors fotònics.

Encara que un flux de fotons és més bon propulsor que un flux de gasos estàndard, veurem que l'ús de motors fotònics no és suficient per als viatges intergalàctics, suposant fins i tot solucionats els problemes tecnològics. Aquest fet, l'haurien de tenir present els autors seriosos de ciència-ficció, en les novel·les dels quals proliferen les naus amb propulsió fotònica.

Substituint l'equació (5) en l'equació (7), per als dos tipus de flux, s'obté l'equació del moviment del coet respecte als referencials comòbils $\Sigma(x^a(\tau))$:

1. Coet amb motors estàndard:

$$M(\tau)\vec{a}_0(\tau) - \frac{dM}{d\tau}\vec{v}_{rel} = \vec{F}_0. \tag{10.1}$$

2. Coet amb motors fotònics:

$$M(\tau)\vec{a}_0(\tau) - \frac{dM}{d\tau}\hat{u}_r = \vec{F}_0. \tag{10.2}$$

Per simplificar l'anàlisi es considerarà el coet en l'espai interestel·lar, fet que permet suposar $\vec{F}_0 = 0$. Per tant, es redueix a un problema de moviment unidimensional, per exemple, segons l'eix x. Si $\vec{v}_{rel} = -v_{rel}\hat{\imath}$ i $\hat{u}_r = -\hat{\imath}$, i es reintrodueix en (10.2) la velocitat de la llum c en el buit, les equacions (10.1) i (10.2) esdevenen:

1. Coet amb motors estàndard:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{a_0}{v_{rel}}d\tau. \tag{11.1}$$

2. Coet amb motors fotònics:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{a_0}{c}d\tau. \tag{11.2}$$

El quocient d'aquestes dues equacions permet comparar les despeses de massa dels dos coets, quan tenen la consigna d'assolir un increment idèntic de velocitat $a_0 d\tau$:

$$\frac{(\delta M)_{est\grave{a}ndard}}{(\delta M)_{fot\grave{o}nic}} = \frac{c}{v_{rel}} \sim 10^4, \tag{9}$$

on s'ha tingut en compte que la velocitat d'ejecció dels gasos de la combustió d'un coet estàndard és de l'ordre de 10^4 ms^{-1}. En conseqüència, un coet propulsat mitjançant un gas de fotons, té una despesa de massa deu mil vegades inferior a un coet estàndard. Aquest resultat situa els coets fotònics com a bons candidats per al disseny de naus espacials, però probablement no és suficient, com seguidament s'explicarà.

Per a l'anàlisi que segueix, és convenient transformar les equacions a un referencial inercial arbitrari, respecte al qual el coet es desplaça amb una velocitat u diferent de zero.

Atès que la llei de transformació de l'acceleració del moviment unidimensional és $a_0 = \gamma^3(u)a$ i que $dt = \gamma(u)d\tau$, les equacions (11.1) i (11.2) s'expressen:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{du}{v_{rel}(1-u^2/c^2)} \qquad (13.1)$$

$$\frac{dM}{M} = -\frac{du}{c(1-u^2/c^2)}. \qquad (13.2)$$

La integració de les equacions (13) permet deduir el quocient $R(t) = M(t)/M(0)$ de la massa pròpia final respecte a la inicial:

1. Coet amb motors estàndard:

$$R(t) \equiv \frac{M(t)}{M(0)} = \left(\frac{1+u/c}{1-u/c}\right)^{-c/2v_{rel}}.$$

2. Coet amb motors fotònics:

$$R(t) \equiv \frac{M(t)}{M(0)} = \left(\frac{1+u/c}{1-u/c}\right)^{-1/2}.$$

Un paràmetre més significatiu que la velocitat u, és el factor $\gamma(u)$ de dilatació temporal, respecte al qual les equacions anteriors s'expressen de la manera següent:

1. Coet amb motors estàndard:

$$R(t) = \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2-1}\right)^{c/v_{rel}}. \qquad (14.1)$$

2. Coet amb motors fotònics:

$$R(t) = \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2-1}\right). \qquad (14.2)$$

Aquestes equacions proporcionen uns factors de dilatació temporal $\gamma(u)$ massa petits per ser sensibles als viatgers intergalàctics. En efecte, àdhuc per al coet amb motors fotònics, l'equació (14.2) implica uns resultats gens prometedors per a uns γ rellevants:

$$\gamma = 50 \qquad R = 0,010$$

$$\gamma = 90 \qquad R = 0,006\,.$$

En conseqüència, ja en la primera fase del viatge, haurien d'esgotar pràcticament tota la massa de la nau! Resulta evident que els autors de ciència-ficció haurien de preveure l'existència d'estacions de proveïment matèria/antimatèria per tal d'alimentar els motors fotònics. I no cal ni esmentar els coets de combustible estàndard, que no podrien assolir aquests factors γ, malgrat que empressin la massa biològica de la tripulació. Finalment, cal tenir present que si els coets tinguessin la consigna d'efectuar un moviment d'acceleració a_0 constant, això és, de descriure una línia de món hiperbòlica, les equacions (13.1) i (13.2) s'integren immediatament:

1. Coet amb motors estàndard:

$$R(\tau) = e^{-a_0\tau/v_{rel}}.$$

2. Coet amb motors fotònics:

$$R(\tau) = e^{-a_0\tau/c}.$$

Per tant, les constants de «desintegració» dels coets són:

$$\tau_{estàndard} = \frac{v_{rel}}{a_0}$$

$$\tau_{fotònic} = \frac{c}{a_0}.$$

En conseqüència, la «vida mitjana» del coet fotònic és de l'ordre de 10^4 vegades més gran que la del coet estàndard:

$$\frac{\tau_{fotònic}}{\tau_{estàndard}} = \frac{c}{v_{rel}} \sim 10^4.$$

Referències

ARZELIES, H., *La Dynamique Relativiste et ses Applications*, Fascicule II, Gauthier-Villars (París, 1958).

DIXON, W. G., *Special Relativity. The Foundations of Macroscopic Physics*, University Press (Cambridge, 1978).

LLOSA, J. i MOLINA, A., *Relativitat Especial i Electrodinàmica Clàssica*, Universitat de Barcelona (Barcelona, 1997).

LOBO, J. A., On the dynamics of the unidimensional spaceship, *Eur. Journal of Physics*, **8**, 138, (1987).

MÖLLER, C., *The Theory of Relativity*, Second Ed. Oxford University Press (Oxford, 1978).

RINDLER, W., *Introduction to Special Relativity*, Clarendon Press (Oxford, 1991).

SOMMERFELD, A., *Mechanics*, Lectures on Theoretical Physics, vol. 1 pàg. 28, Academic Press (1952).