Què són els sistemes dinàmics?

Marc Figueras[*], **Josep Rius**[†], **Francesc Pi**[‡] i **Gaspar Orriols**[§]

Introducció

En els últims anys s'està sentint a parlar, cada vegada amb més força, d'una sèrie de conceptes relativament nous com ara "teoria del caos", "complexitat" o "sistemes dinàmics", i això es fa des de camps de coneixement tan diversos com la física, les matemàtiques, la biologia, l'ecologia i, fins i tot, l'economia i la sociologia. Ens trobem davant d'un problema clarament interdisciplinari. Fins i tot, hi ha qui pretén desenvolupar noves disciplines independents de les ciències establertes amb el propòsit d'explicar de forma general els anomenats *sistemes complexos*. Això contrasta amb la tendència dominant en els darrers decennis en què els científics s'han anat especialitzant cada vegada més i més, restringint-se a una parcel·la del coneixement cada vegada més petita i pràcticament oblidant què passa als altres camps i, fins i tot, a altres parcel·les de la pròpia disciplina.

L'objectiu d'aquest treball, que presentem dividit en dues parts, és orientar el lector en un aspecte concret de la problemàtica que estem comentant. Pretenem donar una introducció al món dels *sistemes dinàmics*, presentant en primer lloc què són i com es poden descriure, per passar posteriorment a veure què és el que poden arribar a fer. Això darrer ho il·lustrem amb resultats experimentals obtinguts amb un sistema dinàmic que estem estudiant al nostre laboratori. La primera part pretén ser general i, probablement, al lector se li farà densa i bastant abstracta. Recomanem llegir-la a mode d'introducció per tornar-la a llegir un cop acabada la segona part. La segona part no és que sigui fàcil però estem convençuts que al lector li resultarà més entretinguda. En qualsevol cas, convé fer-ne la lectura després de ben sopat i, sobretot, amb el televisor ben tancat.

[*] **Marc Figueras** (Barcelona, 1972) és llicenciat en Física per la UAB; actualment és becari d'investigació en aquesta universitat i està fent la tesi doctoral sobre comportaments de turbulència en sistemes dinàmics.

[†] **Josep Rius** (Vilanova i la Geltrú, 1974) és llicenciat en Física per la UAB; actualment és becari d'investigació en aquesta universitat i està fent un treball de recerca sobre sistemes dinàmics amb resposta temporal complexa.

[‡] **Francesc Pi** (Pont de Molins, 1959) és doctor en Física per la UAB i actualment és professor titular d'òptica en aquesta universitat. Ha treballat en biestabilitat òptica, tecnologia de capes primes i sistemes no lineals.

[§] **Gaspar Orriols** (Sant Just Desvern, 1950) és doctor en Física per la UB i actualment és catedràtic d'òptica a la UAB. Ha treballat en l'estudi de fenòmens d'interacció llum-matèria, biestabilitat òptica i sistemes no lineals.

De què estem parlant?

Els sistemes dinàmics tenen el do de la ubiqüitat. Això és degut al fet que pràcticament qualsevol cosa que se'ns pugui acudir pot ser considerada com un sistema dinàmic. N'hi ha prou que tingui estructura interna, amb graus de llibertat que li permetin transformar-se i que aquests graus de llibertat s'influeixin entre ells mentre evolucionen. Són necessàries, però, algunes condicions si volem que el sistema faci coses interessants. D'una banda, fa falta que les influències entre graus de llibertat es tanquin formant *bucles de realimentació.* D'altra banda, és necessari que entre les influències hi hagi *dependències no lineals.* No cal que el sistema posseeixi gaires graus de llibertat. Com veurem, fins i tot un únic grau de llibertat ja permet fer alguna cosa sorprenent. Ara bé, és clar que, com més graus de llibertat, més possibilitats hi ha de diversitat de comportaments. En aquest sentit, és necessari que les interdependències introdueixin efectes de competència a fi que en resultin fenòmens interessants.

La naturalesa d'un sistema dinàmic és determinada per la dels mecanismes d'interacció entre els seus graus de llibertat. Podem imaginar sistemes estrictament físics o químics, que poden ser relativament senzills, però també n'hi ha de molt complicats com el de l'atmosfera i els seus fenòmens metereològics. També tenim sistemes biològics o psicològics dins d'un individu, o sistemes ecològics, econòmics i socials en col·lectius d'individus i de coses. Els sistemes dinàmics més ben estudiats són de naturalesa matemàtica i consisteixen en equacions que descriuen l'evolució de variables matemàtiques acoblades entre si per operacions matemàtiques. La resta de sistemes, diguem-ne reals, s'han d'estudiar experimentalment, observant-ne l'evolució i possible transformació. També podem intentar construir un model matemàtic que es comporti de forma semblant al sistema real. Això normalment no és trivial, ni tan sols suposant que es disposi d'una teoria per descriure els mecanismes involucrats, com serà normalment el cas en la majoria de sistemes físics. No cal parlar de les dificultats que podem tenir si l'objecte en estudi és de naturalesa econòmica, social o psicològica.

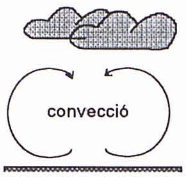
Variables i paràmetres del sistema

Definir un sistema dinàmic vol dir establir la seva estructura i identificar les magnituds que determinen el seu comportament i les interdependències que entre elles hi

Alguns sistemes dinàmics de renom

El model de Lorenz

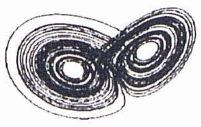
Simplificació d'un model més complex de conveccció atmosfèrica. Primer model on es va observar comportament caòtic.



equacions del model

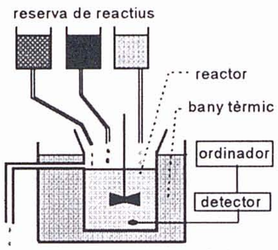
$$\dot{x} = \sigma(y-x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

atractor



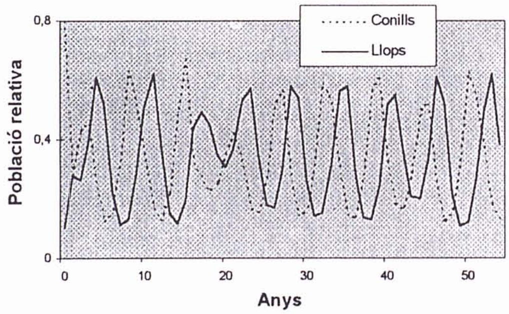
Reacció de Belousov-Zhabotinskii

Reacció química en la qual les concentracions de reactius i productes poden oscil·lar en el temps i en l'espai, fins i tot de forma caòtica. Sovint es manifesta amb canvis de color.



El model de Lotka-Volterra

Modelització de la dinàmica d'una població de dues espècies en competició. El model pot ser discret o continu.



Model de Lotka-Volterra discret per a dues espècies tipus presa-depredador

pugui haver. Cada una de les magnituds característiques pot descriure una propietat global de tot el sistema o només d'alguna de les seves parts. Sovint es tracta de magnituds amitjanades que obvien una subestructura més íntima sense incidència en la dinàmica observada. Aquelles propietats que no canvien mentre el sistema evoluciona són anomenades *paràmetres* i les que sí que ho fan són les *variables*. Els *graus de llibertat* corresponen a les variables que evolucionen amb una certa autonomia unes de les altres. L'*espai de fases*, definit pel conjunt de variables que descriuen els graus de llibertat, resulta molt convenient per analitzar el comportament del sistema. Cada punt d'aquest espai correspon a un possible *estat del sistema* i la seva evolució, en forma de trajectòria, dóna una imatge gràfica del que està passant. La dimensió de l'espai de fases, és a dir, el nombre de variables associades a graus de llibertat, constitueix la *dimensió* del sistema dinàmic en estudi.

D'altra banda, si considerem la família de sistemes d'idèntica estructura però amb diferents valors dels paràmetres, tenim l'anomenat *espai de paràmetres*. Cada punt d'aquest espai representa un sistema de la família que, donades unes certes condicions inicials per a les variables, evolucionarà per l'espai de fases d'una forma determinada. Ara bé, en considerar sistemes amb paràmetres diferents resulta que es poden observar comportaments qualitativament molt diferents. En certes zones de l'espai de paràmetres els comportaments són senzills i fàcils d'entendre, mentre que en altres zones poden arribar a ser extraordinàriament complicats. El fet significatiu és que els canvis es produeixen per a uns valors concrets dels paràmetres. Aquests canvis consisteixen en l'aparició de nous tipus de respostes i són anomenats *bifurcacions*. El seguiment de les successives bifurcacions, que, en variar algun paràmetre, connecten un comportament elemental amb un de complicat, és una forma d'arribar a entendre què és el que ha passat i per què el sistema està fent el que fa.

A la pràctica, però, els paràmetres normalment no són fàcils de variar ni tampoc són fixos del tot. L'anàlisi experimental només és factible quan es disposa d'algun *paràmetre de control* fàcilment manipulable des de l'exterior, com és el cas d'aquells sistemes que tenen una entrada regulable d'energia o de material. Els experiments seran més afinats com més fixos estiguin la resta de paràmetres i com més precisió es disposi en la variació del paràmetre de control. S'ha de tenir en compte que, quan hi ha dinàmica complexa, les bifurcacions es produeixen de forma acumulada i poden succeir moltes coses en un petit rang de valors d'un paràmetre. Lògicament, en les simulacions numèriques de sistemes matemàtics tots els paràmetres són controlables i, a més, ho són amb molta precisió. És per això que la gran majoria dels experiments s'han fet i es fan dins d'un ordinador. D'altra banda, fora del laboratori, els sistemes, diguem-ne naturals, no acostumen a tenir paràmetres controlables i, per tant, no admeten experimentació.[1] L'única cosa que podem fer és observar i prendre'n nota. A partir de l'anàlisi del comportament observat i d'altra informació que tinguem, podem intentar establir un model matemàtic del sistema. De fet, delimitar un sistema

[1] De això no n'estem segurs. Potser sí que hi ha qui experimenta fora del laboratori.

dinàmic dins la realitat natural no és gens fàcil, ja que les interaccions amb el medi fan sovint indestriable el sistema en qüestió d'un sistema més ampli. Això dóna importància a les experiències de laboratori.

Sistemes dinàmics matemàtics

És clar que tot el que estem dient només ho podem expressar de forma concisa i segura si ens situem en l'àmbit matemàtic. Els sistemes dinàmics matemàtics més corrents són sistemes acoblats d'equacions diferencials ordinàries que descriuen l'evolució temporal d'un conjunt de variables, X_j, tal que

$$\frac{dX_j}{dt} = f_j(X_1, X_2, \ldots X_N, \mu), \quad j = 1, \ldots N \qquad (1)$$

on la μ representa el conjunt de paràmetres i les funcions f_j contenen alguna no-linealitat en les variables X_j. En apartats posteriors veurem alguns exemples concrets de no-linealitats. Fixem-nos ara que l'acoblament de les equacions significa anells de realimentació entre les variables i que l'espai de fases $(X_1, \ldots, X_N)$ és òbviament de dimensió N. El fet que les derivades temporals de les variables defineixen el vector tangent a la trajectòria en cada punt permet veure el conjunt de trajectòries com formant part d'un flux que circula per l'espai de fases. Aquesta imatge resulta molt suggestiva i ajuda a interpretar els fenòmens.

Moltes lleis de la naturalesa establertes pels científics tenen la forma d'una equació diferencial com la (1). És a dir, les lleis acostumen a expressar el ritme de variació temporal de certes variables en funció de l'estat en que es troba el sistema. Ara bé, a l'hora d'establir un model d'una situació real, sovint ens trobem que la descripció dels mecanismes involucrats du a sistemes d'equacions diferencials en derivades parcials. Això és degut al fet que tot sistema s'ha de trobar per força distribuït per una certa zona de l'espai i que normalment les interaccions impliquen fluxos d'un lloc a l'altre. Les equacions en derivades parcials són sistemes difícils de tractar. Per començar, tenen dimensió dinàmica infinita ja que les variables són funcions de l'espai. Dit d'altra manera, si es vol determinar l'estat inicial del sistema s'ha de donar un nombre infinit de valors. La formació d'estructures espaciotemporals i els fenòmens de turbulència posen de manifest la potencialitat dinàmica de la multitud de graus de llibertat de determinades equacions en derivades parcials. Ara bé, el fet és que en molts casos la dimensió dinàmica efectiva del sistema és relativament baixa i llavors és possible reduir el sistema original a un model en derivades ordinàries.

Fins i tot moltes vegades no cal considerar les variables de forma contínua i n'hi ha prou de fixar-se en el seu valor en uns moments concrets. Com es fa, per exemple, quan s'estudia l'evolució de poblacions o d'estocs i es considera el seu valor el primer dia de cada any o de cada mes. Això matemàticament correspon als

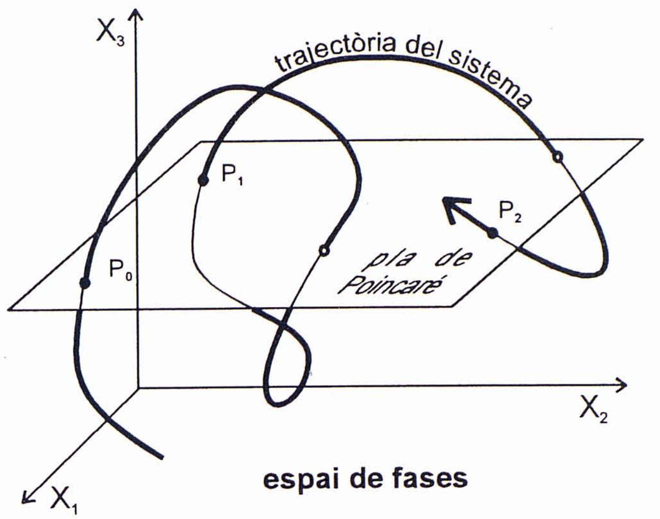


Figura 1: *Representació d'una trajectòria en un espai de fases de dimensió tres i obtenció d'una aplicació de Poincaré a partir de les interseccions de la trajectòria amb un pla oportunament escollit. La seqüència ordenada de punts* $p_0, p_1, p_2, \ldots$ *caracteritza l'evolució del sistema amb l'avantatge que hem reduït el nombre de variables en una*

sistemes dinàmics discrets que estan definits en forma d'aplicacions o equacions iteratives, tals que

$$X_j^{(n+1)} = f_j(X_1^{(n)}, \ldots, X_N^{(n)}; \mu), \quad j = 1, 2, \ldots, N \quad (2)$$

on les funcions f_j contenen les no-linealitats i el nombre de variables N determina la dimensió del sistema. La teoria de sistemes dinàmics està, de fet, més sustentada en els sistemes discrets que en els continus. A més, un sistema continu es pot sempre simplificar reduint-lo a un de discret. La idea la va desenvolupar Henri Poincaré ara fa tot just un segle i consisteix a seleccionar informació de la trajectòria a l'espai de fases fixant-se només en les seves interseccions amb un hiperplà de dimensió inferior en una unitat a la del sistema. Per centrar idees limitem-nos a considerar el cas d'un sistema de dimensió tres, tal com ho il·lustra la figura 1. El resultat del procés és un sistema discret o *aplicació de Poincaré* que ens va donant els punts successius, cada un en funció de l'anterior. Les variables de l'aplicació són les coordenades sobre el pla de la secció i, per tant, el seu nombre és inferior en una unitat al del sistema continu original. El fet més significatiu és que, si hem escollit correctament el pla, no perdem gens d'informació sobre què li passa al sistema quan variem un paràmetre de control i, en canvi, hem reduït el nombre de variables. D'altra banda, si només ens fixem en el retrat de fases en el pla, sense preocupar-nos de l'evolució temporal, tenim el que s'anomena *secció de Poincaré*, que, com veurem en els exemples, permet veure els detalls de la trajectòria amb més precisió.

De debò que tot el que ens envolta són sistemes dinàmics?

"Fins i tot tu mateix!", li va contestar el cavall del Lucky Luke al seu amo un dia que els germans Dalton els tenien rodejats. Nosaltres no serem tan categòrics. Però sí que convé remarcar el fet significatiu que en el comportament de sistemes reals de naturalesa radicalment diferent es poden observar fenòmens essencialment iguals i que, en particular, aquests fenòmens tenen molt en comú amb els dels sistemes dinàmics matemàtics.

Per exemple, fenòmens que es produeixen en una persona com enfadar-se i desenfadar-se recorden molt els salts de commutació entre dos estats diferents que defineixen un cicle d'histèresi que, com veurem, és el fenomen més elemental de la dinàmica de sistemes. Aquest paral·lelisme es pot estendre als estats anímics en general i també, per posar un exemple una mica diferent, a les aixetes de les mànegues de regar. El segon fenomen més elemental de la dinàmica de sistemes són les oscil·lacions autosostingudes o respostes que evolucionen periòdicament en el temps mentre les pertorbacions exteriors sobre el sistema romanen constants. Els típics cicles econòmics del sistema abans anomenat *capitalista* fan pensar en les autooscil·lacions. També podem citar algunes reaccions químiques que van canviant de color repetidament, o diversos ritmes biològics com la mateixa contracció del múscul cardíac o les foguerades de les cuques de llum o les oscil·lacions en la concentració de determinades substàncies en el metabolisme cel·lular, o vibracions induïdes pel vent en estructures mecàniques com les ales d'un avió o les fulles d'una persiana veneciana. La sincronització d'un col·lectiu de cuques de llum ens ofereix un exemple del fenomen típic d'un conjunt de sistemes dinàmics lleugerament acoblats. La llista d'exemples és llarga tant pel que fa al tipus de fenomen com pel tipus de sistema que l'experimenta. Arribats en aquest punt, però, s'ha de deixar ben clar que un sistema real només adquireix la condició de sistema dinàmic en el moment en què es disposa d'un model matemàtic que es comporta de forma semblant. Això no s'ha aconseguit en alguns dels exemples que acabem de citar i, per tant, la categoria de sistema dinàmic en aquests casos és, de moment, no gaire més que una suposició.

Des d'una perspectiva encara més general, tenim el concepte de sistemes complexos que, dit de forma simplificada, cobreix tots aquells sistemes el comportament dels quals les ciències establertes no han sabut o no han pogut explicar prou satisfactòriament a causa de la seva complexitat. Això va des de les turbulències en fluids i el clima de l'atmosfera terrestre fins a objectes d'estructura més embolicada com el cervell d'una persona, una colònia de formigues, un bosc, un equip de futbol o una aglomeració urbana. La complexitat sovint es manifesta en fenòmens d'ordenació col·lectiva que emergeixen a partir de les interaccions entre els components individuals. Hi ha qui s'està esforçant a intentar establir teories que puguin explicar de forma general els trets bàsics del comportament dels sistemes complexos. La teoria de sistemes dinàmics, també anomenada *teoria del caos*, ha estat una de les candidates però també n'hi ha d'altres. El fet és que, de moment, no existeix cap teoria dels sistemes complexos però, en canvi, sí que hi ha tot un seguit de camins bastant ben establerts que permeten estudiar i, fins i tot, explicar aspectes de la complexitat. Citem la teoria de catàstrofes, els models dels autòmats cel·lulars o de les xarxes neuronals, la criticitat autoorganitzada, els models amb formació d'estructures espaciotemporals en sistemes extensos. Els problemes als quals s'han aplicat aquests models, especialment en biologia i ecologia, són nombrosos: per exemple, control de l'expressió gènica, extincions i macroevolució, comportaments col·lectius d'individus simples com bacteris o formigues, neurodinàmica del cervell, distribució de clarianes en un bosc, etc. En aquest article, però, no ens hi entretindrem i, tal com hem dit, ens limitarem a parlar dels sistemes dinàmics, la teoria dels quals és la més ben establerta matemàticament.

Caos sí, caos no

Al caos li passa com als forats negres, que tenen un nom i un rerefons intel·lectualment provocatius. D'aquí el seu èxit popular. Recorden certs programes de televisió, que a ningú agraden però que tothom se'ls mira, i que en el nostre cas seria que ningú els entén però que tothom en parla. Bé, feta la broma, convé que siguem valents i toquem alguns aspectes de l'anomenat *caos determinista.*

Hem de començar dient que el caos és un tipus de comportament de determinats sistemes dinàmics els quals, en anar variant un paràmetre de control, van transformant la seva resposta fins a arribar a exhibir una evolució temporal irregular que no es repeteix periòdicament i que, en molts casos però no sempre, sembla dirigida per l'atzar. D'aquí el nom de *caos*. És important remarcar que no calen gaires graus de llibertat, com correspondria a un problema estocàstic on les fluctuacions es manifesten de forma aleatòria, sinó que amb tres variables ja n'hi ha prou per obtenir caos. L'evolució del sistema continua en tot moment ben determinada pels seus mecanismes interns, per les equacions en el cas matemàtic, i d'aquí la denominació de caos determinista. Hi ha tres coses a entendre: i) les propietats generals dels estats caòtics, ii) com són els camins per arribar fins a un estat caòtic i, la més difícil, iii) per què el sistema ha fet el que ha fet i s'ha tornat caòtic, cosa que té molt a veure amb el perquè de les propietats peculiars dels estats caòtics. Aquí parlarem alhora una mica dels punts primer i tercer.

Imaginem-nos un sistema la trajectòria del qual a l'espai de fases passa per una zona crítica on poden ocórrer una infinitat de possibilitats depenent del lloc per on s'entra. La trajectòria dins de la zona crítica pot ser molt diferent tant pel que fa a la seva forma com

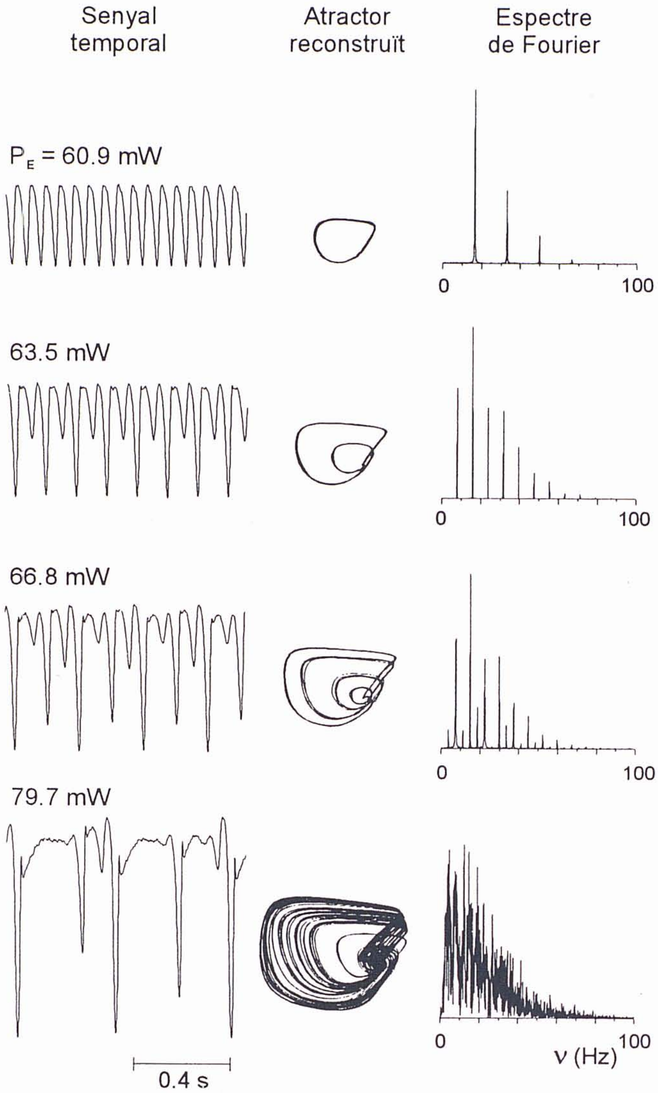


Figura 2: *Sèrie d'evolucions temporals que il·lustren un procés de doblament de període a través del qual un sistema dinàmic arriba fins a un estat caòtic. Cada senyal s'acompanya d'una representació de la trajectòria a l'espai de fases i del corresponent espectre de descomposició harmònica obtingut mitjançant la transformada de Fourier. Els senyals representen la llum reflectida per un dispositiu interferomètric no lineal il·luminat amb un feix làser d'una certa potència. Els senyals successius corresponen a potències amb valors creixents. L'últim senyal és aperiòdic i mostra un espectre continu*

pel temps que triga fins a sortir-ne. A més a més, hi ha algun mecanisme de recurrència que fa que la trajectòria que surt de la zona crítica hi retorni de nou i així repetidament. Com veurem més endavant, les zones crítiques ho són perquè contenen alguna solució de tipus sella i la recurrència de sortir i tornar està associada al que se'n diu *connexions homoclíniques* de la pròpia sella. És en relació amb aquest tipus de circumstàncies que l'evolució del sistema pot ser aperiòdica i pot arribar a semblar aleatòria. La transformada de Fourier del senyal aperiòdic dóna lloc a un espectre continu que cobreix un rang més o menys ample al voltant d'unes certes freqüències característiques (vegeu figura 2). D'altra banda, el futur del sistema en estat caòtic és molt sensible a les petites fluctuacions que es puguin produir tant en les variables com en els paràmetres. Una petita variació en el valor d'una variable es pot traduir en una gran diferència més endavant en el temps, a causa de les passades successives per la zona crítica. En conseqüència, un sistema en estat caòtic presenta una limitació en la predictibilitat del seu futur, ja sia a causa del soroll que, per petit que sigui, sempre actua sobre les variables o perquè les condicions inicials que puguem considerar sempre tindran una precisió limitada. Aquesta impredictibilitat es produeix malgrat que l'evolució del sistema sigui determinista i que matemàticament segueixi a ulls clucs unes equacions concretes. És l'anomenada *sensibilitat* a les condicions inicials i constitueix la propietat més intrínseca del caos. D'altra banda, els estats caòtics d'un sistema apareixen en zones de l'espai de paràmetres on hi ha cúmuls de bifurcacions i això fa que la resposta del sistema depengui també molt sensiblement de les fluctuacions en els paràmetres.

El caos és un comportament que es troba entre l'ordre i el desordre, la qual cosa és una característica bastant comuna dels sistemes complexos, i això ha fet sospitar que la complexitat es podria explicar a partir del caos. Fins i tot, coses semblants al caos però més complexes poden ser possibles a mesura que creix la dimensió del sistema i la teoria de sistemes dinàmics segurament en podrà donar compte amb rigor. Actualment, però, no sembla que el caos ni l'anomenat *hipercaos*, que pot tenir lloc a més altes dimensions, puguin explicar els comportaments complexos en general. Això no exclou que la teoria de sistemes dinàmics pugui contribuir encara a l'explicació de parcel·les de la complexitat, però tot fa pensar que han de trobar-se nous camins pels quals un sistema pugui produir respostes d'estructura més complexa que l'aperiodicitat del caos.

D'altra banda, el caos ha tingut implicacions de caire epistemològic que han afectat en particular la física. El caos determinista ha estat un dels elements que han debilitat el reduccionisme científic que durant molt de temps ha entès la física com el substrat, la base de qualsevol altra ciència que pretengués explicar alguna cosa real de forma rigorosa. Això ha fet perdre protagonisme central a la física però ha obert camins que probablement seran fructífers més endavant, fins i tot per a la mateixa física.

Passem ara a considerar dos exemples concrets que ens il·lustraran els conceptes elementals que més amunt hem introduït per caracteritzar i analitzar els sistemes dinàmics.

Un exemple ben conegut: el sistema planetari

En un conjunt de N cossos que es mouen sotmesos a la força gravitatòria tenim $6N$ variables independents: les posicions i velocitats vectorials dels cossos. Si ens movem dins la mecànica clàssica, el model matemàtic resulta de tenir en compte la definició de velocitat i la segona llei de Newton, tal que

$$\frac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{v}_j\,, \quad \frac{d\vec{v}_j}{dt} = G\sum_{i\neq j}\frac{m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}\vec{u}_{ji} \qquad (3)$$

per a j des de 1 fins a N. Els paràmetres són les N masses i la constant de la gravitació. La no-linealitat no és altra que la dependència inversa en el quadrat de la distància de la força gravitatòria. L'evolució dels cossos pot ser realment complicada i, de fet, n'hi ha prou amb tres cossos de masses comparables per obtenir caos i també situacions de desintegració del sistema. En el cas del nostre sistema planetari, el predomini de la massa solar fa que el conjunt es comporti bàsicament com una sèrie de sistemes a dos cossos de manera que l'evolució és molt repetitiva. No obstant això, es coneixen alguns efectes associats a problemes de tres cossos com, per exemple, la influència de Júpiter en l'estructura de les òrbites dels asteroides al voltant del Sol o la de les llunes de Saturn sobre els anells d'aquest planeta.

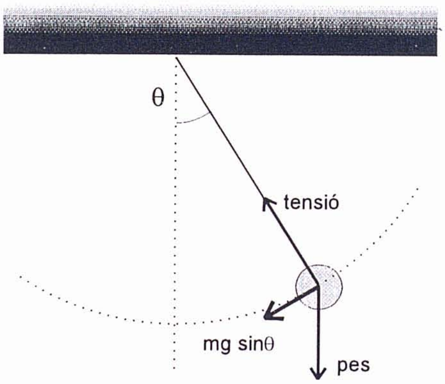


Figura 3: *Pèndol movent-se sotmès a la gravetat. La tensió de la corda compensa la component radial del pes i fa que la força total depengui no linealment de l'angle θ*

Un exemple encara més conegut: el pèndol

Considerem ara un pèndol sense fricció sobre la Terra i, suposant que es mou en un pla, caracteritzem la seva posició a partir de l'angle θ entre la línia del pèndol i la vertical en direcció avall. Les variables són la posició i velocitat angular, i les equacions dinàmiques es poden escriure així

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \qquad \frac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \sin\theta \qquad (4)$$

on $\omega_0^2 = g/l$ descriu la relació entre l'acceleració de la gravetat i la longitud del pèndol i constitueix l'únic paràmetre del sistema. La no-linealitat està continguda en la funció $\sin\theta$, que prové de la força total que actua sobre la massa del pèndol.

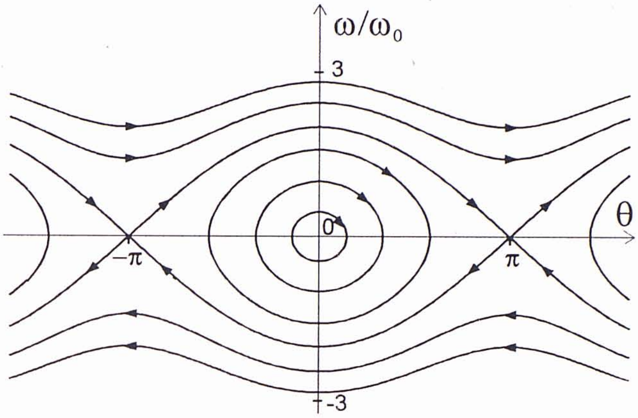


Figura 4: *Retrat de l'espai de fases d'un pèndol sense fricció sotmès a la força de la gravetat. Els eixos descriuen la posició i la velocitat angular, aquesta última normalitzada respecte a ω_0. L'origen de coordenades representa el pèndol a baix i quiet, i al seu voltant tenim una sèrie de trajectòries per a diverses condicions inicials o energies. Les fletxes indiquen el sentit del flux. Les òrbites tancades descriuen oscil·lacions i les trajectòries obertes corresponen a moviments de rotació. La separació entre els dos tipus de moviments es dóna a les trajectòries que connecten els punts $(\pm\pi, 0)$ entre si. Aquests dos punts representen el pèndol quiet a dalt, havent-hi arribat per una o altra banda. Són punts no estables amb trajectòries d'entrada i de sortida, ambdues asimptòtiques en el temps. Són punts sella, un element essencial per a la dinàmica de sistemes*

Una idea global del que pot fer el pèndol ens la dóna l'anomenat *retrat de l'espai de fases*, que no és res més que el conjunt de trajectòries que el sistema pot descriure en aquest espai. En absència de fricció, les trajectòries corresponen a línies d'energia constant i són tal com mostra la figura 4. La primera cosa a fer és no confondre l'espai de fases amb l'espai real on es mou el pèndol i per això convé tenir clara la relació entre les trajectòries en un espai i en l'altre. Comencem pels anomenats *punts fixos* en els quals les derivades temporals de les variables s'anul·len. Això ho satisfan els punts $(\theta, \omega) = (0, 0)$ i $(\pm\pi, 0)$ que corresponen al pèndol quiet a baix o a dalt, respectivament. La solució $(0, 0)$ és estable ja que, si el pèndol hi és col·locat, s'hi queda i al seu voltant tenim tot un seguit de circumferències de radi $(2E/mgl)^{1/2}$ que corresponen a oscil·lacions harmòniques amb freqüència ω_0 i energia

E. Aquestes oscil·lacions constitueixen el règim lineal del pèndol, que és vàlid mentre $\theta \ll 1$ i $\sin\theta \sim \theta$ i en què el període és igual a $2\pi(l/g)^{1/2}$ independentment de l'amplitud d'oscil·lació. El conjunt del punt fix estable i el continu d'òrbites periòdiques és anomenat *centre*. A mesura que l'amplitud va creixent les circumferències es distorsionen i el període d'oscil·lació va augmentant, fins que arribem a la trajectòria d'energia $E = 2mgl$ que connecta entre si els altres dos punts fixos $(\pm\pi, 0)$ que, recordem-ho, corresponen al pèndol quiet a dalt. Una part d'aquesta trajectòria va de $(+\pi, 0)$ a $(-\pi, 0)$ i l'altra va en sentit contrari. Ambdós recorreguts són doblement asimptòtics, ja que requereixen un temps infinit tant per sortir del punt amb velocitat inicial nul·la, com per arribar-hi i parar-s'hi. Els punts $(\pm\pi, 0)$ són *selles* i les trajectòries que hi arriben o en surten constitueixen les seves *varietats invariants estable* o *inestable*, respectivament. Cap altra trajectòria arriba o surt dels punts sella. Les varietats invariants de les selles també fan el paper de *separatrius* de dos tipus diferents de moviment del pèndol: l'oscil·latori i el de rotació. Les oscil·lacions tenen lloc a l'interior de la separatriu mentre que les trajectòries de més energia corresponen a estats de rotació indefinida en un sentit o en el contrari.

Fixem-nos en el fet que l'energia no és un paràmetre del sistema dinàmic i que el seu paper és determinar les condicions inicials. D'altra banda, la variació de l'únic paràmetre del pèndol, que és el quocient $g/l = \omega_0^2$, no provoca cap canvi a l'espai de fases. No hi ha bifurcacions. Llavors, si no hi passa res, per què ens hem entretingut tant en el pèndol? Doncs, perquè ens ha permès introduir el concepte de sella, que és essencial per entendre la generació de fenòmens dinàmics.

Sistemes conservatius i sistemes dissipatius

En els dos exemples que acabem de considerar l'energia total del sistema es manté constant. Són *sistemes conservatius* o *hamiltonians*, en els quals la dinàmica consisteix en el moviment indefinit d'uns cossos als quals en un cert moment s'ha donat una energia determinada. Remarquem les peculiaritats dels sistemes conservatius:

* la dimensió dinàmica mínima és dos, una posició i una velocitat,

* a l'espai de fases podem tenir centres, punts sella i trajectòries obertes,

* el volum ocupat per un conjunt de punts a l'espai de fases es conserva en la seva evolució en transcórrer el temps, tal com ho expressa el teorema de Liouville, i,

* l'evolució és reversible en el temps, la qual cosa vol dir que les equacions dinàmiques no canvien si invertim el signe del temps o que el moviment contrari és tan possible com el que tenim.

S'ha de fer notar que l'estudi dels sistemes conservatius ha resultat molt productiu i, en particular, els problemes de la mecànica celeste van constituir el camp de cultiu on Henri Poincaré va fermentar molts dels elements matemàtics de la teoria de sistemes dinàmics no lineals.

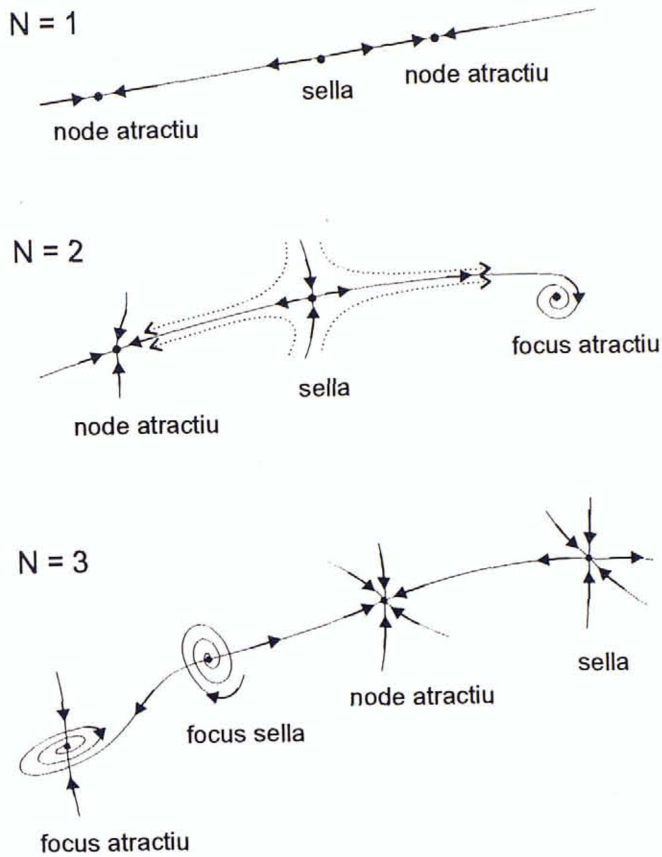


Figura 5: *Representació d'alguns punts fixos en espais de fases de dimensió 1, 2 i 3. Les fletxes indiquen el sentit del flux i, en el cas de les selles, representen les varietats invariants atractiva i repulsiva. Segons els casos, el flux al voltant d'un punt pot ser radial, fer espirals o una combinació d'ambdós. Recordem que les varietats invariants d'una sella contenen totes les trajectòries que arriben o surten del punt mentre que a un atractor li arriben trajectòries per totes bandes. Els repulsors són iguals als atractors però amb el sentit del flux invertit. En un espai unidimensional les selles no tenen varietat atractiva i de fet són repulsors, però els mantenim el nom per un motiu que ara no explicarem*

Ara bé, deixant de banda alguns sistemes físics molt particulars, és clar que la resta de sistemes dinàmics reals contenen mecanismes que tendeixen a relaxar les variables vers uns valors determinats i ho fan amb més eficiència com més lluny es troba el sistema d'aquests valors. Aquests mecanismes, en el cas d'un sistema físic, tendeixen a conduir-lo vers l'equilibri tèrmic i normalment li provoquen pèrdues d'energia. Estem parlant dels anomenats *sistemes dissipatius*, que, des d'un punt de vista general, es caracteritzen perquè contenen una microestructura amb nombrosos graus de llibertat, la gran majoria dels quals, però, evolucionen de forma tal que els seus efectes poden ser descrits estadísticament com a mecanismes de relaxació sobre un nombre reduït de variables dinàmiques realment significatives. Pel que acabem de dir, els sistemes dissipatius tendeixen a l'equilibri, estat en el qual el sistema dinàmic com a tal és mort o, dit de forma més suau, no fa res. Si volem fenòmens dinàmics hem d'alimentar el sistema amb un subministrament exterior que faci créixer alguna de les variables en contraposició a la dissipació i el mantingui lluny de l'estat d'equilibri. Dins de la física això té a veure amb la termodinàmica lluny de l'equilibri o, també dita, de processos irreversibles.

Com a peculiaritats dels sistemes dissipatius en relació amb els conservatius són de remarcar:

* irreversibilitat en el temps, a causa de la unidireccionalitat de la dissipació,

* possibilitat de sistemes amb dimensió igual a 1, ja que les variables no són necessàriament la posició i la velocitat de cossos en moviment, i

* existència a l'espai de fases dels anomenats *atractors*, a més de les selles i els contraris dels atractors o repulsors.

Els atractors són singularitats vers on convergeixen asimptòticament totes les trajectòries que passen pel seu voltant i són conseqüència de l'acció dissipativa que tendeix a contraure el volum del flux que circula per l'espai de fases. Tot el conjunt de punts a partir dels quals s'arriba a un determinat atractor forma la seva *conca d'atracció*. La situació més corrent és tenir diversos atractors que coexisteixen amb les seves respectives conques d'atracció separades per les varietats estables d'ens sella (vegeu figura 5). Les conques d'atracció cobreixen tot l'espai de fases de manera que si, col·loquem un sistema en unes certes condicions inicials i el deixem evolucionar, anirà a parar, inevitablement, a l'atractor corresponent. D'atractors, n'hi ha de molts tipus –ja els anirem veient més endavant– i, com és lògic, el nombre de possibilitats creix amb la dimensió de l'espai de fases. Aquí és instructiu recordar que els sistemes conservatius no tenen atractors. Per exemple, el punt $(0, 0)$ en el cas del pèndol no és atractiu i, si el sistema no s'hi troba, no hi va a parar. El lector pot intentar imaginar com seria l'espai de les fases per a un pèndol amb fricció.

Bé, ja hem dit prou coses per saber de què estem parlant quan ens referim a sistemes dinàmics i ja va essent hora de que parlem de què és el que poden fer.

Referències

BASCOMPTE, J. *et al.*, *Ordre i caos en Ecologia*, Edicions UB (Barcelona, 1996).

BERGÉ, P., POMEAU, Y. i VIDAL, C., *L'ordre dans le chaos*, Hermann (París, 1988).

HILBORN, R. C., *Chaos and Nonlinear Dynamics. An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press (Oxford, 1994).

PRIGOGINE, I. i NICOLIS, G., *Exploring Complexity*, Freeman (New York, 1989).

SOLÉ, R. i MANRUBIA, S., *Orden y caos en sistemas complejos*, Edicions UPC (Barcelona, 1996).

STEWART, I., *Juega Dios a los Dados?*, Crítica (Barcelona, 1991).