

# Què fan els sistemes dinàmics?

Marc Figueras\*, Josep Rius†, Francesc Pi‡ i Gaspar Orriols§

## Introducció

En aquesta segona part del treball il·lustrarem què és el que poden fer els sistemes dinàmics i ho farem amb l'exemple d'una família de dispositius òptics que constitueixen un bon sistema per a l'estudi de dinàmiques de pocs graus de llibertat gràcies a dos fets peculiars. D'una banda, tenim que la seva dimensió efectiva pot ser escollida a voluntat modificant l'estructura del dispositiu i, d'altra banda, resulta que exhibeixen una fenomenologia dinàmica molt completa. Així mateix, la descripció del sistema ens servirà per mostrar la relació entre un dispositiu real, un model físic basat en una equació en derivades parcials i un model reduït d'equacions en derivades ordinàries.

## La família BOITAL

El nom BOITAL respon a l'acrònim de *biestabilitat òptica induïda tèrmicament amb absorció localitzada*. Un dispositiu BOITAL consisteix bàsicament en una cavitat interferomètrica del tipus Fabry-Pérot on el mirall anterior és parcialment absorbent, el mirall posterior és totalment reflector i l'espaiador de la cavitat consisteix en un conjunt de  $N$  capes de diferents materials transparents. El paper d'aquests materials és produir efectes termoòptics o variacions del camí òptic amb la temperatura, i estan ordenats de tal manera que els seus efectes són alternativament contraris. Els sistemes dinàmics en estudi consisteixen en un d'aquests dispositius il·luminat amb un feix continu de llum làser. La potència de la llum incident és el nostre paràmetre de control mentre que la potència de la llum reflectida ens informa del comportament dinàmic del dispositiu (vegeu figura 1).

La llum absorbida genera un focus de calor que es

\***Marc Figueras** (Barcelona, 1972) és llicenciat en Física per la UAB; actualment és becari d'investigació en aquesta universitat i està fent la tesi doctoral sobre comportaments de turbulència en sistemes dinàmics.

†**Jospe Rius** (Vilanova i la Geltrú, 1974) és llicenciat en Física per la UAB; actualment és becari d'investigació en aquesta universitat i està fent un treball de recerca sobre sistemes dinàmics amb resposta temporal complexa.

‡**Francesc Pi** (Pont de Molins, 1959) és doctor en Física per la UAB i actualment és professor titular d'òptica en aquesta universitat. Ha treballat en biestabilitat òptica, tecnologia de capes primes i sistemes no lineals.

§**Gaspar Orriols** (Sant Just Desvern, 1950) és doctor en Física per la UB i actualment és catedràtic d'òptica a la UAB. Ha treballat en l'estudi de fenòmens d'interacció llum-matèria, biestabilitat òptica i sistemes no lineals.

troba localitzat al mirall d'entrada i té una potència que és sensible a les interferències entre la llum que està entrant i la que està sortint enrere. Les variacions de temperatura dins la cavitat afecten el canvi de fase que experimenta la llum i això, a través de les interferències, provoca canvis en l'absorció que modifiquen al seu torn la temperatura. Observem com aquesta cadena de dependències es tanca sobre si mateixa de manera que constitueix un anell de realimentació que, a més, és no lineal. On apareix la no-linealitat? Doncs, exclusivament en la funció interferomètrica que descriu l'absorció de llum i que representem per  $A(\Psi)$ , on  $\Psi$  és el canvi de fase de la llum en viatjar dins la cavitat (vegeu figura 2). D'altra banda, com que l'escalfor arriba successivament a les diferents capes de l'espaiador, els efectes termoòptics alternativament contraris dels diversos materials presenten retards temporals i el resultat és l'aparició d'autooscil·lacions en la resposta del sistema.

El comportament dels dispositius BOITAL sembla ben descrit per l'equació homogènia de difusió de la calor sotmesa a les oportunes condicions de continuïtat i frontera. L'equació dinàmica és

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (1)$$

on  $T(z, t)$  representa la distribució de temperatures en funció de la profunditat dins de l'espaiador i en funció del temps, i  $D(z)$  descriu la difusibilitat tèrmica en funció del material de les diverses capes. La condició de frontera rellevant és la que té compte de la font de calor en la pel·lícula prima del mirall d'entrada i que es pot escriure com

$$-k \left[ \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=0} = A(\Psi) I_E - h[T]_{z=0} \quad (2)$$

on apareixen la conductivitat tèrmica  $k$ , la funció interferomètrica  $A(\Psi)$  que descriu l'absorció, la intensitat lluminosa incident  $I_E$  i un coeficient  $h$  que caracteritza unes pèrdues convectives. Finalment hem d'explicitar la influència de la distribució de temperatures sobre la fase òptica  $\Psi$  a causa de les variacions en l'índex de refracció tal que

$$\Psi = \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^L n(T) dz \quad (3)$$

on hem suposat que, per comparació a la propagació



tèrmica, la llum travessa instantàniament l'espaiador de

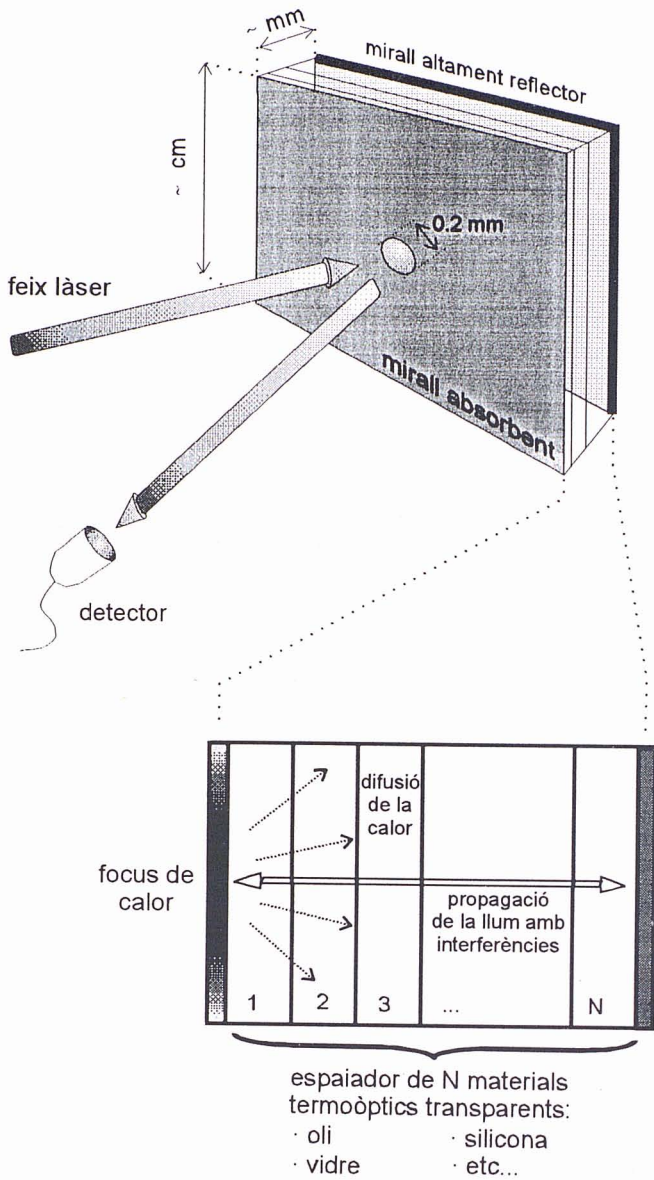


Figura 1: Dispositiu BOITAL il·luminat per un feix de llum d'una certa potència mentre un detector mesura la potència de la llum reflectida i ens informa del comportament del sistema. Dins del dispositiu funciona un bucle de realimentació entre l'absorció de llum al mirall d'entrada, la propagació tèrmica, els canvis de camí òptic per variacions de temperatura i les interferències de la llum allà on es produeix l'absorció. La no-linealitat sorgeix de la funció interferomètrica que descriu l'absorció en funció del canvi de fase òptica. En escalfar-se, el vidre s'expandeix mentre que els líquids disminueixen el seu índex de refracció  $i$ , per tant, produeixen efectes contraris sobre el camí òptic davant les variacions de temperatura. En un dispositiu es posen capes de materials alternativament contraris. Els efectes de competència entre capes, combinats amb la realimentació no lineal, originen fenòmens dinàmics que poden ser observats en la llum reflectida gràcies a les interferències

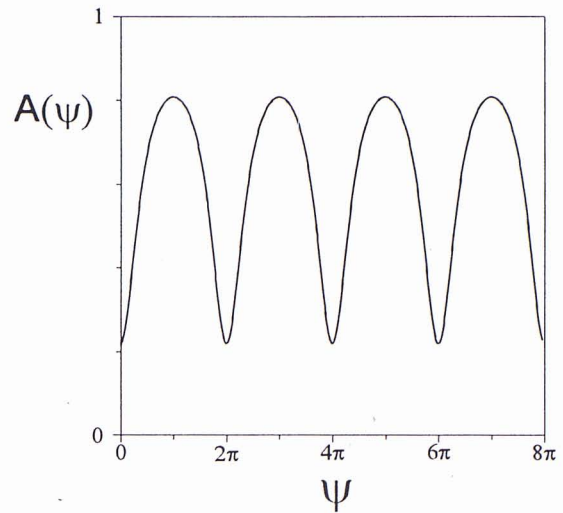


Figura 2: Representació de l'absorció que té lloc al mirall d'entrada en funció del canvi de fase que la llum experimenta en donar una volta dins la cavitat òptica. Aquesta funció interferomètrica constitueix la no-linealitat dels sistemes BOITAL i lògicament serà molt més efectiva com més gran sigui el contrast interferencial

manera que l'absorció en un instant donat és determinada per la distribució de temperatures del mateix instant.

Fixem-nos en el bucle de realimentació contingut en el conjunt d'aquestes tres equacions. L'equació en derivades parcials és, en aquest cas, lineal però està subjecta a una condició de frontera que és no local, ja que  $\Psi$  depèn de la distribució de temperatures, i és no lineal a causa de la  $A(\Psi)$ . La variable del problema és la funció  $T(z, t)$ , amb  $0 < z < L$ , i això fa que, en principi, el sistema matemàtic sigui de dimensió infinita. Ara bé, es pot demostrar que aquest sistema admet una reducció a un sistema d'equacions diferencials ordinàries d'ordre  $N$  pràcticament equivalent a l'original des del punt de vista dinàmic. Això ens indica que la dimensió dinàmica efectiva del dispositiu és igual al nombre de capes introduïdes a l'espaiador. El sistema reduït es pot escriure com

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = - \sum_{i=1}^N b_{ji} (\Psi_i - a_i A(\Psi) \Psi_E), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

on els coeficients  $b_{ji}$  i  $a_i$  estan relacionats amb els diversos paràmetres físics del sistema i es compleix que  $\sum a_i = 1$ .  $\Psi_E$  és proporcional a la intensitat incident. Les variables dinàmiques  $\Psi_j$  representen els canvis de fase parcials que la llum experimenta en cada una de les diverses capes i són proporcionals a les temperatures mitjanes d'aquestes capes. Així doncs, un sistema BOITAL evoluciona en l'espai de fases de dimensió  $N$  definit per les  $\Psi_j$  i la família BOITAL viu en un espai de paràmetres entre els quals els més significatius són els gruixos i els coeficients termoòptics de les diverses capes. La resposta observada es caracteritza per la fase



total  $\Psi = \sum \Psi_j$  que determina la reflexió de l'interferòmetre a través d'una funció  $R(\Psi)$ , semblant però de sentit contrari a  $A(\Psi)$ .

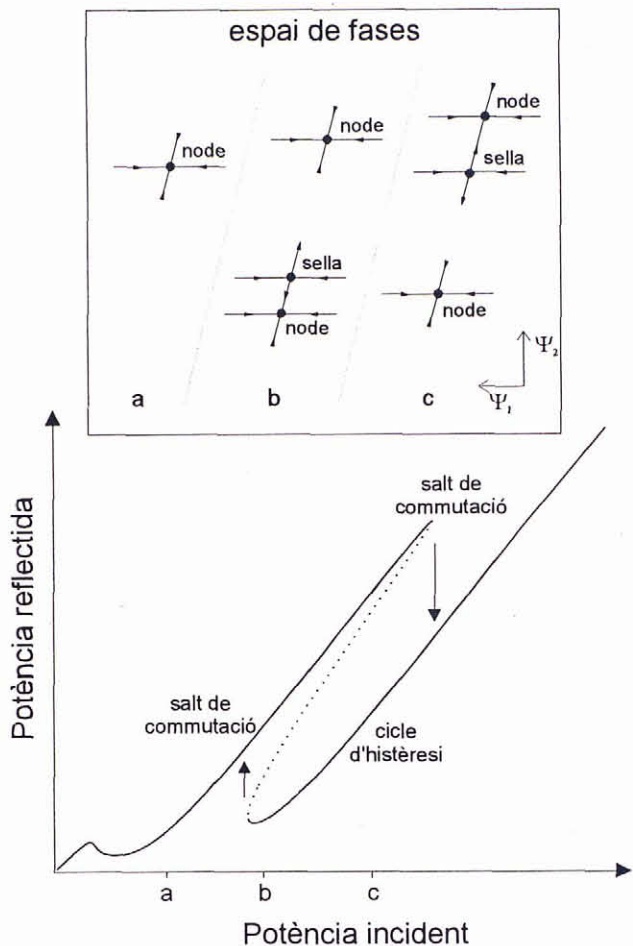


Figura 3: Solució estacionària d'un sistema BOITAL amb uns miralls determinats i un espaiador qualsevol amb un nombre arbitrari de capes. Per a un valor donat de la potència incident podem tenir múltiples respostes, cada una d'elles corresponent a una distribució de temperatures autoconsistent amb el bucle de realimentació. La solució de partida correspon a la potència nul·la i les solucions addicionals van apareixent i desapareixent per parelles en bifurcacions del tipus sella-node. Les branques representades en línia contínua descriuen els nodes i en línia trencada les selles. En variar la potència d'entrada amunt i avall obtenim un cicle d'histèresi delimitat per dos salts de commutació que indiquen la desaparició de l'estat estable on es trobava el sistema. En el requadre superior es mostren els retrats de l'espai de fases per a tres potències incidents determinades i per al cas d'un sistema de dimensió dos

Passem ara a veure alguns dels fenòmens que es manifesten en la resposta de la família BOITAL. Per començar s'ha de considerar la solució estacionària que correspon a la condició d'anul·lar les derivades temporals en les equacions dinàmiques i que normalment consisteix en

un o diversos punts fixos situats en determinats llocs de l'espai de fases.

### Multiplicitat de solucions. Bifurcació sella-node

El primer pas per obtenir dinàmica interessant és sempre, i per a qualsevol sistema, l'aparició de noves solucions. Això és possible gràcies a les no-linealitats i acostuma a produir-se mitjançant l'anomenada *bifurcació sella-node*. Com veurem, aquest tipus de bifurcació es manifesta sobre la solució estacionària quan és analitzada en funció d'un paràmetre de control i afecta només una dimensió de l'espai de fases. Per tant, és un fenomen possible en sistemes de qualsevol dimensió, incloent-hi la dimensió u.

A la figura 3 es mostra com és la solució estacionària en funció de la potència de llum incident per a un sistema BOITAL amb uns miralls determinats. La corba representa la potència reflectida que és igual a la potència incident multiplicada per la reflexió interferomètrica  $R(\Psi)$ . Si la  $\Psi$  romangués fixa tindriem una recta de pendent igual a  $R(\Psi)$  i, per tant, el que expressa la gràfica és que la fase òptica  $\Psi$  va variant en funció de la potència incident. La solució estacionària reproduïx de forma distorsionada la funció no lineal i, si bé no es mostra a la figura 3, la gràfica presenta successives ziga-zagues d'acord amb el caràcter periòdic de la funció  $A(\Psi)$ . Com que aquesta funció només depèn de les propietats dels miralls, resulta que la mateixa solució estacionària correspon a tota la família BOITAL, que, amb uns miralls determinats, tenen un espaiador qualsevol. S'ha de tenir en compte, però, que els punts fixos de la solució estacionària es troben en un espai de fases de dimensió igual al nombre de capes i que aquest podrà variar de sistema a sistema.

Fixem-nos ara en els detalls significatius de la solució estacionària. Una primera cosa a observar és la coexistència de múltiples solucions per a un mateix valor del paràmetre de control. Cada una de les solucions correspon a una distribució de temperatures que determina una fase  $\Psi$ , la qual justament fa que hi hagi l'absorció que correspon a la distribució de temperatures en qüestió. Sembla un circumloqui però, de fet, és el bucle de realimentació i la condició que es tanqui de forma autoconsistent allò que determina que tinguem o no una solució. La no-linealitat de la funció  $A(\Psi)$  permet que la condició d'autoconsistència es pugui satisfer per a diversos valors de  $\Psi$  i d'aquí la multiplicitat de solucions. Més avall veurem que el sistema es trobarà en un o altre estat dependent del que li hagi passat amb anterioritat.

Un segon aspecte a remarcar és l'estabilitat de les diverses solucions i això sí que pot canviar a mesura que creix la dimensió. Quan el sistema és de dimensió u o es comporta com si ho fos, resulta que les diferents branques de la solució estacionària corresponen alterna-



tivament a punts node del tot estables i a punts sella amb una dimensió inestable. En els punts estables la realimentació del sistema és negativa, cosa que vol dir que, si per alguna causa el sistema s'allunya una mica del punt fix, la realimentació el fa retornar al mateix punt (per això és estable!). Als punts sella, en canvi, la realimentació del sistema és positiva, de manera que, si una pertorbació l'allunya del punt, aquest desplaçament s'amplifica i condueix el sistema vers un dels dos nodes, que serà el de dalt o el de baix segons el sentit de la pertorbació inicial.

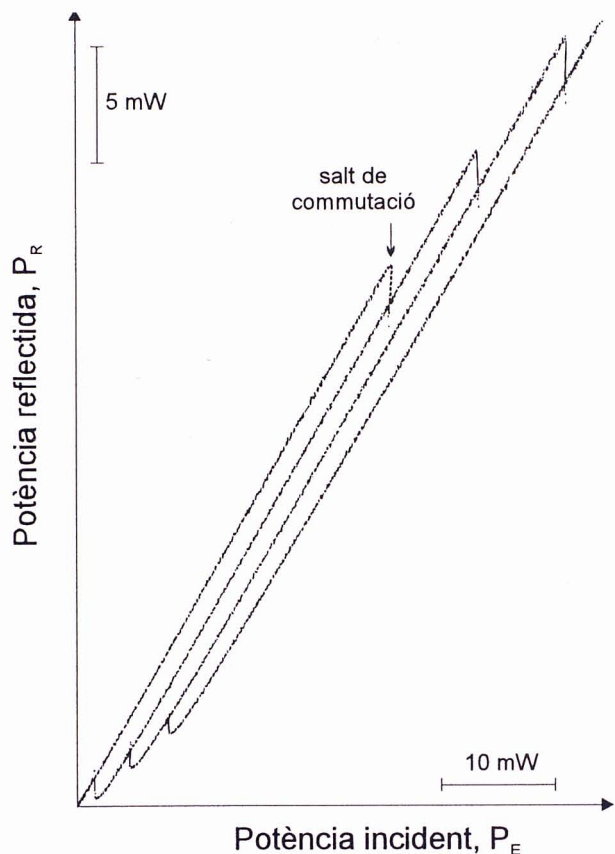


Figura 4: Resposta d'un dispositiu BOITAL amb una capa de  $200 \mu\text{m}$  d'oli de gira-sol entre els miralls. Lògicament només observem les solucions estables i els salts de commutació entre elles. Hem de suposar que hi ha una branca sella enmig de cada parell de branques estables. Els tres cicles d'histèresi que apareixen encavalcats s'han obtingut fent escombrades successives amunt i avall de la potència incident. També podem suposar amb certesa que el sistema presentaria encara més branques estables per sota de les registrades si haguéssim continuat les escombrades fins a potències més elevades

Per veure una mica el comportament dinàmic del sistema anem variant el paràmetre de control a fi de recórrer la solució estacionària. Partim de zero i anem augmentant la potència incident. Al començament només tenim una solució i és estable, però podem ob-

servar com a una certa potència apareixen dues noves possibles solucions. Hi ha hagut un canvi qualitatiu a l'espai de fases: dos punts fixos, un node i una sella, han nascut simultàniament i en el mateix lloc de l'espai de fases a través d'una *bifurcació sella-node*. De moment, però, el sistema segueix la mateixa solució d'abans mentre que les altres dues solucions es van separant entre si. Arriba un moment que la sella s'acosta fins a tocar el node on es troba el sistema i totes dues solucions desapareixen en una nova bifurcació sella-node de sentit contrari a la primera. En esvaire-se l'atractor que el retenia, el sistema es troba de sobte dins la conca d'atracció d'un altre punt node i se n'hi va fent el que s'anomena un *salt de commutació*.

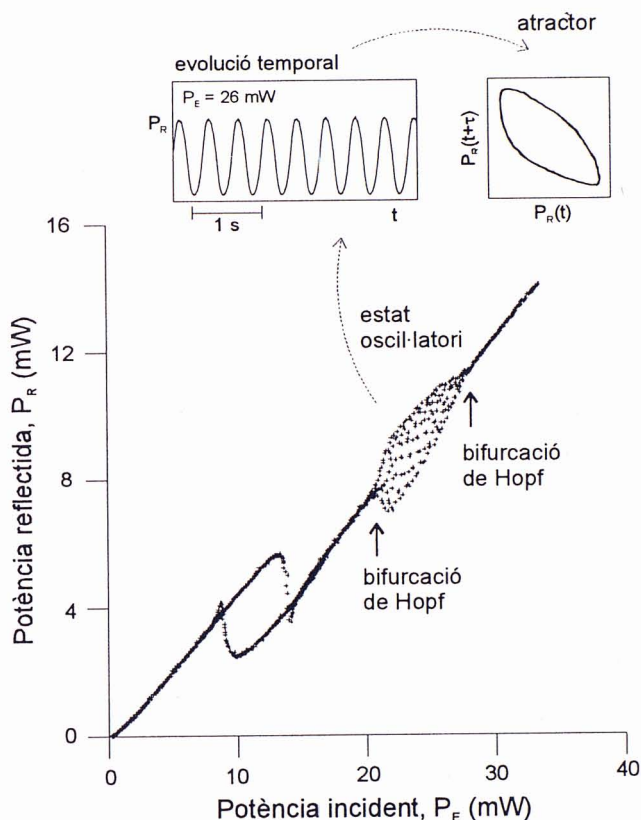


Figura 5: Resposta d'un dispositiu BOITAL espaiat amb una bicapa de vidre i oli de gira-sol, amb gruixos respectius de  $400$  i  $350 \mu\text{m}$ . En aquest cas el registre recull dues branques de la solució estacionària amb un cicle d'histèresi, semblant als de la figura 4 però més curt. La novetat és que, en una zona concreta de la segona branca, la solució estacionària es fa inestable i el sistema entra en un estat oscil·latori. Si observem el comportament en funció del temps per a una potència incident fixa, obtenim una evolució temporal com la que mostra el requadre. Representant aquest senyal temporal en funció de l'ell mateix però desplaçant un cert interval de temps  $\tau$ , podem obtenir un símil de l'atractor en un espai de fases de dimensió dos



Si seguim augmentant el paràmetre de control el sistema seguirà sobre aquest node fins que torni a trobar una bifurcació sella-node i hagi de fer un nou salt de commutació. Si en lloc de seguir augmentant-lo tornem enrere, el sistema es manté en la solució estable en què es troba fins que aquesta desaparegui en la bifurcació corresponent. Fixem-nos que, en aquest viatge d'anada i tornada per sobre de la solució estacionària, no hem anat i tornat pel mateix lloc, sinó que hem fet un *cicle d'histèresi* definit per dues bifurcacions sella-node que han produït dos salts de commutació. Aquest tipus de comportament és el que s'observa en la resposta d'un dispositiu BOITAL amb un espaiador unicapa (vegeu figura 4).

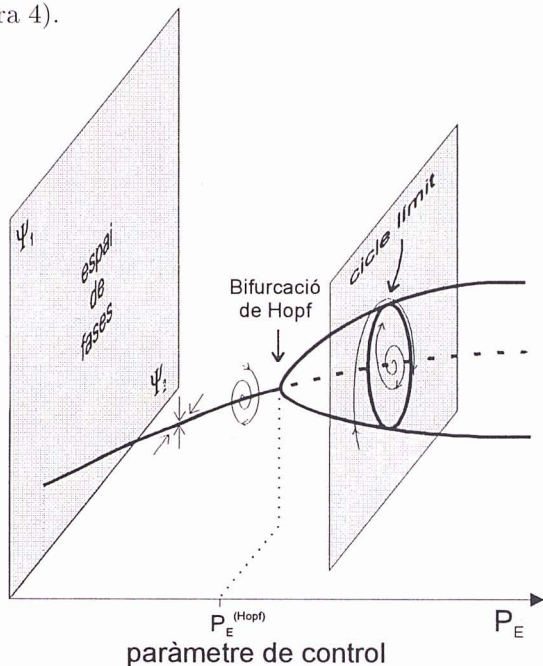


Figura 6: Il·lustració del fenomen de la bifurcació de Hopf. Hem representat esquemàticament els canvis qualitius que es produeixen en un espai de fases bidimensional en funció del paràmetre de control. Un node estable es converteix en focus i la convergència del flux en espiral es va fent cada vegada més lenta. A la bifurcació de Hopf, el flux en espiral passa de convergent a divergent, el focus s'ha fet inestable i un nou tipus d'atractor s'ha format al seu voltant per recollir el flux emergent. Ha nascut un cicle límit que descriu una evolució temporal periòdica de les dues variables amb un cert desfasament entre elles. En aquest estat el sistema es manté en oscil·lació autosostinguda gràcies a la realimentació no lineal i als efectes de competència entre els dos graus de llibertat

### Autooscil·lacions. Bifurcació de Hopf

Quan la dimensió dinàmica del sistema és dos, a més a més de les coses que hem comentat anteriorment, poden succeir-ne de noves. Una d'elles és el fet que, per a un cert valor del paràmetre de control, el sistema es pot posar a oscil·lar de forma autosostinguda i així ho manifesta en la potència de llum reflectida (vegeu figura 5).

El pas d'un comportament estacionari a un d'oscil·latori té lloc mitjançant l'anomenada *bifurcació de Hopf*, que és un fenomen que afecta dues dimensions del punt fix (vegeu figura 6). En variar el paràmetre de control el node estable primer es transforma en focus i després s'inestabilitza, mentre que al seu voltant apareix un nou tipus de solució atractiva: una *òrbita periòdica* també anomenada *cicle límit*. La inestabilitat bidimensional del punt fix s'ha produït perquè la competència entre els dos graus de llibertat permet un efecte de realimentació positiva que amplifica les petites fluctuacions. El flux emergeix del focus inestable però, a mesura que s'allunya, tendeix a ser frenat pel creixement dels efectes no lineals i el resultat és un nou atractor en forma de corba tancada on el sistema dona voltes periòdicament. Aquesta corba o cicle límit correspon a dos graus de llibertat que han entrat en oscil·lació periòdica amb la mateixa freqüència però amb un cert desfasament mutu. La freqüència d'oscil·lació és determinada pels mecanismes de la dinàmica interna i s'ha de remarcar que el sistema va oscil·lant tot i que el paràmetre de control romangui constant.

L'amplitud de l'oscil·lació i, per tant, del cicle límit és al principi petita però pot créixer notablement a mesura que ens allunyem de la bifurcació. Això ens recorda el que va succeir el 7 de novembre de 1940 amb el pont sobre el riu de Tacoma Narrows, el qual va entrar en oscil·lació de tipus torsional sota l'acció d'un vent i va acabar ensorrant-se. Aquest fet a vegades s'ha atribuït erròniament a una ressonància forçada induïda per un vent oscil·lant del qual, però, ningú té constància. Tot sembla indicar que es va produir una bifurcació de Hopf amb la mala sort que l'amplitud de l'oscil·lació va superar la resistència de l'estructura. L'exemple ens permet remarcar la diferència entre la bifurcació de Hopf i la ressonància d'un oscil·lador forçat.

Les propietats de qualsevol fenomen dinàmic són generals i, a la pràctica, podem prescindir completament dels detalls concrets del sistema que estiguem estudiant.

De fet, així ho farem al llarg de l'article i sovint perdrem de vista les temperatures i la llum. Això no obstant, de tant en tant convé pensar en què és el que està succeint dins d'un sistema dinàmic concret. Considerem, per exemple, un dispositiu BOITAL en oscil·lació autosostinguda després d'haver fet una bifurcació de Hopf. Tenim que l'absorció de llum va variant en el temps perquè les interferències així ho manen i en resulta una ona de variacions de temperatura que es propaga per l'espaiador. Les variacions de temperatura fan variar el camí òptic de les dues capes amb un cert desfasament entre elles i el canvi de fase que experimenta la llum en resulta conseqüentment afectat. Les variacions en el canvi de fase òptica afecten la potència de llum en el mirall absorbent a través de les interferències i ja tenim tancat el bucle de realimentació. Com que



l'oscil·lació funciona de forma estable, això vol dir que hi ha sincronització temporal i balanç energètic entre les variacions en la potència absorbida i el transport tèrmic a través de les capes de l'espaiador. En aquest cas la freqüència d'oscil·lació està relacionada amb el temps de difusió tèrmica dins la cavitat. Tot això, no ho oblidem, amb la potència incident fixa.

De tota manera el lector curiós encara no està satisfet i es pregunta per què ho fa això el dispositiu?, per què no s'està quiet?, per què ha fet la bifurcació de Hopf? Doncs, resulta que la solució estacionària on el sistema podria estar quiet s'ha fet inestable. Això vol dir que la solució, el punt fix, existeix però el sistema

d'atracció del cycle límit i la d'un altre atractor situat en un altre lloc de l'espai de fases. En el moment just d'entrar en contacte, la varietat atractiva i la repulsiva coincideixen una amb l'altra i ambdues es confonen amb el propi cycle límit, i constitueixen el que s'anomena *òrbita homoclínica*. El període de l'òrbita ha anat augmentant en apropar-se a la sella i acaba fent-se infinit en el moment de la connexió homoclínica. Això és degut a l'efecte ralentitzador del punt fix ja que, recordem-ho de quan tractàvem del pèndol, tant l'arribada com la sortida del punt són asimptòtiques en el temps. Dient el paràmetre de control més enllà de la connexió homoclínica el que tenim és la desaparició

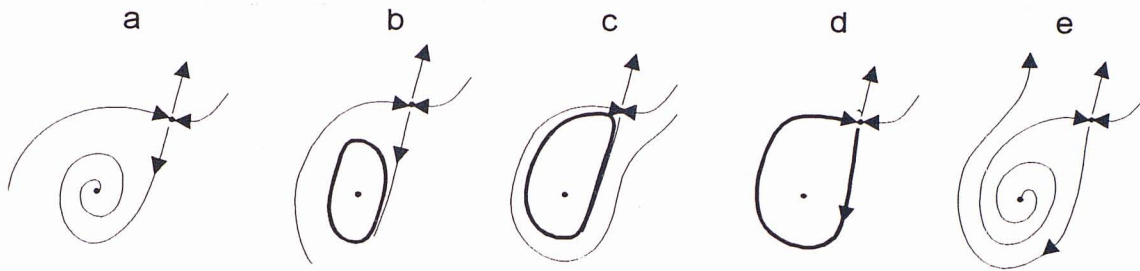


Figura 7: Il·lustració del fenomen de bifurcació homoclínica en una seqüència de cinc retrats de l'espai de fases. a) El node d'una parella sella-node s'ha fet focus. b) El focus ha fet una bifurcació de Hopf i fent-se inestable ha generat un cycle límit. c) Mentre el cycle límit va creixent i es va acostant a la sella, aquesta plega una branca de la seva varietat invariant atractiva i tendeix a embolcallar el cycle límit. d) El cycle límit entra en contacte amb la sella i, alhora, les seves varietats invariants es connecten entre si i es confonen amb el cycle límit. L'òrbita periòdica s'ha convertit en homoclínica i el període s'ha fet infinit perquè el pas pel punt sella és doblement asimptòtic. e) El cycle límit ha desaparegut i les varietats invariants de la sella s'han creuat. En la zona no hi ha cap atractor i el flux se'n va cap a l'altra banda de la sella

no s'hi està perquè qualsevol pertorbació el fa marxar. Els mecanismes dinàmics a través de la realimentació tendeixen a amplificar l'efecte de les pertorbacions externes i a convertir-lo en un moviment oscil·latori a una determinada freqüència.

### Influència de la sella. Bifurcació homoclínica

La bifurcació de Hopf d'un punt estable és un fenomen que implica necessàriament que el punt en qüestió participi també en una bifurcació sella-node. Això vol dir que l'òrbita periòdica té o tindrà un punt sella en les seves proximitats. Imaginem-nos, doncs, una òrbita periòdica que, en anar variant el paràmetre de control, va creixent a la vora d'un punt sella. Què passarà si l'òrbita s'acosta a la sella fins a tocar-la?

Per comprendre bé la situació ens ajudarem dels diagrames de la figura 7 que il·lustren el cas d'un sistema de dimensió dos. Recordem que un punt sella té una varietat invariant atractiva o d'entrada i una varietat repulsiva o de sortida. Aquestes varietats són corbes que van modificant-se en canviar el paràmetre de control i el seu paper és essencial en el fenomen que ara considerarem. Abans de produir-se el contacte, la varietat repulsiva de la sella va a morir al cycle límit i la varietat atractiva fa de separatriu entre la conca

del cycle límit i, ara, totes les trajectòries que surten del focus inestable escapen cap a l'altre atractor. Ha succeït un nou tipus de bifurcació que ha afectat una zona extensa de l'espai de fases i, en particular, ha destruït una òrbita periòdica fent-li el període infinit. Es parla d'una *bifurcació homoclínica*.

En el cas de dimensió dos que estem considerant no succeeix gaire cosa més del que acabem de dir i així ho il·lustra la figura 8 per a un dispositiu BOITAL bicapa. Ara bé, en sistemes de dimensió més alta les bifurcacions homoclíniques poden generar dinàmiques complexes de tipus caòtic. El fet essencial és que quan la sella s'acosta a la connexió homoclínica es i produeix un flux que circula de forma recurrent a prop seu. És a dir, hi ha un conjunt de trajectòries que passen a la vora de la sella, s'allunyen i tornen a acostar-s'hi tot seguint les varietats invariants d'aquesta.

També és important saber que la bifurcació homoclínica és un fenomen lligat a la bifurcació de Hopf, i ambdós a la bifurcació sella-node. De fet, el conjunt de les bifurcacions que pugui arribar a fer la família d'un sistema dinàmic forma una estructura ben lligada a l'espai de paràmetres. És com un trencaclosques amb diferents nivells que mai s'arriba a resoldre completament.



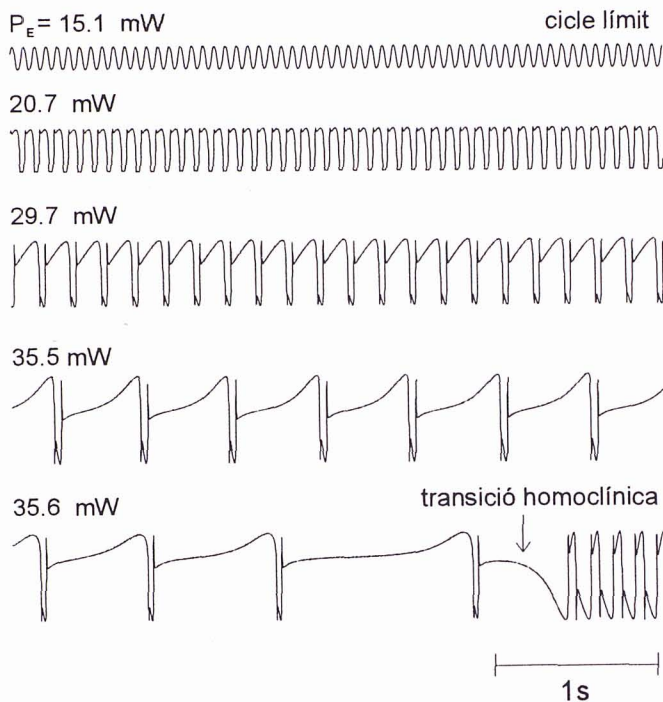


Figura 8: Observació d'una bifurcació homoclínica en la resposta d'un dispositiu BOITAL amb una bicapa de vidre i oli de 140 i 75  $\mu\text{m}$  respectivament. Els registres presenten una seqüència d'evolucions temporals de la llum reflectida obtingudes per a diferents potències incidents. L'estat oscil·latori ha nascut d'una bifurcació de Hopf a una potència inferior. L'amplitud de l'oscil·lació va creixent amb la potència i el període es va allargant sota la influència de la sella cada vegada més propera. Els plegaments que apareixen primer en els màxims i després en els mínims del senyal són efectes interferencials sense significació dinàmica. Al mig de la panxa que s'estira és on l'evolució passa prop de la sella i, per això, s'hi entreté. A causa de les fluctuacions en la potència del feix làser no som capaços de seguir el creixement asimptòtic del període fins al final i ens adonem que la bifurcació homoclínica ja s'ha produït quan observem el que mostra el registre de baix de tot. L'òrbita periòdica ha desaparegut i tenim una evolució transitòria que dona unes voltes al focus inestable i s'acosta cada vegada més a la sella fins a passar a l'altra banda per dirigir-se a un altre atractor que, en aquest cas, és també un estat oscil·latori

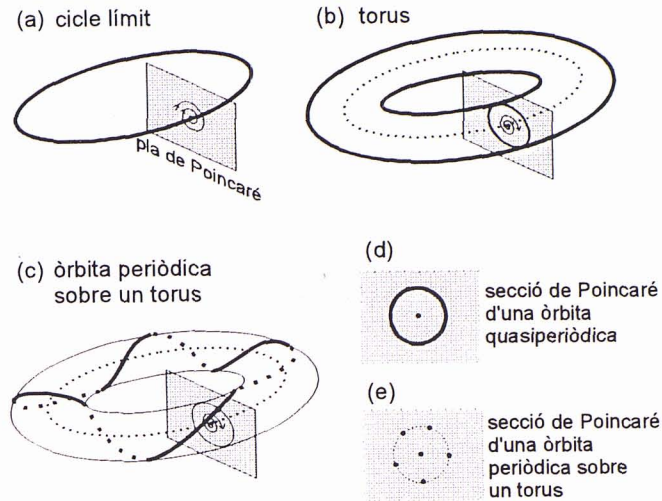


Figura 9: Il·lustració d'una bifurcació de Hopf sobre un cicle límit, que provoca el naixement d'un torus. En una secció de Poincaré el fenomen és equivalent a la bifurcació de Hopf d'un punt fix. L'evolució del sistema damunt del torus és una oscil·lació associada a dues freqüències. Si el quocient entre aquestes freqüències és un nombre racional, la trajectòria es tanca sobre si mateixa i constitueix una òrbita periòdica i a la secció de Poincaré apareixen un nombre discret de punts d'intersecció. Si les dues freqüències són incommensurables tenim una òrbita quasiperiòdica que no arriba mai a tancar-se i omple de forma densa tota la superfície del torus. En aquest cas la secció de Poincaré mostrarà una corba contínua i tancada, com si fos un cicle límit

### Òrbites quasiperiòdiques i torus invariants. Bifurcació de Hopf d'un cicle límit

Fins a dimensió dos ja hem vist tots els atractors possibles: punts fixos i cicles límit. Què més pot passar quan augmentem la dimensió de l'espai de les fases? Els *torus invariants* són l'extensió natural d'un cicle a una dimensió superior.

Què representa un torus? Un cicle límit descriu una oscil·lació periòdica a una freqüència determinada que ha sorgit d'una bifurcació de Hopf ocorreguda en un subespai de dimensió dos de l'espai de fases. Un torus és un objecte nascut d'un cicle límit que s'ha inestabilitzat i ha experimentat una segona bifurcació de Hopf en un pla transversal al sentit del cicle (vegeu figura 9). Un torus necessita, per tant, un espai de fases de dimensió tres, com a mínim, i expressa que el sistema està evolucionant amb dues freqüències d'oscil·lació. Però hem d'anar amb compte amb els torus. Si les dues freqüències són commensurables (el seu quocient és racional), l'atractor no és el torus, sinó una corba tancada que està sobre la superfície del torus i l'oscil·lació és periòdica amb període



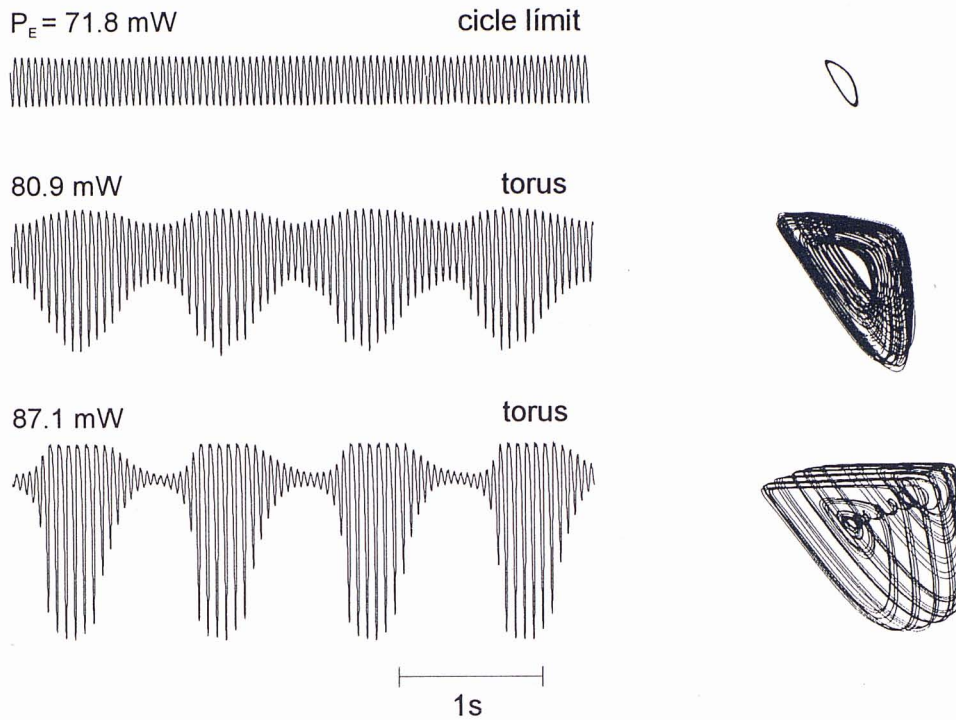


Figura 10: Evolucions temporals que mostren com una oscil·lació periòdica esdevé quasiperiòdica a través d'una bifurcació de Hopf que genera una segona oscil·lació més lenta que la inicial. També es mostren els atractors corresponents obtinguts en un símil d'espai de fases amb la tècnica de representar el mateix senyal però amb retards successius sobre tres eixos ortogonals. Els registres descriuen la resposta d'un dispositiu BOITAL quatricapa (vidre, gel òptic, vidre i oli de gira-sol amb guixos de 140, 35, 400 i 350  $\mu\text{m}$ ) per a tres potències incidents diferents

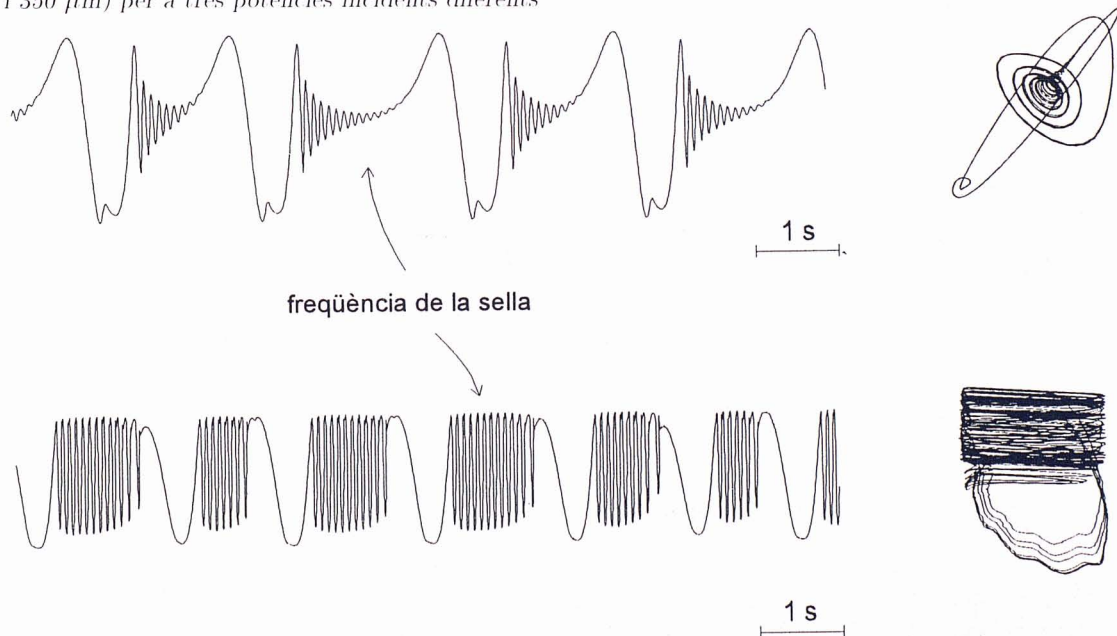


Figura 11: Evolucions amb dues freqüències d'oscil·lació observades en la resposta de dispositius BOITAL de dimensió tres. En ambdós casos la situació correspon a una òrbita periòdica que ha estat generada per bifurcació de Hopf d'un punt node i que ha crescut fins a apropar-se molt a una sella, la influència de la qual ha introduït la segona freqüència i ha fet que l'evolució deixés de ser periòdica. En el cas de dalt, la sella és un punt focus amb una espiral atractiva i, en el cas de sota, tenim un cicle límit sella que ha sorgit d'una bifurcació de Hopf del focus sella. L'aperiodicitat d'ambdós senyals es manifesta en el nombre d'oscil·lacions ràpides que cada cop és diferent



igual al mínim comú múltiple dels dos períodes combinats. Si les dues freqüències són incommensurables, aquesta corba no es tanca mai sobre si mateixa i acaba omplint tota la superfície del torus, de manera que en aquest cas sí que podem dir que el torus és l'atractor. L'òrbita que dona voltes al torus sense tancar-se correspon al que se'n diu una *oscil·lació quasiperiòdica*.<sup>1</sup>

El torus que acabem de descriure és un objecte de dimensió dos, una superfície, i com a mínim necessita tres dimensions per viure. Es parla d'un torus-2 i, suposant que les amplituds de les dues oscil·lacions superposades es mantinguin uniformes, tenim la típica imatge d'un "donut". S'ha de remarcar, però, que els torus poden presentar formes diverses i, a més a més, a mesura que augmenta la dimensió del sistema són possibles torus multidimensionals que contenen òrbites basades en un nombre superior de freqüències.

Els torus són molt corrents en els sistemes conservatius, fins i tot torus de dimensió arbitràriament alta. En presència de dissipació la situació és diferent. Per exemple, l'observació d'un torus-2 constitueix un fenomen relativament rar i quan es produeix acostuma a ser en sistemes de dimensió quatre com a mínim. Aquest és el cas que es mostra a la figura 10 i que correspon a la resposta d'un dispositiu BOITAL amb quatre materials dins de la cavitat.

## Oscil·lacions amb estructura complexa. Múltiples bifurcacions de Hopf

En aquest apartat toquem la qüestió de fins a quin punt pot fer-se complexa la resposta d'un sistema dinàmic si considerem dimensions cada cop més elevades. Ja hem parlat, i més endavant hi tornarem, del caos determinista que es pot produir a partir de dimensió tres. Ara, però, ens interessa un aspecte diferent. Volem saber quantes freqüències diferents pot arribar a exhibir l'evolució temporal d'un sistema de dimensió  $N$  i quin tipus de senyals poden resultar de la combinació no lineal de les oscil·lacions a les diferents freqüències. Quan parlem de freqüències diferents no pensem en l'espectre de Fourier d'un senyal que per alguna raó ha deixat de ser harmònic o fins i tot periòdic, sinó en oscil·lacions intrínsecament diferents. Oscil·lacions associades a diferents graus de llibertat del sistema, que sorgeixen de forma autònoma unes de les altres però que, quan adquireixen una mica d'amplitud, són acoblades pels mecanismes no lineals i originen senyals d'estructura complexa. Això no treu que, d'altra banda o a més a més, el sistema entri en règim caòtic cosa que fa que la seva evolució es torni aperiòdica i doni una certa impressió d'aleatorietat.

Acabem de veure a l'apartat anterior que, mitjançant

<sup>1</sup>Quasiperiòdica no equival a aperiòdica encara que ambdues siguin no periòdiques. Un senyal quasiperiòdic té un espectre de Fourier discret amb les freqüències característiques i les seves harmòniques.

diverses bifurcacions de Hopf produïdes successivament una sobre el resultat de l'anterior, es poden obtenir torus de dimensió igual al nombre de bifurcacions i que l'òrbita que viu sobre un d'aquests torus descriu una oscil·lació periòdica o quasiperiòdica basada en tantes freqüències diferents. També hem dit, però, que els torus són escàpols i difícils d'observar en els sistemes dissipatius. D'altra banda, també s'ha de dir que un cicle límit pot experimentar altres dos tipus de bifurcacions a més de la de Hopf. El doblament de període, que es pot veure a la figura 2, i la sella-node de cicles límit, que és equivalent a la de punts fixos. Ambdues bifurcacions, però, no introdueixen noves freqüències en el comportament del sistema. En aquest sentit la bifurcació de Hopf és única.

Ara veurem que hi ha una forma més bàsica, de fet prèvia a la dels torus, per generar senyals dinàmics amb múltiples freqüències. Considerem una parella de punts fixos, sella i node, que han sorgit d'una bifurcació sella-node en un espai de fases de dimensió  $N$ . El node en principi és estable en totes les direccions mentre que el punt sella té només una direcció inestable que el connecta amb el node. De dues en dues, les direccions estables es poden anar inestabilitzant en diferents bifurcacions de Hopf i d'aquesta manera els dos punts en conjunt poden arribar a experimentar fins a  $N - 1$  bifurcacions. És a dir, als voltants dels punts fixos es van formant, per a diferents valors dels paràmetres, uns fluxos en forma d'espiral que donen lloc primer a un comportament tipus focus convergent i després a un cicle límit que sorgeix del punt. Cada un d'aquests processos es produeix en un pla de diferent orientació a l'espai de fases i genera una freqüència d'oscil·lació diferent. La majoria dels cicles límit són inestables, de fet són selles, i no s'observen directament però, en canvi, sí que manifesten la seva influència sobre el cicle límit estable que puguem estar observant. A més a més, si la dimensió ho permet, també es poden formar torus a partir dels cicles límit, però s'ha de remarcar que les freqüències generades seran les mateixes que les dels punts fixos.

El que acabem de dir de forma tan genèrica ens ho il·lustren els senyals de la figura 11 per a un sistema de dimensió tres i els de la figura 12 per a un cas de més complexitat corresponent a dimensió sis. En un espai tridimensional no poden manifestar-se més de dues freqüències, l'una associada al node i l'altra a la sella, ja que els plans de les dues bifurcacions de Hopf cobreixen tot l'espai. En un espai de dimensió sis el punt node com a màxim podrà inestabilitzar-se en tres plans diferents i podrà originar fins a tres freqüències. El punt sella només ho podrà fer en dos plans, ja que de naixement té una direcció inestable. En total el sistema podrà exhibir fins a cinc freqüències diferents en la seva evolució temporal. No cal que ens fixem gaire en els detalls, ni tampoc en el fet que els senyals de la figura 11 i



el de la banda dreta de la figura 12 siguin aperiòdics. El que ara ens importa destacar és que tenim una evolució determinista amb un cert grau de complexitat. La repetitivitat estructural del senyal expressa clarament que el sistema està evolucionant sota el control dels seus mecanismes interns, és a dir, de forma determinista. El grau de complexitat és difícil de quantificar però el podem posar en evidència fent-nos la pregunta de què dirien els que estan escodrinyant els confins de l'univers si detectessin senyals com els de la figura 12 provinents d'una galàxia llunyana. I cal no oblidar que, en el nostre cas, el responsable no és altre que un entrepà de vidres i líquids entre dos miralls, ni tampoc que el nombre de pisos d'un entrepà no sembla que tingui límit des d'un punt de vista fonamental.

que pot arribar a fer un sistema dinàmic de dimensió  $N$ . Això sí, donant per suposat que  $N$  pot ser tan gran com convingui, que, d'això, ja se'n cuida la realitat. Tot seguit, però, s'ha de dir que entre els sistemes dinàmics correntment estudiats no se'n coneixen gaires que facin senyals semblants al de la figura 12. De fet, els sistemes BOITAL han estat els primers i, fins ara, els únics. Però, és clar, estem parlant de sistemes estudiats al laboratori o a l'ordinador. Potser a fora el carrer les coses són més riques, qui sap! Ara és l'hora de notar una particularitat dels sistemes BOITAL que és en gran part responsable de la seva riquesa dinàmica: la no-linealitat  $A(\Psi)$  és funció d'una combinació lineal de totes les variables  $\Psi_j$ . Això no és corrent i, de fet, en els models normalment estudiats les no-linealitats acostumen a afectar una o,

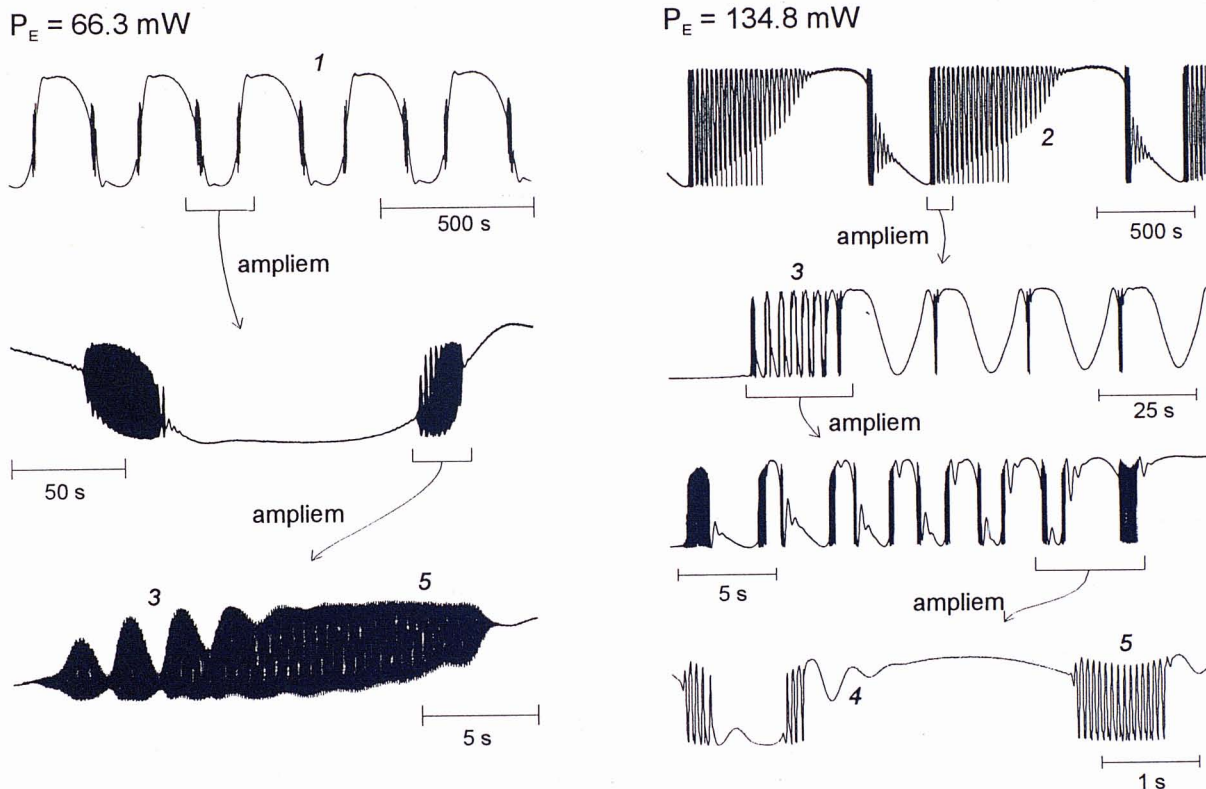


Figura 12: Dues evolucions temporals de certa complexitat observades en la resposta d'un dispositiu BOITAL de dimensió sis. Aquests senyals formen part d'una sèrie per a diferents potències incidents que mostra un procés d'aparició de les cinc freqüències d'oscil·lació del sistema. El cas de l'esquerra correspon a una potència a la qual només s'observen tres freqüències. Totes provenen del node i l'atractor que estem observant és encara lluny de la sella. En augmentar la potència incident, l'atractor s'apropa a la sella i manifesta la seva influència en les dues freqüències addicionals que es poden apreciar en el cas de la dreta. En aquest cas la sella encara no ha fet cap bifurcació de Hopf però conté dues espirals atractives que són responsables de les oscil·lacions. Les freqüències de la sella tenen valors intermedis a les del node i totes estan identificades sobre els registres amb uns números que expressen l'ordre de petita a gran. Noteu que el període més llarg és unes 16.000 vegades el període més curt i, si voleu una idea més intuïtiva, penseu que això significa que, si el període ràpid fos un dia, la seqüència d'oscil·lacions tornaria a començar de nou al cap de 45 anys

Bé, hem arribat a un punt que no tenim clar. Estem a la frontera del nostre treball d'investigació. Ens fem la pregunta de si realment hem trobat un camí a la complexitat a través de les  $N - 1$  bifurcacions de Hopf

com a màxim, dues variables del sistema. En contrast, si pensem en sistemes de naturalesa econòmica o social els mecanismes d'acoblament global semblen a l'ordre del dia.



En particular, potser tenim un camí relacionat amb l'origen de la turbulència o, dit d'altra manera, un camí que condueix a la turbulència dins de la teoria dels sistemes dinàmics. L'origen de la turbulència, ja sigui en fluids i en les equacions de Navier-Stokes, o en altres equacions en derivades parcials més simples, és un problema encara pendent de resoldre. Rayleigh i Reynolds van ser dels primers a plantejar-lo ja fa més d'un segle. Landau i el mateix Hopf van postular fa cinquanta anys que una forma d'arribar a respostes amb característiques de turbulència podia ser a través d'una cadena indefinida de bifurcacions que d'un punt fix duguessin a torus de dimensions successivament més elevades amb tantes i tantes freqüències diferents d'oscil·lació. Aquesta idea va ser abandonada definitivament al llarg dels anys setanta perquè, com ja hem dit, en els sistemes dissipatius els torus són objectes molt fràgils i sobretot perquè, en aquell moment, es va descobrir el caos. Durant un cert temps es van veure molts punts en comú entre el caos i la turbulència, i els dos termes van ser usats com a sinònims en no poques ocasions. Els punts en comú hi són i és possible que hi hagi caos en els règims turbulents, però els processos de generació de caos no impliquen la participació de gaires graus de llibertat i no serveixen per introduir un nombre elevat de freqüències característiques del sistema.

## Caos determinista i atractors fractals. Cascades de bifurcacions

Ara volem diferenciar entre evolucions regulars i irregulars, i això independentment del seu grau de complexitat. Hem parlat de solucions estacionàries en els punts fixos, òrbites periòdiques en els cicles límit, i òrbites periòdiques i quasiperiòdiques damunt dels torus invariants. Totes corresponen a comportaments regulars, fins i tot les quasiperiòdiques, que, recordem-ho, no s'arriben a tancar mai perquè resulten de la combinació de dues o més oscil·lacions amb freqüències incommensurables entre si. Totes viuen sobre objectes de dimensió ben definida. Els punts són de dimensió zero, els cicles de dimensió u i els torus poden ser de qualsevol dimensió entera a partir de dos. També hem parlat de les evolucions irregulars dels estats caòtics i d'algunes de les seves característiques, entre les quals la més significativa és la sensibilitat a les condicions inicials i la consegüent limitació de predictibilitat. Com veurem, les evolucions caòtiques es desenvolupen damunt d'objectes de dimensió no entera, és a dir, fraccionària. Objectes embolicats fets a base de plegaments i entortolligaments successius i que formen part del món dels *fractals*. Els atractors que tenen aquest comportament són anomenats *atractors estranys* i, malgrat que no és gens fàcil determinar l'existència matemàtica d'un d'aquests atractors, des del punt de vista pràctic s'acostuma a suposar que n'hi ha un sempre que s'observa una evolució caòtica

que es desenvolupa atrapada en una zona ben definida de l'espai de fases. En el garbuix de l'atractor es troben imbuïdes un nombre il·limitat d'òrbites periòdiques inestables, la qual cosa vol dir que per arribar-hi ha fet falta un nombre indefinit de bifurcacions que les hagi creat. Es podria pensar que, de fet, l'evolució aperiòdica no és res més que una trajectòria que va seguint momentàniament les diferents òrbites periòdiques i saltant entre elles de forma aleatòria. Però aquesta interpretació no explicaria el comportament determinista observat en molts casos, tant numèricament com experimentalment. El sistema en estat caòtic evoluciona sota control de la seva dinàmica i a l'espai de fases hi ha alguna cosa ben definida vers la qual aquest sistema tendeix asimptòticament.

Tradicionalment es diu que es coneixen tres tipus de processos que duen al caos o, dit d'altra manera, en tota situació de caos sempre s'hi troba involucrat un d'aquests processos com a mínim. Són les anomenades *rutes al caos*: el doblament de període, la ruta quasiperiòdica i les intermitències. No entrarem en detalls sobre aquestes rutes, excepte pel que fa al doblament de període mostrat a la figura 2, i referim el lector a qualsevol dels textos indicats a les referències. Un fet remarcable d'aquests processos és que presenten unes característiques generals independents del sistema concret. Des d'un punt de vista més general se sap que, com a rerefons de qualsevol procés al caos, sempre hi ha una connexió homoclínica d'una solució sella i és aquesta connexió la que provoca la seqüència d'esdeveniments que transformen la resposta del sistema en caòtica.

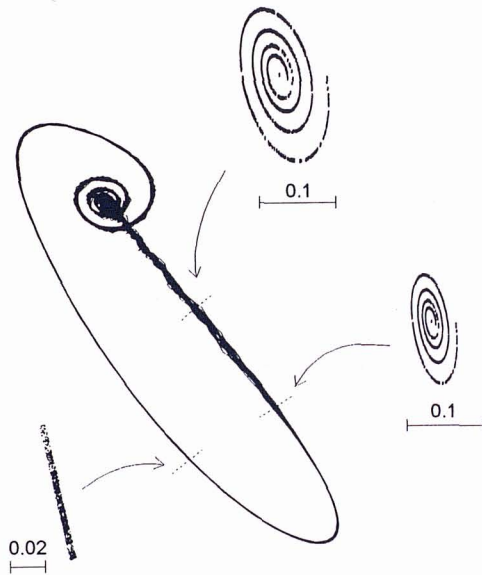
Passem ara a la qüestió de com caracteritzar les evolucions observades a fi i efecte de determinar si són o no caòtiques. Abans de res hem de recordar el fet que, a l'espai de fases, dues trajectòries no es poden tallar si no és de forma asimptòtica en una singularitat com, per exemple, són els punts fixos. Això ho demostra el teorema d'unicitat de les equacions diferencials i això implica que en espais de dimensió dos només poden existir solucions regulars, ja siguin punts fixos o òrbites periòdiques. El mateix succeeix damunt la superfície d'un torus dos. Són necessàries, com a mínim, tres dimensions perquè l'evolució pugui ser aperiòdica.

El primer indicador d'un possible comportament caòtic és senzillament la pròpia irregularitat de l'evolució observada. La transformada de Fourier del senyal permet comprovar fins a quin punt l'espectre és continu i quin rang de freqüències cobreix. La situació més típica consisteix en un senyal que va variant, creixent i disminuint, d'una forma que sembla imprevisible o aleatòria com és l'últim cas de la figura 2. Altres vegades la irregularitat consisteix en variacions de detall en una estructura més o menys complexa que es va repetint en l'evolució, com serien els casos de les figures 11 i 12. Tan caòtic pot ser un tipus de senyal com l'altre. La



riquesa estructural i l'aperiodicitat són dues coses independents. Vista a l'espai de fases, l'evolució caòtica consisteix a anar repetint indefinidament un determinat tipus d'òrbita però fent cada volta diferent de les anteriors. L'estructura i el contingut en freqüències de l'òrbita bàsica és una cosa i el fet que les òrbites successives no siguin iguals n'és una altra. Això últim és l'origen de l'aperiodicitat i de l'espectre continu en la transformada de Fourier. Allò primer determina el nombre de freqüències característiques i posa en evidència el nombre de graus de llibertat que participen efectivament en la dinàmica. Per exemple, en sistemes de dimensió tres els estats caòtics poden arribar a contenir fins a dues freqüències característiques i moltes vegades una de les dues predomina clarament, tot i que la transformada de Fourier doni un espectre continu. Que ningú es pensi que cada volta a l'atractor correspon a una de les freqüències de l'espectre continu o, dit d'altra manera, que el sistema en estat caòtic presenta infinites freqüències característiques.

### Simulació numèrica



Penseu, per exemple, en la llum reflectida pels dispositius BOITAL. Afortunadament, però, està demostrat que un únic senyal temporal conté tota la informació qualitativament significativa sobre l'evolució dinàmica del sistema i, també, que és possible convertir aquest senyal en una trajectòria dins un succedani de l'espai de fases del sistema. Aquesta tècnica, anomenada *embedding* en anglès, consisteix simplement a representar el mateix senyal sobre diferents eixos, però considerant valors del senyal successivament separats en el temps per una sèrie de retards fixos que en cada cas s'han d'escollir apropiadament (vegeu exemples a les figures 2, 5, 10 i 11). L'espai de fases així definit pot tenir dimensió arbitrària i en cada cas s'ha d'escollir la que sembli més convenient. La trajectòria obtinguda dóna una idea visual de la forma de l'atractor i de la possible presència de singularitats en el decurs del flux i, sobretot, permet observar detalls estructurals de l'atractor efectuant seccions de Poincaré.

El que estem dient es pot veure il·lustrat a la figura

### Resultats experimentals

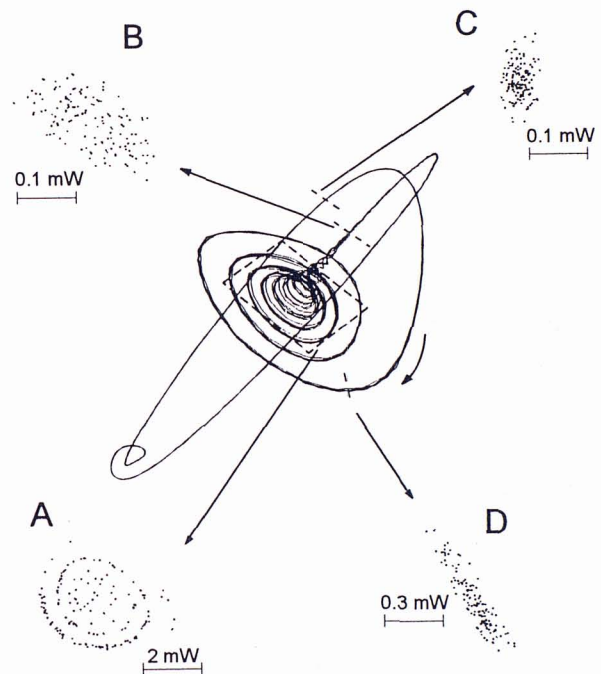


Figura 13: Estudi de l'atractor d'un sistema BOITAL que es troba enmig d'una bifurcació homoclínica associada a un focus sella que satisfà les condicions per generar caos. Els resultats de la simulació numèrica i de l'experiment són qualitativament equivalents i les diferències són degudes al fet que les dues representacions són en espais diferents. Les seccions de Poincaré realitzades en diferents zones de l'atractor il·lustren els processos de contracció, estirament i plegament que sofreix el flux en donar-li voltes i suggereixen la seva estructura fractal

Un segon grup d'indicadors es pot tenir a partir de les propietats de l'atractor en què es troba el sistema. Ara bé, mentre que en una simulació numèrica les representacions a l'espai de fases són immediates, la cosa no és tan evident en un cas experimental on normalment s'observa l'evolució temporal d'una única magnitud que, a més, no té per què ser una de les variables.

13 on es presenten alhora un exemple numèric i un resultat experimental, ambdós corresponents a una evolució temporal com la de la part superior de la figura 11. Es tracta d'una òrbita que va passant repetidament a la vora d'un focus sella que té una varietat atractiva bidimensional del tipus espiral i una varietat repulsiva unidimensional. La sella està a punt de fer connexió



homoclínica, és a dir la varietat de sortida es plega i retorna cap a la sella prop de la varietat d'entrada. Aquestes varietats no estan representades en la figura però pràcticament coincideixen amb l'atractor i de fet l'estan embolcallant. A cada passada vora la sella, la trajectòria fa un nombre determinat de voltetes que depèn de la seva distància relativa a la varietat atractiva. Si arriba just per la varietat atractiva anirà fent espirals indefinidament fins a tocar asimptòticament el punt i, en canvi, en farà un nombre molt reduït si arriba molt allunyada de la varietat. D'altra banda, podria ser possible que la trajectòria es tanqués sobre si mateixa i llavors tindríem una òrbita periòdica, però en el cas de la figura 13 no és així i la trajectòria observada és aperiòdica. Això vol dir que, des del punt de vista matemàtic, la trajectòria no es repeteix mai i que a cada volta gran fa un nombre (real) diferent de voltetes en l'espiral. El fet que sigui així depèn dels detalls del flux a la vora del punt sella, concretament depèn de si l'apropament és més o menys ràpid que l'allunyament. El cas de la figura 13 correspon a una situació propera al límit en què podríem tenir una òrbita periòdica estable i l'hem escollit perquè l'atractor presenta una estructura molt clara. De fet, sabem que, d'òrbites periòdiques, n'hi ha moltíssimes, cada una amb una forma lleugerament diferent, però totes són inestables i no són observades en l'evolució del sistema. No obstant això, mitjançant tècniques de pertorbació polsada sobre un paràmetre, és possible mantenir l'evolució del sistema damunt d'una de les seves òrbites periòdiques inestables. És el que s'anomena *control del caos*.

Considerem ara les seccions de Poincaré fetes en diferents plans de l'atractor. Els punts de cada secció representen les interseccions successives que la trajectòria ha anat fent amb el pla escollit durant un cert interval de temps i, si aquest interval és prou llarg, tenim una descripció aproximada de com és l'atractor en cada un dels plans. Aquestes seccions posen de manifest les operacions geomètriques que tenen lloc a l'espai de fases en una situació de caos. Tenint en compte que l'escala de les representacions va canviant, podem veure que des de la secció A fins a la C hi ha una forta *contracció* que, sent més pronunciada en una certa direcció, tendeix a convertir l'atractor en una cinta. Des de la secció C a la D es pot apreciar un *estirament* que ha allargat l'amplada de la cinta i, finalment, de la secció D a la A s'ha produït un *plegament* que entortolliga l'atractor com un cargol. En la contracció posterior, el cargol es fica dins del gruix de la cinta i, després, la cinta s'estira i fa un cargol que la contracció de nou ficarà dins de la cinta. Totes aquestes operacions estan associades a les propietats del punt sella i van fent feina gràcies que el flux retorna de forma recurrent a la seva vora. D'una banda, sembla que l'atractor sigui pràcticament una superfície, és a dir, un objecte de dimensió dos, però no és així ja

que la cinta té un cert gruix. Per tant, semblaria que ocupa un volum, és a dir, que té dimensió tres. Ara bé, si la trajectòria, en donar voltes, va passant successivament per uns punts ben determinats del gruix de la cinta sense omplir-la del tot i, alhora, els espais ocupats són discontinus, llavors la dimensió de l'atractor no és ni dos ni tres i tenim un objecte fractal. Les limitacions de precisió en el cas experimental i les limitacions de la representació a base de punts en el cas numèric, fan que aquesta microestructura es difumini dins de la cinta, en el cas experimental, i no pugui ser observada en la simulació numèrica. Per exemple la dimensió de l'atractor numèric de la figura 13 és 2.03, la qual cosa vol dir que, contràriament a la impressió que dona la secció de Poincaré, la cinta està més buida que no pas plena.

La *sensibilitat a les condicions inicials* típica d'una evolució caòtica pot ser fàcilment posada en evidència en la simulació numèrica. N'hi ha prou de considerar un conjunt de condicions inicials molt properes i comprovar que els mecanismes del sistema dinàmic fan que, a mesura que transcorre el temps, es vagin separant fins a distribuir-se per tot l'atractor (vegeu figura 14). És a dir, el futur pot ser molt diferent per a punts inicialment molt propers. Ara bé, un futur diferent vol dir que passarà per la sella més tard o més d'hora i que en un moment concret farà un nombre determinat de voltetes que seria diferent si hagués sortit d'un altre punt. El fet és que les condicions inicials no modifiquen l'atractor i que el sistema evolucionarà al seu voltant fent pràcticament el mateix, encara que la seqüència temporal podrà ser molt diferent per a cada condició inicial. Més crític podria ser si variéssim els paràmetres del sistema ja que, enmig del règim caòtic, l'atractor sí que és sensible a determinats paràmetres i pot patir canvis tant radicals com desaparèixer. També podem imaginar situacions en què convisquin diversos atractors molt propers, de manera que una petita fluctuació de les variables pugui fer saltar el sistema de la conca d'un atractor a la d'un altre, o situacions en què un únic atractor presenti una estructura amb múltiples branques on el flux a vegades vagi per un cantó o per l'altre. És en aquest context on agafa un cert sentit l'anomenat *efecte papallona*: una papallona en un camp de flors pot fer que demà hi hagi un huracà a l'altra banda del món. Seria qüestió d'imaginar com funciona el sistema atmosfèric de cara als efectes climàtics, veure com és l'espai de fases i com són els atractors i, finalment, entendre com una papallona podria intervenir-hi. Sense arribar a tant sí que volem dir que l'efecte papallona és una exageració un xic perillosa des del punt de vista divulgatiu. Fa pensar coses que no són. Tornem a fixar-nos en el conjunt de punts que descriuen diverses condicions inicials i com es modifica el volum ocupat per aquests quan el sistema es troba en un estat caòtic. És evident que



el volum s'estira moltíssim en la direcció del flux però, d'altra banda, sabem que la dissipació l'obliga a disminuir globalment i, per tant, hi ha d'haver una contracció en altres direccions encara més pronunciada que l'estirament. En aquest sentit, l'atractor pot ser caracteritzat mitjançant una sèrie de valors numèrics, tants com la dimensió del sistema, que es poden obtenir a partir de l'evolució temporal i que són els anomenats *exponents de Lyapunov*. Aquests números indiquen el grau d'expansió o contracció del flux en les proximitats d'una òrbita o d'un atractor i en relació amb les diferents direccions. Els exponents negatius indiquen contracció i els positius expansió. Per exemple, en un espai de dimensió tres, un punt fix estable té els tres exponents negatius mentre que un cicle límit estable en té un igual a zero, que correspon a la direcció de l'òrbita, i dos més de negatius. Un atractor caòtic té un exponent positiu, que expressa la divergència de les trajectòries, un d'igual a zero i un tercer de negatiu. D'aquesta manera, doncs,

### Cursa de punts en un atractor caòtic

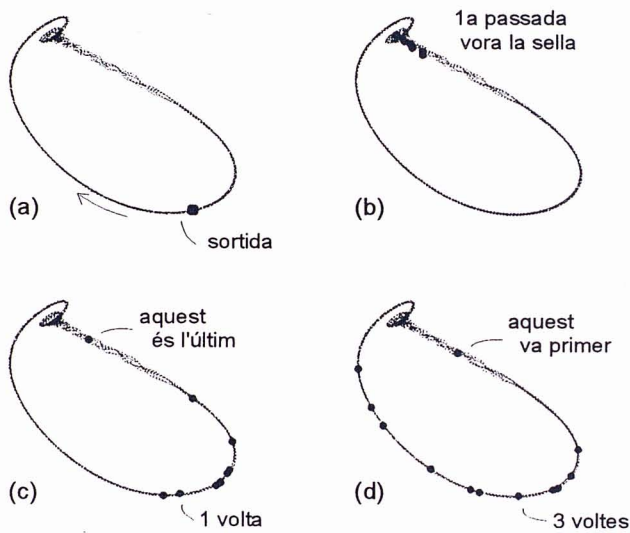


Figura 14: Il·lustració del fenomen de la sensibilitat a les condicions inicials en una cursa celebrada numèricament a la vora d'un atractor caòtic. Tenim un sistema en evolució caòtica i sobre l'atractor corresponent hem representat quatre instantànies de les posicions d'un conjunt de 12 corredors que inicialment es trobaven molt propers els uns dels altres. És a dir, hem escollit un conjunt de punts com a condicions inicials, els hem deixat evolucionar sota les equacions del model matemàtic i hem marcat les seves posicions en determinats instants posteriors. Després de tres voltes, els corredors ja es troben escampats per tot l'atractor i, per més junts que els haguéssim posat a l'hora de la sortida, també s'escamparien encara que necessitarien més voltes

l'aparició d'un exponent de Lyapunov positiu assenyala un comportament propi de dinàmica caòtica. En espais

de dimensió superior a tres fins i tot és possible tenir atractors amb més d'un exponent de Lyapunov positiu: és l'anomenat *hipercaos*.

Finalment, veurem un tercer tipus d'indicadors que permeten caracteritzar una evolució potencialment caòtica

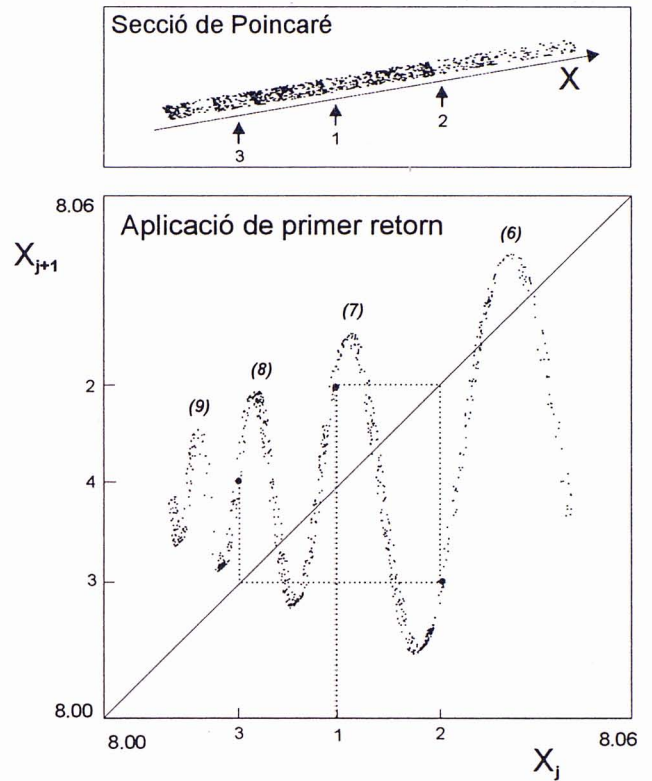


Figura 15: Demostració de la correlació determinista d'una evolució caòtica mitjançant una aplicació de primer retorn corresponent al cas numèric de la figura 13. La secció de Poincaré de l'atractor és un corba molt més llarga que gruixuda i cada un dels seus punts pot ser caracteritzat per una única coordenada definida al llarg de la corba. Recordem que els punts de la secció descriuen les successives interseccions de la trajectòria amb el pla de Poincaré. L'aplicació de primer retorn relaciona el pas d'una volta amb el de la volta anterior i la forma ben definida de la representació garanteix que la dinàmica del sistema controla l'evolució futura. Per exemple, després de passar per la posició 1, el sistema passarà a la propera volta per la posició 2, a continuació per la 3 i així successivament. Si insistim una mica en la iteració i considerem dos punts de partida lleugerament diferents, es pot comprovar la sensibilitat a les condicions inicials. L'aplicació proporciona també informació sobre com són les successives òrbites ja que hi ha una relació entre cada una de les ondulacions de la representació i el nombre de voltetes en espiral que fa la trajectòria en passar vora la sella. Els números entre parèntesi al damunt de les ondulacions indiquen el nombre de voltetes corresponents als punts dels màxims. Si ens fixem en l'exemple, podem veure que la seqüència de posicions 1, 2, 3 correspon a unes òrbites que aproximadament han fet 7,1, 6,4 i 8,25 voltetes, respectivament



tica. Es tracta d'analitzar la correlació entre el present i el futur o, dit d'altra manera, fins a quin punt és determinista l'evolució que a simple vista sembla aleatòria. Suposem un cas, com el de la figura 13, en què la dissipació fa que l'atractor aparegui a les seccions de Poincaré com una línia de gruix molt més prim que la seva longitud. Això vol dir que podem caracteritzar els punts per on successivament va passant la trajectòria mitjançant una única coordenada  $i$ , d'aquesta manera, tenim una seqüència ordenada de valors, sia  $X_j$ , que ens descriu l'evolució. La relació entre la coordenada d'una intersecció respecte a la de la precedent ens dona una aplicació de Poincaré que, en aquest cas, és definida per una única variable  $i$ , per tant, pot ser fàcilment representada en un gràfic. Tenim el que també s'anomena una *aplicació de primer retorn*. Si la representació de  $X_{j+1}(X_j)$  mostra una forma ben definida voldrà dir que l'evolució té lloc de forma determinista ja que la podrem anar aplicant de forma iterativa indefinidament. Això ho il·lustra la figura 15 amb una simulació numèrica i la figura 16 amb dos exemples experimentals. Els detalls són un pèl complicats però ens hi entretenim perquè il·lustren com l'aplicació de primer retorn és el control més segur de la presència de caos determinista. Ens interessa remarcar les situacions de la figura 16. Fixem-nos que en el cas de baix apareix una estructura ben definida mentre que a dalt només és un núvol de punts. En el primer cas tenim una evolució determinista mentre que a dalt la correlació de l'evolució es veu interrompuda en algun punt de l'òrbita per alguna causa. Curiosament, però, en ambdós casos el càlcul de coeficients de Lyapunov en dona un de positiu, un de pràcticament zero i un de negatiu. El cas de dalt correspon a l'evolució temporal mostrada a la part superior de la figura 11 i a l'atractor de la dreta de la figura 13. L'estructura del senyal temporal i de l'atractor i el fet del coeficient de Lyapunov positiu indiquen a bastament que el sistema està evolucionant en relació amb un atractor caòtic. Però no n'hi ha prou per tenir caos determinista. Per entendre el que està passant ens hem de fixar en la secció C de l'atractor de la figura 13 i hem de saber que el soroll en la potència del feix làser incident és suficient per produir fluctuacions de l'ordre del gruix de la secció de l'atractor. Això significa que quan la trajectòria del sistema passa per la zona C, hi ha una elevada probabilitat que una fluctuació aleatòria interrompi la correlació i llavors la volta següent no serà conseqüència de l'anterior. La sensibilitat al soroll és una característica intrínseca del caos i, en moltes ocasions, és difícil distingir entre caos i soroll.

### Això és tot? No hi ha res més?

Francament, si aquest és el tipus de preguntes que s'està fent el lector en aquest moment és que hem aconseguit entrar en ressonància. Satisfacció total. Però només per

### Aplicació de primer retorn (experimental)

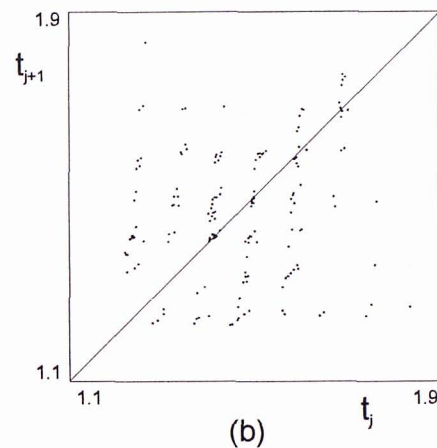
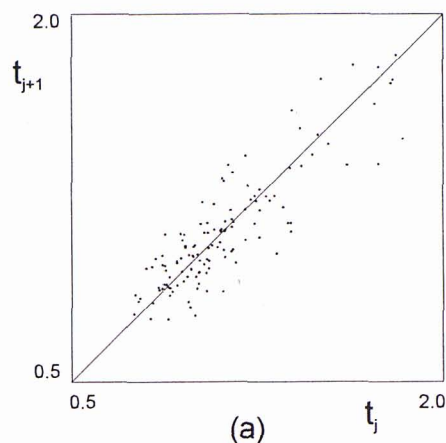


Figure 16: Representació de dues aplicacions de primer retorn corresponents als resultats experimentals de la figura 11. En aquest cas la variable representada no és la posició sobre la secció de Poincaré sinó el temps que transcorre entre dues passades successives per la secció de Poincaré. És a dir, s'ha representat el temps de vol d'una òrbita en funció del temps de l'anterior. Són representacions qualitativament equivalents però la del temps de vol resulta més directa en els casos experimentals. En la representació de sota es pot veure clarament una estructura amb set branques, que garanteix el comportament determinista de l'evolució aperiòdic. En canvi, el núvol de punts de la representació de dalt indica que no hi ha correlació entre òrbites successives i que, per tant, no tenim caos determinista. No obstant això, altres indicadors suggereixen que el sistema està evolucionant sobre un atractor caòtic i que és el soroll el que interromp la correlació de la trajectòria allà on l'atractor es fa molt estret a causa de la contracció

un instant, perquè el lector s'haurà de quedar amb les ganes. I nosaltres també. No sabem gaire cosa més del que ja hem dit i ens haurem de conformar amb un



comentari genèric com el que segueix.

A grans trets la recerca de fenòmens dinàmics més complexos pot dirigir-se vers dos tipus diferents de situacions que, no cal dir-ho, il·lustrarem amb el contrapunt de la família BOITAL. D'una banda, fixem-nos en el fet que aquests dispositius corresponen a un món unidimensional en el sentit físic de l'espai. És a dir, tenen l'activitat dinàmica associada a la propagació tèrmica en la direcció perpendicular als miralls i, en canvi, les dimensions transversals no hi tenen cap paper. En altres paraules, el que hem anat veient al llarg de tot l'article correspon a una dinàmica estrictament temporal. Però imaginem-nos un dispositiu il·luminat per un conjunt de feixos paral·lels de llum que generen una matriu de sistemes semblants acoblats per la difusió tèrmica o, més en general, suposem que il·luminem uniformement una secció àmplia del dispositiu en lloc de focalitzar el feix de llum. Estem parlant dels *sistemes extensos*, ja siguin discrets o continus, on els efectes transversals combinats amb els longitudinals poden donar lloc a fenòmens de dinàmica espaciotemporal. En aquesta problemàtica destaquen la formació d'estructures i els comportaments col·lectius i també és de remarcar la possible relació amb els efectes de turbulència.

D'altra banda, fixem-nos també que els graus de lli-

bertat d'un dispositiu BOITAL participen en un únic bucle de realimentació i, a més a més, tots hi representen el mateix paper. En contraposició, imaginem-nos una xarxa de dispositius, diferents els uns dels altres i acoblats mútuament a través de les seves llums reflectides. També podríem imaginar dispositius BOITAL acoblats amb cel·les termoconvectives de Bénard i amb alguns circuits elèctrics no lineals. Aquí la complexitat arriba a través dels entrecreuaments i superposicions en l'estructura de bucles de realimentació i, també, en la combinació de sistemes diferents. Aquestes xarxes constitueixen *sistemes extensos distribuïts*, d'alguna manera, *jerarquitzats*. Aquí la imaginació es difumina i els estudis són pràcticament inexistents, potser impossibles. Hi ha treballs que fan referència a conjunts nombrosos d'elements dinàmics iguals i molt senzills, i que es troben acoblats col·lectivament a mode de xarxes neuronals, ja sia en sistemes tipus cervell o en agregacions d'individus que semblen simples com, per exemple, les formigues.

Bé, per acabar podríem començar a parlar sobre el que ha de ser un article de divulgació i sobre fins a quin punt nosaltres aquí ho hem aconseguit, però això ho deixarem per un altre dia, que ja és hora d'anar a dormir i nosaltres encara hem de passar pel laboratori a donar el sopar a la família BOITAL.