

# Pèndol físic, teorema de Steiner i moments d'inèrcia

Antonio J. Barbero\* i Gonzalo Vergara†

## Introducció

El pèndol constitueix un sistema àmpliament estudiat i està inclòs a la majoria dels programes de física general dels estudiants universitaris. En la bibliografia recent de física general, fins i tot tenint en compte únicament els aspectes docents, hi ha una àmplia varietat de treballs relatius a sistemes de pèndol que tenen el propòsit de posar de manifest aspectes que poden ser utilitzats com a fils conductors per a l'aprenentatge (Cromer, 1995; Giltinan, Wagner i Walkiewicz, 1996). Molts dispositius basats en pèndols són objecte d'usos molt diversos, no tan sols pel que fa a mesures de temps gràcies al caràcter periòdic del seu moviment, sinó també pel que fa a aplicacions tecnològiques avançades com poden ser els sistemes d'amortidors de massa sintonitzats a les torres de suport de les grans estructures d'enginyeria civil, com el pont més llarg del món que es construeix actualment al Japó (Kashima i Kitagawa, 1998). Sembla evident que l'estudi del pèndol físic al laboratori constitueix una activitat necessària per entendre els fonaments d'una part important de la mecànica, les oscil·lacions, i en aquest treball ens proposem exposar un procediment senzill i amb equipament senzill per aconseguir aquest objectiu.

## El pèndol físic

Un pèndol físic és un sòlid rígido de forma arbitrària que pot oscil·lar en un pla vertical al voltant d'un eix perpendicular al mateix pla. El punt d'intersecció de l'eix amb el pla esmentat és el punt de suspensió. La posició d'equilibri és aquella en què el centre de masses del sòlid rígido és a la mateixa vertical i per sota del punt de suspensió. Quan el pèndol se separa de la seva posició d'equilibri un angle  $\theta$  apareix un moment de forces recuperador respecte al punt de suspensió que tendeix a restaurar la posició d'equilibri, i que constitueix l'origen del moviment oscil·latori del pèndol (Fishbane, Gasiorowicz i Thornton, 1993; Berdford i Fowler, 1996). Amb la notació emprada a la figura 1 aquest moment

\* Antonio Juan Barbero (Cartagena, 1957) és doctor en Ciències Físiques (1994) i actualment professor titular en el Departamento de Física Aplicada. E. T. S. Ingenieros Agrónomos, Universidad de Castilla-La Mancha.

† Gonzalo Vergara (Albacete, 1969) és llicenciat en Ciències Físiques (1995) i actualment realitza un màster europeu sobre polímers.

recuperador  $\vec{\tau}$  s'expressa com:

$$\vec{\tau} = m\vec{d} \times \vec{g}, \quad (1)$$

on  $m$  és la massa del sòlid rígido,  $\vec{d}$  és la distància del centre de masses (CM a partir d'ara) a l'eix de gir i  $\vec{g}$  és l'acceleració de la gravetat. La relació entre el moment recuperador, l'acceleració angular i la inèrcia del sòlid s'expressa a través de l'equació fonamental de la dinàmica de rotació:

$$\tau = I\alpha, \quad (2)$$

on  $I$  és el moment d'inèrcia del pèndol respecte a l'eix perpendicular que conté el punt de suspensió  $O$ , i  $\alpha$  és la seva acceleració angular.

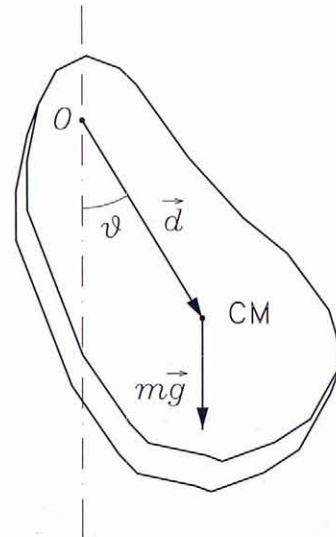


Figura 1: Sòlid pla com a exemple de pèndol físic. El punt de suspensió  $O$  és a una distància  $\vec{d}$  del CM. El vector  $\vec{d}$  forma un angle  $\theta$  amb la vertical

Qualsevol tractament del problema del pèndol en general requereix considerar dos aspectes importants: els efectes de l'amplitud de l'oscil·lació i els efectes del fregament.

En absència de fregament, en igualar les equacions (1) i (2) podem escriure:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \sin\theta = 0 \quad (3)$$



L'equació (3) descriu un moviment periòdic, però no harmònic simple, el període del qual depèn de l'amplitud  $\theta_0$  del moviment (Tipler, 1992):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \left[ 1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right] \quad (4)$$

Si en l'equació (3) es consideren oscil·lacions prou petites, el terme  $\sin \theta$  pot substituir-se per l'angle  $\theta$  i l'equació completa pot substituir-se per l'equació aproximada (3a), que correspon a un moviment harmònic simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0 \quad (3a)$$

El període d'oscil·lació corresponent és ara el de l'oscil·lador harmònic simple donat per l'equació (4a):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (4a)$$

S'ha d'assenyalar que, en aquest context, *oscil·lacions prou petites* vol dir que el període aproximat difereix del període exacte en menys d'un percentatge preestablert. Així, quan l'amplitud del moviment  $\theta_0$  és menor de  $15^\circ$ , el període donat per l'equació (4a) varia menys del 0,5% del període exacte calculat per l'equació (4) (Resnick i Halliday, 1980).

Respecte a la influència del fregament, és prou sabut que el seu efecte consisteix en una disminució progressiva de l'amplitud. Si es té en compte la mida finita de la regió de suspensió, la freqüència angular és diferent a la que correspon a l'equació (3), i el període expressat per l'equació (4) requereix certes correccions. En el cas particular d'una regió de suspensió del tipus anell oscil·lant sobre cilindre, el fregament provoca una ascensió addicional del centre de masses degut al fet que durant l'oscil·lació es produeix rodament. Per a rodament sense lliscament, Cromer (1995), i independentment Giltinan *et al.* (1996), obtenen per mètodes diferents una correcció del període d'aproximadament un 1%. En el nostre cas, les mesures del període s'han pres per a amplituds sempre inferiors a  $15^\circ$ , i s'han negligit els efectes del fregament.

L'equació (4a) ens servirà per determinar el valor de l'acceleració de la gravetat  $g$  i per comprovar el teorema de Steiner i l'additivitat dels moments d'inèrcia.

### Muntatge experimental

El pèndol utilitzat consisteix en una vareta de fusta uniforme i prima de longitud  $L = (1.800 \pm 1)$  mm, en què s'han fet petits forats que serveixen de punts de suspensió, tal com es mostra a la figura 2. Els forats, fets amb una broca de 3 mm, estan alineats segons l'eix vertical de la vareta i la separació dels seus centres és de  $(50 \pm 1)$  mm. El forat superior i l'inferior estan a

$(50 \pm 1)$  mm de l'extrem respectiu de la vareta. El sistema de suspensió consisteix en un clau d'acer sense cap amb un diàmetre lleugerament inferior al diàmetre dels forats, clavat perpendicularment sobre un suport vertical fix. Hi ha prou amplitud per permetre un nombre d'oscil·lacions bastant gran abans que l'amortiment reduïxi ostensiblement l'amplitud (no s'aprecien disminucions importants abans de les 25 oscil·lacions). Per iniciar el moviment se separa lleugerament el pèndol de la posició d'equilibri (pot fer-se una marca auxiliar en el muntatge per indicar l'angle de  $15^\circ$  amb la vertical com a referència) vigilants que la vareta no se separi del pla vertical, perquè si se separés es produiria un vinclement que falsejaria les mesures. Tot i la simplicitat del sistema, les mesures de període es poden reproduir, de manera que en el nostre laboratori aquest muntatge s'utilitza com a pràctica d'alumnes. (Com a suggeriment pràctic convé assenyalar que proveir-se d'aquest material encarregant-lo en una fusteria és tan fàcil i barat que es pot programar una sessió de laboratori multiplicant els llocs de treball per molt pocs diners, sempre escassos en els pressupostos docents.)

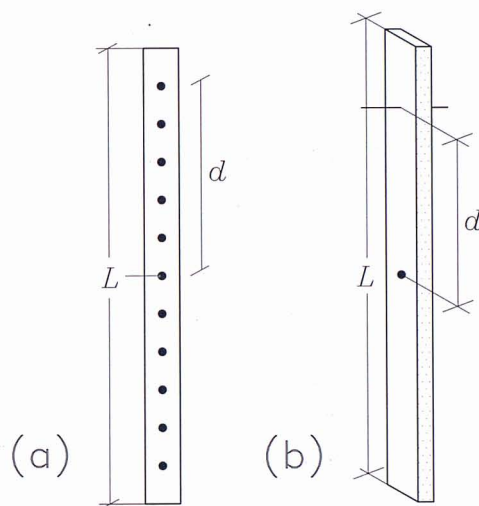


Figura 2: Vareta prima de longitud  $L$ . a) Vista frontal. Els forats, representats amb punts, estan separats 5 cm entre si, i l'inferior i el superior estan a 5 cm dels extrems de la vareta. b) Vista lateral. La distància entre el punt de suspensió i CM és  $d$

### Verificació experimental del teorema de Steiner

Amb les mesures del període d'oscil·lació del pèndol físic es pot provar la validesa del teorema de Steiner. Segons aquest teorema, el moment d'inèrcia d'un sòlid rígid de massa  $m$  respecte a un punt situat a una distància  $d$  del CM pot expressar-se en funció del moment d'inèrcia respecte al centre de masses  $I_{CM}$ :

$$I = I_{CM} + md^2. \quad (5)$$



D'altra banda, podem reescriure l'equació (4a) de la manera següent:

$$I = \frac{g}{4\pi^2} m d T^2. \quad (6)$$

En combinar les equacions (5) i (6) aplicades a dos punts de suspensió qualssevol  $i, j$  per als quals haguem mesurat el període d'oscil·lació, obtenim la relació:

$$D_j T_j^2 - d_i T_i^2 = \frac{4\pi^2}{g} (d_j^2 - d_i^2). \quad (7)$$

és a dir, la representació gràfica del factor  $d_j T_j^2 - d_i T_i^2$  enfront de  $d_j^2 - d_i^2$  ha de ser una línia recta si s'acompleix el teorema de Steiner. En la figura 3 s'han representat les mesures realitzades al nostre laboratori, que efectivament s'ajusten de manera molt estreta a l'equació (7). En aquestes mesures es mesurà el període d'oscil·lació del pèndol respecte a cada forat com a punt de suspensió, i s'ha pres com a punt de referència per construir el gràfic de la figura 3 el sisè forat ( $j = 6$ ). Els períodes es van determinar prenent la mitjana de 10 conjunts de 10 oscil·lacions respecte a cada punt de suspensió, per a la qual cosa es va utilitzar un cronòmetre capaç d'apreciar 0,01 s.

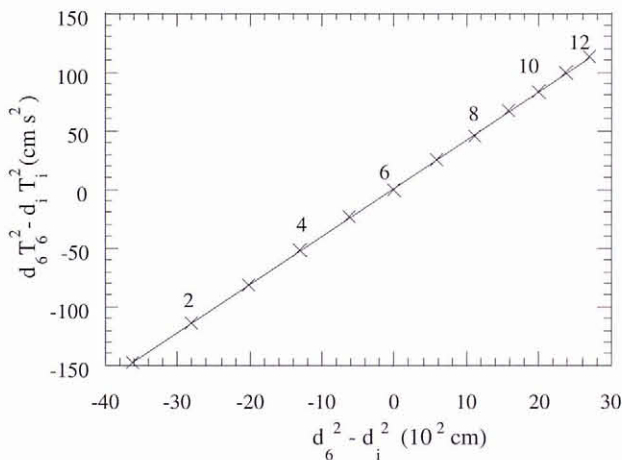


Figura 3: Verificació experimental del teorema de Steiner. El punt de referència és  $j=6$ . La línia contínua és la representació gràfica de l'equació (7). Les creus representen les mesures experimentals utilitzant els forats de la vareta com a centre de suspensió, començant pel més proper a l'extrem superior de la vareta (s'han numerat els forats parells,  $i = 2, 4, 6...$ )

Un avantatge d'aquest procediment de verificació del teorema de Steiner és que no cal mesurar la massa del pèndol físic utilitzat (qüestió que pot resultar enutjosa a causa de les dimensions de la vareta), sinó únicament mesures de longituds i temps.

## Mesura de l'acceleració de la gravetat

El període d'oscil·lació de la vareta utilitzada com a pèndol simple respecte a un punt de suspensió arbitrari a la distància  $d$  del CM es pot expressar utilitzant les equacions (4a) i (5) com:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left( \frac{L^2}{12d} + d \right)} \quad (8)$$

Això també es pot escriure com el període d'un pèndol simple de longitud equivalent  $k$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k}{g}} \quad (9)$$

on  $k = L^2/(12d) + d$ .

D'aquesta manera, si representem els valors de  $k$  enfront del quadrat del període d'oscil·lació ( $T^2$ ), els punts experimentals s'ajustaran en teoria a una recta que té un pendent  $g/(4\pi^2)$ . Utilitzant el mètode de mínims quadrats i les mesures del període realitzades al laboratori (les mateixes utilitzades per construir el gràfic de la figura 3) s'obté el valor  $g = 10,08$  m/s<sup>2</sup>. Aquesta mesura pot semblar una mica allunyada del valor real;<sup>1</sup> però si tenim en compte que la representació gràfica de  $k$  enfront de  $T^2$  ha de passar per l'origen de coordenades (fet que correspon a extrapolar fins a un pèndol de longitud nul·la) i incloem el punt (0,0) en l'ajustament, llavors el valor de la gravetat obtingut és  $g = 9,76$  m/s<sup>2</sup>, que difereix del valor real menys de l'1%. La representació gràfica corresponent és la de la figura 4. La raó que la diferència sigui més gran quan no s'inclou l'origen de coordenades és que cal prendre les mesures necessàriament en un rang de longituds imposat per la semilongitud  $L/2$  de la vareta (90 cm en el nostre cas): això implica que l'interval de períodes mesurat és relativament petit, i qualsevol error sistemàtic (com l'originat, per exemple, per una petita flexió de la vareta en sentit anteroposterior o un alineament dels forats que no coincideixi exactament amb l'eix) produeix una desviació comparativament important en el resultat.

## Comprovació de l'additivitat dels moments d'inèrcia

L'additivitat dels moments d'inèrcia es pot verificar amb el nostre dispositiu. Afegim al pèndol de la figura 2 una altra vareta del mateix material però d'una longitud menor  $l = xL$ , ( $0 < x < 1$ ), de manera que quedi superposada al CM simètricament i tot al llarg de la vareta principal. Els moments d'inèrcia de la vareta curta  $i$  i de la vareta llarga  $I$ , mesurats tots dos respecte al punt de suspensió, són respectivament:

$$i = xm \left( \frac{L^2}{12} x^2 + d^2 \right) \quad (10)$$

<sup>1</sup>El valor de la gravetat a la ciutat d'Albacete és de  $9,801 \pm 0,001$  m/s<sup>2</sup>.

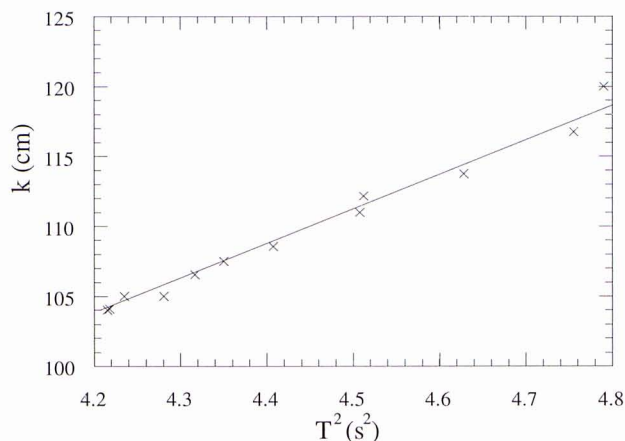


Figura 4: Mesura de  $g$  segons l'equació (9). Línia contínua: ajustament de les dades per mínims quadrats; les creus corresponen a les mesures experimentals. S'ha inclòs el punt  $(0,0)$  en l'ajustament (encara que aquest no apareix en aquesta figura per destacar l'interval de valors de període on s'han realitzat les mesures), i amb això es passa d'obtenir el valor  $10,08 \text{ m/s}^2$  a obtenir  $g = 9,76 \text{ m/s}^2$

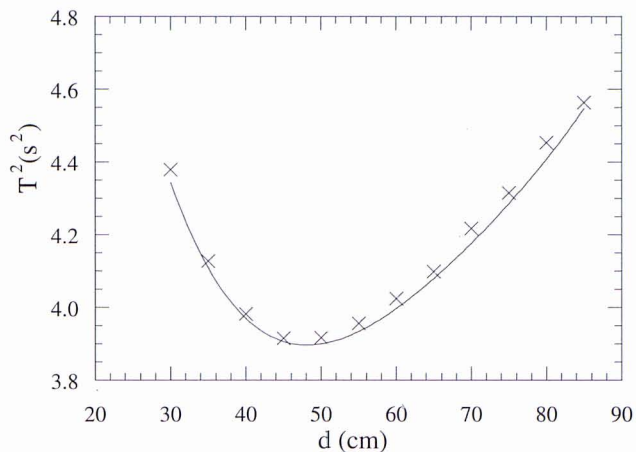


Figura 5: Additivitat dels moments d'inèrcia. Es representen els quadrats del període experimental ( $\times$ ) i els valors teòrics (línia contínua) donats per l'equació (12) per al conjunt de dues varetes enfront de la distància al punt de suspensió  $d$ . La fracció de longitud de la vareta curta respecte a la llarga és  $x = 1/6$ . (S'ha pres com a valor de la gravetat la mesura realitzada en l'apartat anterior  $g = 9,76 \text{ m/s}^2$ )

i

$$I = m \left( \frac{L^2}{12} + d^2 \right) \quad (11)$$

Si suposem que el moment d'inèrcia del sistema de dues varetes és la suma dels moments d'inèrcia de cada una, i si tenim en compte que la massa total del conjunt de les dues varetes és  $m(1+x)$ , podem comparar l'equació (4a) amb la suma de les equacions (10) i (11) per obtenir que el període d'oscil·lació del sistema (vareta llarga + vareta curta) ha de complir la relació:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \left( \frac{L^2}{12d} (1-x+x^2) + d \right) \quad (12)$$

En la figura 5 es compara el període experimental obtingut amb el període teòric predit per l'equació (12). La vareta curta afegida sobre la llarga tenia una longitud de 30 cm, cosa que significa que el factor  $x = 1/6$ . La proximitat dels punts experimentals a la corba constitueix una adequada verificació quantitativa de l'additivitat dels moments d'inèrcia.

## Referències

- BEDFORD, A. i FOWLER, W., *Dinámica (Mecánica para ingeniería)*, 484-489, Addison-Wesley Iberoamericana (1996).
- CROMER, A., Many oscillations of a rigid rod, *American Journal of Physics*, **63**, 112-121 (1995).
- TIPLER, P., *Física*, vol. I, 384-385, Reverté (Barcelona, 1992).
- FISHBANE, P. M., GASIOROWICZ, S. i THORNTON, S. T., *Física para ciencias e ingeniería*, vol. I, 393-395, Prentice-Hall (Mèxic, 1993).
- GILTINAN, D. A., WAGNER, D. L. i WALKIEWICZ, T. A., The physical pendulum on a cylindrical support, *American Journal of Physics*, **64**, 144-146 (1996).
- KASHIMA, S. i KITAGAWA, M., El puente colgante más largo del mundo, *Investigación y Ciencia*, 54-60 (febrer 1998).
- RESNICK, R. i HALLIDAY, D., *Física (Parte 1)*, CECSA (Mèxic, 1980), 323-324.