Una anàlisi dels fonaments dinàmics de la termodinàmica relativista de l'equilibri

Josep Graells*i Carme Martín Torres†

Introducció

> "Una teoria és més impressionant com més gran és la simplicitat de les seves premisses, com més coses diverses relaciona i com més extensa és la seva àrea d'aplicació. Aquí rau la impressió profunda que la termodinàmica clàssica m'ha provocat. És l'única teoria física de contigut universal que, dins del camp d'aplicabilitat dels seus conceptes bàsics, no serà mai derrocada."
>
> Albert Einstein (1949)

Sols cal fer una ràpida consulta a l'abundant i extensa bibliografia sobre el món relativista per adonar-se que la termodinàmica relativista de l'equilibri ha estat objecte de poc interès. Fins a la dècada dels seixanta les contribucions dels reconeguts autors que varen tractar aquesta temàtica, per exemple R. C. Tolman, W. Pauli, etc., es caracteritzaven per reproduir els resultats obtinguts el 1907 per M. Planck i A. Einstein. Això no obstant, a començaments dels seixanta H. Ott i H. Arzelies, ambdós independentment, varen publicar els primers treballs crítics sobre els fonaments de la termodinàmica relativista.

Inicialment aquests treballs varen generar bastant d'interès, i donaren lloc a controvèrsies que el decurs del temps ha anat apaivagant, i avui dia s'ha arribat a una situació en què no hi ha un consens respecte a la formulació detallada de la termodinàmica relativista de l'equilibri. Així, actualment coexisteixen una gran diversitat d'enfocaments quant a la formulació, en un referencial inercial arbitrari, de les pròpies lleis de la termodinàmica i de les corresponents transformacions de les magnituds bàsiques, per exemple calor, temperatura, potencials termodinàmics, etc.

No deixa de ser sorprenent que es pugui donar, en un domini no fronterer de la física, una situació com l'exposada, fet que estimem que justifica una reflexió i anàlisi de les seves causes.

C. Möller, en la dècada dels setanta, va intentar d'explicar aquesta situació. Segons Möller, el principi de la relativitat especial és compatible amb diverses formulacions de la termodinàmica relativista, ja que tan sols requereix que les lleis de la termodinàmica clàssica siguin vàlides en el referencial inercial en repòs instantani amb el sistema termodinàmic, cosa que obre un ventall de possibilitats per a la formulació de les lleis en qualsevol altre referencial inercial. En relativitat general s'eludeix aquesta problemàtica, ja que és pràctica habitual i generalitzada definir les magnituds termodinàmiques en el referencial propi del sistema. Per exemple, Misner, Thorne i Wheeler, en el seu conegut tractat, *Gravitation*, adopten aquesta posició: "...totes les lleis de la termodinàmica es formulen com a equacions escalars que relacionen les variables que es mesuren en el referencial en repòs en el medi...". Aquesta elecció pot semblar que contradiu el principi de la relativitat especial ja que selecciona una classe especial d'observadors. Però no hi ha una tal violació, ja que aquests observadors, això és, els propis del sistema, es defineixen i caracteritzen d'una manera completament invariant.

En aquest article es farà una breu anàlisi dels fonaments de la termodinàmica dins del context de la relativitat especial, i s'intentarà de justificar per què l'enfocament proposat per H. Ott, H. Arzelies i C. Möller és el que considerem més pràctic i alhora més coherent amb l'esperit relativista.

Atès que el treball efectuat sobre el sistema termodinàmic té un paper essencial, ens obligarà a recordar i precisar, dins del domini de la relativitat especial, el concepte i la magnitud força. Per fer-ho es considera pertinent seguir W. G. Dixon, diferenciant les anomenades forces pures o propulsores, caracteritzades perquè no fan variar la massa pròpia, de les forces impures, que sí que ho fan. En el nucli del problema es localitza la definició de la magnitud força, i en tocar aquests temes si no s'és acurat en diferenciar les diverses definicions, moltes vegades implícites, emprades pels diversos autors, es corre el risc de caure en un terreny ple de confusions i paranys lògics. La termodinàmica relativista és un exemple clar de confusionisme d'aquest tipus, que aquest article té per objectiu evidenciar, per tal de poder-ho superar.

*Josep Graells (Cervera, 1946) és Pèrit Industrial Elèctric per l'Escola d'Enginyeria Tècnica Industrial de Terrassa (1967) i és doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1978).

†Carme Martín (Barcelona, 1950) és doctora en Física per la Universitat de Barcelona (1981) i professora del col·legi "La Salle Gracia".

Lleis de conservació. Vector energia–moment lineal calorífic

L'objectiu d'aquest apartat i de l'apèndix és exposar un breu resum de la dinàmica per tal de facilitar el desenvolupament termodinàmic que es realitzarà en la resta de l'article i, al mateix temps, fixar els conceptes i la nomenclatura que s'empraran.

En tot el domini de la física i en el de la dinàmica en particular, les lleis de conservació hi tenen una significació fonamental. Des d'un punt de vista teòric estan directament relacionades amb les simetries, tant les externes o cinemàtiques (espaciotemporals), com les internes (essencialment quàntiques). I, des d'un punt de vista pràctic, faciliten extraordinàriament el disseny correcte d'aparells i la solució de problemes difícils.

Per tal de fixar les idees considerem un sistema de partícules aïllat, és a dir, que no interactua amb la resta de l'Univers. Llavors, en mecànica newtoniana, la massa total del sistema roman constant en el temps, això és, es conserva. Si, a més a més, les col·lisions entre les partícules són elàstiques, també es conserva l'energia cinètica total. Les dues lleis de conservació restants són les del moment lineal i moment angular.

Les lleis de conservació newtonianes es poden formular respecte a un referencial inercial Σ, de la manera següent:

Massa	$\Sigma m_i =$ constant
Moment lineal	$\Sigma m_i \vec{u}_i =$ constant
Moment angular	$\Sigma \vec{r}_i \times m_i \vec{u}_i =$ constant
Energia cinètica	$\Sigma \frac{1}{2} m_i \vec{u}_i^2 =$ constant
(Col·lisions elàstiques)	

On m_i i $\vec{u}_i$ representen la massa i la velocitat de la partícula i-èsima.

El primer principi de la termodinàmica no és sinó el principi de conservació de l'energia total de qualsevol sistema físic. Per tant, en l'estructura newtoniana conviuen separadament les lleis de conservació de la massa i la llei de conservació de l'energia total.

Les lleis de la física newtoniana són independents del referencial inercial en què s'expressin, sempre que les mesures de les magnituds es relacionin mitjançant les lleis de transformació de Galileu. Per concretar el que s'acaba d'exposar, si el referencial inercial $\Sigma'(t', x', y', z')$ es desplaça respecte al $\Sigma(t, x, y, z)$ en la direcció de l'eix x amb velocitat $\vec{v} = (v, 0, 0)$ i s'acorda posar a zero els rellotges d'ambdós referencials quan els seus orígens coincideixen, llavors la coneguda relació galileiana entre els dos referencials és

$$t' = t; \qquad x' = x - vt; \qquad y' = y; \qquad z' = z.$$

La física newtoniana es pot considerar, en el domini de les velocitats petites respecte a la velocitat de la llum en el buit c, una bona aproximació pràctica a la física relativista. Altrament, i sense entrar en reflexions epistemològiques relacionades amb el canvi de paradigme, s'ha de verificar la desigualtat $v/c \ll 1$. Si no es compleix $v/c \ll 1$, llavors cal substituir el grup de transformacions de Galileu pel de Lorentz, que amb la mateixa disposició d'eixos dels referencials d'abans, i designant $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, adopta l'expressió:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x); \qquad x' = \gamma(x - \beta ct)$$
$$y' = y; \qquad z' = z.$$

Per tant, en la física relativista les coordenades d'espai i de temps estan interrelacionades, fet del qual s'infereix una unificació de l'espai tridimensional i del temps en un continu absolut quadridimensional anomenat espaitemps de Minkowski. Per tal que aquest article sigui tan autocontingut i didàctic com sigui possible, en l'apèndix s'exposa un breu resum de les fórmules de la relativitat especial, que s'empraran més endavant, dins el context de l'espaitemps minkowskià. En l'apèndix es recorda que en la relativitat especial les magnituds energia i moment lineal, per a una partícula, es representen pel següent vector quadridimensional:

$$p^a = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = (m\gamma(u)c, m\gamma(u)\vec{u}),$$

sent m la massa mesurada en el referencial Σ_0, propi de la partícula, que, per tant, es correspon amb la massa newtoniana.

Sota l'acció del grup de Lorentz les quatre components (energia-moment) de p^a es transformen com ho fan les coordenades $x^a = (ct, \vec{r})$. D'aquesta unificació s'infereix que la massa esdevé una forma més de manifestació d'energia, fet del qual simètricament es dedueix la inèrcia de l'energia. Les lleis de conservació de l'energia i del moment lineal s'unifiquen en la llei de conservació del quadrivector energia-moment lineal, és a dir, la suma dels quadrimoments de totes les partícules abans d'una interacció és igual a la suma dels quadrimoments de les partícules resultants després de la interacció (la col·lisió pot ser o no elàstica, i pot haver-hi més o menys partícules després de la interacció). La massa en repòs m és un invariant, de manera que tots els observadors estan d'acord amb el seu valor al llarg de la història de la partícula, per bé que, contràriament al que passa en el món newtonià, no té per què conservar-se: la massa en repòs m pot ser alterada en una col·lisió si els seus estats interns varien, i pot ser alterada quan és influenciada per certs camps de força.

Per finalitzar aquest apartat, s'exposarà un exemple típic però il·lustratiu de la transformació d'energia calorífica en massa. L'exemple el constitueix el xoc inelàstic de dos cossos d'igual massa pròpia m, del qual en resulta un sol cos de massa M. Per descriure el xoc d'una forma senzilla s'empra el referencial inercial anomenat centre de masses $\Sigma(c.d.m.)$.

Respecte a aquest referencial els dos cossos s'acosten amb velocitats $\vec{u}$ i $-\vec{u}$. L'aplicació de la llei de conservació del quadrivector energia-moment lineal

$$p^a(\text{abans del xoc}) = p^a(\text{després del xoc})$$

implica

$$m\gamma(u) + m\gamma(u) = M\gamma(u'),$$
$$m\gamma(u)\vec{u} - m\gamma(u)\vec{u} = M\gamma(u')\vec{u}'.$$

De la segona equació es dedueix que $\vec{u}' = \vec{0}$, és a dir, M resta en repòs en el referencial $\Sigma(c.d.m.)$, i de la primera se'n segueix

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Per tant, la massa M del cos resultant no és igual a la massa $2m$ dels dos cossos que la generen, en contradicció amb la predicció newtoniana $M = 2m$. Hi ha una contribució de segon ordre en u/c, que esdevé igual a l'energia cinètica de les dues partícules abans de col·lisionar. En efecte, en relativitat especial l'energia cinètica E_c s'ha de definir de la manera següent per a una partícula de massa m:

$$E_c = mc^2\left(\gamma(u) - 1\right) \simeq \frac{1}{2}mu^2 + O\left(\frac{u^4}{c^2}\right).$$

En conseqüència:

$$M = 2m\gamma(u) \equiv 2m + 2m(\gamma(u) - 1) = 2m + 2\frac{E_c}{c^2}.$$

Durant el xoc, aquesta energia cinètica $2E_c$, es converteix essencialment en energia calorífica Q_0, cosa que incrementa la massa del cos resultant en Q_0/c^2.

Cal inferir que si un cos, situat pràcticament en el zero absolut, posseix una massa $m(0)$, i se'l porta a una temperatura T, mitjançant l'aportació d'una quantitat de calor Q_0, llavors la seva massa s'incrementarà en la quantitat Q_0/c^2:

$$m(T) = m(0) + \frac{Q_0}{c^2}.$$

En general, si un cos de massa m està submergit en un bany tèrmic, la seva energia-moment $p^a = mu^a$ canviarà a causa de l'intercanvi amb la font tèrmica d'energia-moment. Aquest intercanvi dinàmicament es pot descriure mitjançant la definició del quadrivector calor-moment següent:

$$\delta Q^a = \left(\frac{\delta Q}{c}, \delta\vec{\pi}\right),$$

sent δQ i $\delta\vec{\pi}$ la calor i el trimoment lineal, respectivament absorbit o emès pel cos en el referencial Σ durant l'interval de temps propi $d\tau$. La llei de conservació de l'energia-moment lineal implica, per al cos submergit en el bany tèrmic, que

$$\delta p^a = \delta Q^a.$$

És a dir,

$$\delta m u^a + m\delta u^a = \delta Q^a.$$

En projectar aquesta equació sobre u^a, recordant els resultats reproduïts en l'apèndix que $u^a u_a = -c^2$ i $u^a\delta u_a = 0$, s'obté:

$$\delta m = -u_a\frac{\delta Q^a}{c^2},$$

expressió que quantifica la variació de massa (pròpia) ocasionada per l'intercanvi d'energia calorífica.

D'aquestes consideracions es dedueix que l'anàlisi mecànica dels sistemes termodinàmics ha de tenir present que la massa pròpia del sistema físic no es manté en general constant. La variació de massa pot ser ocasionada per agents allunyats del concepte de força, com s'analitzarà més rigorosament en l'apartat següent.

Forces pures i forces impures

> "Encara que la perspectiva positivista contradiu la "intel·ligibilitat de la natura" no pressuposa una tornada al pensament màgic i supersticiós d'antany; ben al contrari, expulsa la noció de força de la física, la més perillosa relíquia de l'animisme en aquesta ciència."
>
> Erwin Schrödinger
> *La Naturaleza y los Griegos*
> Tusquets Editores. Metatemas, 48

Dins de l'àmbit de la relativitat especial, la segona llei de Newton es formula en funció de l'anomenada força de Minkowski K^a i del vector energia-moment lineal $p^a = mu^a = (E/c, \vec{p})$, de la manera següent:

$$\frac{dp^a}{d\tau} = K^a.$$

Per tal de solucionar el problema dinàmic, és a dir, per integrar l'equació del moviment, s'ha de tenir present que el mòdul de la velocitat u^a del cos és constant $u^a u_a = -c^2$.

El sistema dinàmic el constitueixen, per tant, les cinc equacions:

$$\frac{d}{d\tau}(m\frac{dx^a}{d\tau}) = K^a; \qquad \frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx_a}{d\tau} = -c^2.$$

Suposada, definida i coneguda la interacció externa representada per K^a, llavors les cinc equacions, un cop fixades les condicions inicials, determinen les úniques cinc variables presents:

m: massa pròpia

$x^a(\tau)$: línia d'univers de la partícula.

En conseqüència, en l'estructura relativista la massa pròpia m no té per què ser una magnitud característica del cos, sinó que pot dependre de la interacció externa K^a. En efecte, sols cal efectuar la derivació indicada en el primer membre de la llei del moviment i projectar-la sobre la velocitat u^a per obtenir la variació de la massa pròpia

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{u_a K^a}{c^2}. \qquad (1)$$

En el darrer exemple de l'apartat anterior s'ha deduït el cas particular $\delta m = -u_a(\delta Q^a/c^2)$, en què la influència externa era representada mitjançant un flux de calor-moment. En l'actual context, equival a una força minkowskiana $K^a = \delta Q^a/\delta\tau$.

De l'equació (1) es dedueix que la massa pròpia romandrà constant si, i solament si, la força externa K^a és sempre ortogonal a la velocitat u^a. En quasi tots els problemes fonamentals de la dinàmica de partícules se suposa que es verifica aquesta condició. Per exemple, la força que exerceix un camp electromagnètic F^{ab} sobre una càrrega q, $K^a = qu_bF^{ab}$, la verifica automàticament atesa l'antisimetria del tensor camp electromagnètic $F^{ab} : u_aK^a = qu_au_bF^{ab} \equiv 0$.

Però en el domini de la termodinàmica, les forces K^a que actuen sobre els sistemes o màquines tèrmiques en general no la compleixen, ans al contrari, és habitual que $u_aK^a \neq 0$. Aquest fet obliga a fer una anàlisi acurada del terme de treball que intervé en el primer principi de la termodinàmica. Sobre això considerem pertinent seguir W. G. Dixon per aprofundir en la natura relativista de la magnitud força.

W. G. Dixon defineix la força pura P^a com la que deixa la massa pròpia constant, és a dir, la que verifica $u_aP^a = 0$, mentre que la força que deixa la velocitat u^a invariant, la defineix com una deu energètica pura, per tant ha de ser del tipus $G^a = Gu^a$. L'esquema següent resumeix la classificació de les forces segons W. G. Dixon:

Efecte sobre $P^a = mu^a$
d'una força generalitzada o impura K^a

$$K^a = m\frac{du^a}{d\tau} + \frac{dm}{d\tau}u^a$$

Força pura o propulsora P^a	Força energètica pura G^a
$\frac{dm}{d\tau} = 0;$	$\frac{du^a}{d\tau} = 0;$
$u_aP^a = 0;$	$u_aG^a = -c^2\frac{dm}{d\tau} \equiv -c^2G;$
$p^a = m\frac{du^a}{d\tau}.$	$G^a = \frac{dm}{d\tau}u^a \equiv Gu^a.$

Les equacions de l'esquema anterior faciliten la descomposició, en funció de l'evolució del sistema, d'una força impura K^a en una força pura P^a i una força o font energètica pura G^a:

$$K^a = P^a + G^a,$$

on

$$P^a = K^a + u^a u_b K^b/c^2; \qquad G^a = -u^a u_b K^b/c^2 \equiv Gu^a.$$

Recordem breument la formulació tridimensional de les lleis del moviment per al cas d'una força pura P^a, abans de deduir la corresponent formulació dinàmica per a una força generalitzada o impura K^a.

Atès que una força pura verifica

$$0 = u_ap^a = -\gamma(u)cP^0 + \gamma(u)\vec{u}\cdot\vec{P},$$

se'n segueix que $P^0 = \vec{u}/C\cdot\vec{P}$. Llavors P^a es pot expressar

$$P^a = \left(\frac{\vec{u}}{c}\cdot\vec{P}, \vec{P}\right).$$

En substituir aquesta expressió en la llei del moviment resulta la descomposció següent respecte al referencial Σ:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{P}; \qquad \frac{dE}{d\tau} = \vec{u}\cdot\vec{P}.$$

L'interval temporal dt mesurat en el referencial Σ està relacionat amb el corresponent interval propi $d\tau$, mesurat per un rellotge solidari al cos mitjançant $dt = \gamma(u)d\tau$; per tant:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{\gamma}\vec{P} \equiv \vec{F}; \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\gamma}\vec{u}\cdot\vec{P} \equiv \vec{u}\cdot\vec{F},$$

on $\vec{F}$ és la triforça que es mesura en Σ. Per exemple, en el cas d'una càrrega q sotmesa a l'acció d'un camp electromagnètic $(\vec{E}, c\vec{B})$, $\vec{F}$ és la força de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u}/c\times c\vec{B})$. En resum, la força minkowskiana pura P^a està relacionada amb la triforça $\vec{F}$ mesurada en $\Sigma(t,x,y,z)$ mitjançant la cadena d'igualtats:

$$P^a = (P^0, \vec{P}) = \left(\frac{\vec{u}}{c}\cdot\vec{P}, \vec{P}\right) = \left(\gamma\frac{\vec{u}}{c}\cdot\vec{F}, \gamma\vec{F}\right).$$

Per a la formulació del cas general, corresponent a una força generalitzada o impura K^a, sols cal afegir-hi l'efecte de la força o font energètica pura $G^a = Gu^a = (\gamma cG, \gamma G\vec{u})$, això és:

$$K^a = P^a + G^a = \left(\gamma(\frac{\vec{u}}{c}\cdot\vec{F} + cG), \gamma(\vec{F} + G\vec{u})\right).$$

Aquesta descomposició de K^a permet immediatament expressar les equacions del moviment en el referencial Σ:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + G\vec{u}; \qquad \frac{dE}{dt} = \vec{u}\cdot\vec{F} + Gc^2. \qquad (2)$$

El terme $G\vec{u}$ no té cap analogia newtoniana, ja que és una manifestació de la inèrcia de l'energia: atribueix la part de la variació del moment lineal causada per la variació de massa pròpia, a la força o font energètica pura $G^a = Gu^a = (\gamma cG, \gamma G\vec{u})$.

Cal explicitar que M. Planck, A. Einstein, W. Pauli, R. C. Tolman, i molts autors actuals no apliquen les equacions (2) anteriors, sinó les següents:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^*; \qquad \frac{dE}{dt} = \vec{u}\cdot\vec{F}^* + G^* c^2. \tag{3}$$

La triforça generalitzada $\vec{F}^*$ es defineix com la derivada temporal del trimoment $\vec{p} = m\gamma(u)\vec{u}$. Llavors G^* esdevé la variació d'energia que no pot ser atribuïda al treball $\vec{u}\cdot\vec{F}^*\delta t$ realitzat per la triforça generalitzada $\vec{F}^*$. Per tant, els autors citats anteriorment no efectuen la diferenciació entre forces pures o propulsores i forces impures, la qual cosa equival a emprar una força minkowskiana K^a, del tipus:

$$K^a = \left(\gamma(\frac{\vec{u}}{c}\cdot\vec{F}^* + cG^*), \gamma\vec{F}^*\right).$$

El nucli de la confusió es planteja quan el treball efectuat per la triforça generalitzada o impura $\vec{F}^*$ s'identifica amb el terme de treball del primer principi de la termodinàmica. En efecte, $\vec{F}^*$ pot ser nul·la en un referencial inercial i no ser-ho en un altre. Tanmateix, la triforça pura $\vec{F}$ si és nul·la en un referencial inercial, ho serà en tots, ja que si $\vec{F} = \vec{0}$, se'n segueix que $p^a = 0$; la llei de transformació de $\vec{F}$ és lineal i homogènia. Aquest fet fa entrar d'una manera subtil i gens explícita en les equacions (3) un enfocament aristotèlic, ja que s'ha de concloure, si s'empren les forces $\vec{F}^*$, que per *mantenir una velocitat constant, és necessari l'acció d'una força!* Per exemple, en la pàgina 156, paràgraf 69, apartat "Work", del conegut i seguit tractat de R. C. Tolman (1987), s'explicita la necessitat d'una força per tal de mantenir la velocitat constant si la massa pròpia varia; també és així en la solució que dóna P. T. Landsberg a l'exemple que s'exposarà més endavant.

És evident que es tracta d'una problemàtica on les definicions de les magnituds emprades tenen un paper principal. En aquests assumptes l'experiència ens ensenya que és difícil assolir un punt de vista únic, ja que s'obre un ventall de possibilitats on els criteris de senzillesa, utilitat, coherència, etc. passen a ser decisoris. Això no obstant, si no s'és acurat en les implicacions del criteri escollit, es corre el risc de generar confusionisme. En resum, però, i almenys des d'un punt de vista termodinàmic pràctic, considerem que no és pertinent definir la triforça com la derivada temporal del trimoment lineal. Per exemple, quan els enginyers jutgen l'eficiència d'una màquina tèrmica, en la qual la calor es transforma en energia cinètica o potencial, el treball que comptabilitzen és el generat per la força pura o propulsora $\vec{F}$ i no pas el calculat mitjançant la força generalitzada $\vec{F}^*$.

És possible que si M. Planck i A. Einstein haguessin disposat el 1907 de la formulació quadridimensional minkowskiana del 1908, molt probablement haurien aplicat les equacions (2), i no les (3). Per als autors posteriors, el pes de la seva autoritat segur que els ha influenciat.

L'aplicació que es resoldrà en el paràgraf següent, extret de Landsberg (1978), exemplifica el que acabem d'exposar. Hem d'advertir que Landsberg usa les forces impures o generalitzades, i segueix l'enfocament original de Planck, Einstein i Tolman en la discussió del problema.

Aplicació termodinàmica

L'exemple considera dos cossos A i B, ambdós en repòs en el referencial propi Σ_0. Entre els dos cossos té lloc una lenta i petita transferència de calor, δQ^0 en Σ_0, del cos B al cos A.

Els intercanvis d'energia i moment lineal entre A i B s'expressen trivialment respecte a Σ_0:

$$\delta E_A^0 = \delta Q^0 = -\delta E_B^0; \qquad \delta\vec{p}_A^0 = \delta\vec{p}_B^0 = 0.$$

La primera equació representa l'energia calorífica donada pel cos B i guanyada pel cos A. La segona equació constata que ambdós cossos resten en repòs en Σ_0. El problema es planteja quan el procés s'analitza respecte al referencial Σ que es desplaça respecte a Σ_0 amb velocitat $(-v, 0, 0)$. Això és, respecte a Σ els dos cossos es mouen amb velocitat $(v, 0, 0)$.

Per iniciar l'estudi del procés en Σ, es pot fer ús de la llei de transformació del quadrivector energia-moment lineal $p^a = (E/c, \vec{p})$:

$$\begin{array}{ll} E = \gamma\left(E^0 + vp_x^0\right); & p_x = \gamma(p_x^0 + vE^0/c^2); \\ p_y = p_y^0; & p_z = p_z^0. \end{array}$$

Ja que l'única component del moment lineal que es transforma és la x, a partir d'ara s'ometran els subíndexs x, y, z i ens centrarem sols en $p \equiv p_x$.

La substitució de les equacions que es verifiquen en Σ_0 en la llei de transformació anterior implica que en Σ es verifica per al cos A i per al cos B:

$$\delta E = \gamma\delta E^0; \qquad \delta p = \gamma v\frac{\delta E^0}{c^2}.$$

Si es particularitzen les dues equacions anteriors per als cossos A i B, s'obtenen les dues cadenes d'igualtats següents:

$$\delta E_A = \gamma\delta E_A^0 = \gamma\delta Q^0 = -\gamma\delta E_B^0 = -\delta E_B;$$

$$\delta p_A = \gamma v\frac{\delta E_A^0}{c^2} = \gamma v\frac{\delta Q^0}{c^2} = -\gamma v\frac{\delta E_B^0}{c^2} = -\delta p_B.$$

Respecte a Σ_0, l'intercanvi d'energia calorífica tingut en compte equival sols a un intercanvi de massa pròpia

$\delta Q^0/c^2$, però respecte a Σ, com que els dos cossos es mouen amb velocitat v, implica un canvi no nul, igual i oposat, de moment lineal entre ambdós cossos. És a partir d'aquí que P. T. Landsberg raona, segons el nostre parer "aristotèlicament". En efecte, transcrivim literalment la seva interpretació:

> " Això implica l'acció d'una força, $f = dp/dt$, en la direcció x, on f, p i t estan mesurats a Σ. Això vol dir que en cedir calor, B fa un treball sobre A. El seu valor a Σ quan es mou una distància Δs en la direcció x és:
>
> $$\delta W_A = f\Delta s = \frac{\delta p_A}{\delta t}\Delta s = v\delta p_A = \frac{v^2}{c^2}\gamma\delta Q^0.$$
>
> La quantitat d'energia guanyada pel sistema A conté per tant una quantitat de treball mecànic δW_A. Definim ara la calor guanyada en el referencial Σ com
>
> $$\delta Q_A = \delta E_A - \delta W_A = \gamma\delta Q^0 - \frac{v^2}{c^2}\gamma\delta Q^0 = \frac{\delta Q^0}{\gamma}."$$

Per tant, com és lògic, P. T. Landsberg obté la llei de transformació de la calor $\delta Q = \delta Q^0/\gamma$ proposada el 1907 per M. Planck i A. Einstein.

Per aprofundir i intentar explicitar encara més les diferències en la solució i la seva interpretació, resoldrem a continuació el problema, fent ús primer de les equacions dinàmiques (3), i després de les equacions dinàmiques (2).

La metodologia de P. T. Landsberg equival a aplicar les equacions (3) de M. Planck i A. Einstein, que seguint la nomenclatura de l'exemple són:

$$\frac{dp}{dt} = f; \qquad \frac{dE}{dt} = vf + G^* c^2.$$

Respecte a Σ_0, $f = 0$ i, per tant, es redueixen a

$$\frac{dp_A^0}{dt^0} = 0; \qquad \frac{dE_A^0}{dt^=} = \frac{\delta Q^0}{\delta t^0}.$$

Respecte a Σ,

$$\frac{dp_A}{dt} \equiv f = \frac{v}{c^2}\gamma\frac{\delta Q^0}{\delta t}, \text{definició de} f \equiv F^*$$

$$\frac{dE_A}{dt} = vf + \frac{\delta Q}{\delta t}.$$

De la segona equació, i tenint en compte que $\delta E_A = \gamma\delta Q^0$, es dedueix $\delta Q = \delta Q^0/\gamma$.

Tanmateix, la metodologia defensada en aquest treball, i que, com hem dit anteriorment, va ser inicialment proposada per H. Ott i H. Arzelies, i desenvolupada en la dècada dels setanta per C. Möller, equival a emprar les equacions (2)

$$\frac{dp}{dt} = F + Gv; \qquad \frac{dE}{dt} = vF + Gc^2.$$

Atès que no hi ha cap força pura o propulsora, $F = 0$ en qualsevol referencial inercial, i en conseqüència les equacions es redueixen a

$$\frac{dp}{dt} = Gv; \qquad \frac{dE}{dt} = Gc^2,$$

sent

$$G = \frac{\delta m}{\delta\tau} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta Q^0}{\delta t^0}.$$

Respecte a Σ_0, com que $v = 0$ es redueixen a:

$$\frac{dp_A^0}{dt^0} = 0; \qquad \frac{dE_A^0}{dt^0} = Gc^2 = \frac{\delta Q^0}{\delta t^0}.$$

Però, respecte a Σ, com que $v \neq 0$ tindrem:

$$\frac{dp_A}{dt} = Gv = \frac{1}{c^2}\frac{\delta Q^0}{\delta t^0}v; \qquad \frac{dE_A}{dt} = Gc^2 = \frac{\delta Q^0}{\delta t^0}.$$

Com s'ha dit anteriorment, en ser $F = 0$, el terme de treball també ho és, i el primer principi de la termodinàmica es redueix a $\delta E_A = \delta Q$. La "integració" de la segona de les equacions anteriors

$$\delta Q = \delta E_A = \frac{\delta t}{\delta t^0}\delta Q^0 = \gamma\delta Q^0$$

condueix a una llei de transformació de la calor inversa de la que s'obté emprant les forces generalitzades o impures.

La diferència fisicomatemàtica entre les dues metodologies també pot explicitar-se de la manera següent. La variació δp_A^a del vector energia-moment del cos A, expressat en els referencials Σ_0 i Σ, és respectivament:

$$(\delta p_A^a) = \left(\frac{\delta E_A^0}{c}, 0\right)_{\Sigma_0} ; \quad (\delta p_A^a) = \left(\gamma\frac{\delta E_A^0}{c}, \gamma\frac{v}{c^2}\delta E_A^0\right)_{\Sigma}$$

i el vector que representa el flux reversible de calor-moment és:

$$(\delta Q_A^0) = \left(\frac{\delta Q^0}{c}, 0\right)_{\Sigma_0} ; \; (\delta Q_A^0) = \left(\gamma\frac{\delta Q^0}{c}, \gamma\frac{v}{c^2}\delta Q^0\right)_{\Sigma}.$$

El punt de vista defensat en aquest article equival a la llei de conservació de l'energia-moment:

$$\delta p^a = \delta Q^a.$$

En resum, l'increment de moment lineal δp_A, atribuït per P. T. Landsberg a l'acció d'una força mecànica $f = F^*$, estimem més raonable i més pràctic associar-lo a la transferència de calor i no relacionar-lo amb l'execució d'un treball mecànic.

Conclusions

Estimem que les reflexions suscitades en el desenvolupament de l'article aporten idees pertinents per a la construcció pràctica i coherent dels fonaments de la termodinàmica relativista de l'equilibri.

Dins del context de la relativitat especial es pot considerar correcta la formulació dels principis de la termodinàmica clàssica, si les lleis es refereixen als referencials inercials instantàniament en repòs amb el sistema termodinàmic. Acceptat aquest punt de partença, el problema es pot plantejar a grans trets de la manera següent: *es conservarà en qualsevol referencial inercial la mateixa formulació que els principis de la termodinàmica adopten en el referencial propi?*

Altrament, sota l'acció de les transformacions de Lorentz, restaran invariants en forma els dos principis de la termodinàmica? La resposta també ha de permetre determinar les lleis de transformació de les magnituds termodinàmiques, com ara la calor, temperatura, potencials, etc., i pensar problemes difícils de caràcter operacional del tipus: *com es mesura la temperatura d'un cos en moviment?*

Recordem que el primer principi de la termodinàmica afirma que l'energia total d'un sistema en equilibri termodinàmic és una funció de les variables que determinen l'estat d'equilibri. En el referencial propi Σ_0, un procés que porta el sistema d'un estat d'equilibri a un altre estat d'equilibri, implica un canvi d'energia δE^0 igual a $\delta E^0 = \delta W^0 + \delta Q^0$, sent δW^0 el treball efectuat sobre el sistema pel seu entorn, i δQ^0 la quantitat d'energia calorífica transferida al sistema durant el procés. La partició de δE^0 en les dues parts δW^0 i δQ^0 s'ha de definir d'acord amb els arguments proposats, incloent en δW^0 només el treball efectuat per les forces pures, és a dir, les que únicament generen un canvi de velocitat. Llavors δQ^0 resta unívocament definida com la part de δE^0 que no és deguda a l'acció de tals forces. En resum, i seguint l'esperit de la termodinàmica clàssica, per al càlcul del terme de treball es proposa emprar solament les forces pures $\vec{F}$ i no les generalitzades $\vec{F}^*$.

Aquest plantejament, com que és independent del referencial inercial, esdevé covariant Lorentz, i atès que el primer principi representa el principi de conservació de l'energia total, és raonable suposar i postular que conservi la mateixa forma en qualsevol referencial inercial. Per tant, en un referencial Σ arbitrari, el primer principi de la termodinàmica es formularà de la manera següent:

$$\delta E = \delta W + \delta Q.$$

Per acabar, considerem el segon principi de la termodinàmica de l'equilibri. En el referencial propi del cos Σ_0, afirma que l'entropia S^0 del sistema termodinàmic en equilibri tèrmic és una funció de les variables que determinen l'estat, i es defineix per l'equació

$$dS^0 = \frac{\delta Q^0_{rev.}}{T^0},$$

sent dS^0 la variació d'entropia entre estats d'equilibri infinitament propers, $\delta Q^0_{rev.}$ la calor subministrada al sistema durant el procés reversible que en Σ_0 connecta els dos estats, i T^0 la temperatura Kelvin mesurada per un termòmetre en repòs amb el cos.

A partir de la interpretació i definició estadística de l'entropia com una probabilitat, això és, un nombre, s'infereix immediatament que ha de ser un invariant lorentzià. Per tant:

$$dS^0 = dS.$$

I dins de l'àmbit dels processos reversibles, no condueix a cap contradicció si se suposa que la definició d'entropia també és vàlida en el referencial Σ:

$$dS = \frac{\delta Q_{rev.}}{T}.$$

Acceptada aquesta hipòtesi, la invariància de l'entropia $dS^0 = dS$, implica

$$\frac{\delta Q^0_{rev.}}{T^0} = \frac{\delta Q_{rev.}}{T}.$$

I atès que per a un procés reversible $\delta Q_{rev.} = \gamma \delta Q^0_{rev.}$, s'infereix que la temperatura T en el referencial Σ ha d'estar relacionada amb la temperatura pròpia T^0, de la mateixa manera que es transforma la quantitat de calor transferida, és a dir,

$$T = \gamma T^0.$$

Apèndix

L'objectiu de l'apèndix consisteix a recordar les fórmules de la relativitat especial directament relacionades amb el context de l'article, i així evitar al lector no familiaritzat amb la formulació quadridimensional que hagi de recórrer a la consulta dels llibres que l'expliquen.

En l'espaitemps (minkowskià) es defineix el vector desplaçament infinitessimal, que connecta dos esdeveniments propers, de la manera següent:

$$d\overline{x} = dx^a = (cdt, dx, dy, dz).$$

En funció de $d\overline{x}$ es defineix la 2-forma producte escalar

$$ds^2 = d\overline{x} \cdot d\overline{x} = \eta_{ab} dx^a dx^b = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

sent η_{ab} la matriu diagonal $\eta_{ab} = diag.(-1, 1, 1, 1)$, anomenada *mètrica minkowskiana*. Fàcilment es comprova que ds^2 és invariant sota l'acció del grup de Lorentz. De fet s'acostuma a definir el grup de Lorentz, requerint que deixi invariant la 2-forma producte escalar.

Quan dos esdeveniments separats per dx^a tenen lloc en un mateix punt del triespai del referencial $\Sigma_0(t_0, x_0, y_0, z_0)$, anomenat *propi*, és a dir, si respecte a Σ_0 es verifica $0 = dx_0 = dy_0 = dz_0$, llavors

$$ds^2 = -c^2 dt_0^2 \equiv -c^2 d\tau^2,$$

sent $dt_0 \equiv d\tau$ l'interval de temps mesurat per un rellotge en repòs en Σ_0 i situat en els dos esdeveniments considerats.

El moviment d'una partícula es representa en l'espai-temps mitjançant l'anomenada línia d'univers, que habitualment expressa les coordenades en funció del temps propi

$$\tau \to x^a(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \,,$$

el qual permet definir la velocitat de la manera següent:

$$\overline{u} = u^a = \frac{dx^a}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right),$$

on $\overline{u}$ és un vector de mòdul constant, ja que

$$\overline{u} \cdot \overline{u} = \eta_{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau} = -c^2.$$

D'aquesta expressió fàcilment es dedueix la relació entre l'interval de temps dt mesurat en el referencial inercial Σ i l'interval de temps propi $d\tau$:

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{u}}{c}\right)^2}\, dt.$$

Això és, $dt = \gamma(u) d\tau$, sent $\vec{u} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ la trivelocitat de la partícula. La velocitat també s'acostuma a representar en funció de les seves components respecte a diferents referencials inercials:

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau} = (\gamma(u)c, \gamma(u)\vec{u})_\Sigma = (c, \vec{0})_{\Sigma_0}.$$

Una de les conseqüències rellevants de la relativitat especial és que les magnituds energia i moment lineal estan interrelacionades. Sota l'acció del grup de Lorentz es transformen de la mateixa manera que les coordenades espai-temps. D'aquesta unificació s'infereix que la massa esdevé una forma més de manifestació de l'energia, fet del qual simètricament es dedueix la inèrcia de l'energia. En efecte, si hom vol que es verifiquin les lleis de conservació, el vector energia-moment lineal s'ha de definir de la manera següent:

$$\overline{p} = p^a = mu^a = (mc\gamma(u), m\gamma(u)\vec{u}) \,,$$

on m és la massa mesurada en el referencial propi Σ_0 de la partícula; per aquesta raó, també se la coneix com a *massa pròpia*, i moltes vegades se l'acostuma a representar per m_0. Per tant, es correspon amb la massa newtoniana.

La massa m és un invariant lorentzià, ja que

$$\overline{p} \cdot \overline{p} = -m^2\gamma^2c^2 + m^2\gamma^2\vec{u}^2 = -m^2c^2.$$

En relativitat especial, l'energia i el trimoment lineal es defineixen en funció de les components de p^a:

$$\frac{E}{c} \equiv m\gamma(u)c; \qquad \vec{p} \equiv m\gamma(u)\vec{u}.$$

Tal com l'experiència ho ha ratificat, aquestes magnituds són les que es conserven per a un sistema aïllat de partícules que interaccionen només per via de col·lisions, i per a tot el rang, des de 0 a c, de velocitats assolibles. En darrera instància, aquest fet justifica les anteriors definicions. En l'aproximació newtoniana, això és, quan es verifica $u/c \ll 1$ i $\gamma(u) \sim 1$, esdevenen:

$$E \sim mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{u}^2; \qquad \vec{p} \sim m\vec{u}.$$

Com s'ha demostrat, la massa inercial m és un invariant lorentzià, però contràriament al que té lloc en mecànica newtoniana és una magnitud que no es conserva. Hem d'advertir al lector novell que és pràctica habitual definir la massa com $m\gamma(u)$. Llavors sempre és convenient recordar la seva proporcionalitat amb l'energia de la partícula $E = mc^2\gamma(u)$.

Emprant la terminologia newtoniana es pot afirmar que la matèria, en el sentit més ampli del mot, (per exemple, incloent-hi el camp electromagnètic) té dues qualitats fonamentals: la inèrcia, mesurada per la seva massa, i la seva capacitat d'efectuar treball, mesurada per la seva energia, sent ambdues magnituds estrictament proporcionals.

Referències

EINSTEIN, A., *On the relativity principle and the conclusions drawn from it.* (Reproduït i traduït a l'anglès en: The collected papers of Albert Einstein, v. 2. The Swiss years: Writings 1900-1909. (Princeton University Press, 1989)), *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, **4**, 1907.

DIXON, W. G., *Special relativity. The foundations of macroscopic Physics*, Cambridge University Press (Cambridge, 1978).

MÖLLER, C., *The theory of relativity. 2nd ed.*, Oxford University Press (Oxford, 1972).

LANDSBERG, P. T., *Thermodynamics and statistical mechanics*, (Dover, 1990).

LLOSA, J. i MOLINA, A., *Relativitat especial i electrodinàmica clàssica*, Publicacions Universitat de Barcelona (Barcelona, 1997).

TOLMAN, R. C., *Relativity, thermodynamics and cosmology*, (Dover, 1987).