

# Impedàncies acoblades en circuits de corrent altern

Patricio Ramírez,\* Antonio Barbero† i Salvador Mafé‡

## Una contradicció aparent en el càlcul de la impedància de dos solenoides acoblats

És ben conegut que la impedància complexa equivalent de dos elements d'impedàncies  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$  connectats en sèrie és

$$\hat{Z}_{eq} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 \quad (1)$$

Tanmateix, la major part dels textos docents elementals (Halliday, Resnick i Walker, 1993; Serway, 1992; Young, 1992) no emfasitzen el fet que aquest resultat deixa de ser correcte quan hi ha acoblament magnètic entre els dos elements, és a dir, quan un dels elements (o tots dos) crea un camp magnètic dependent del temps que dona lloc a l'aparició de fenòmens d'inducció en l'altre. Es diu aleshores que les impedàncies estan acoblades. Proposem ací estudiar teòricament i experimentalment, de forma elemental, la impedància de dos solenoides acoblats connectats en sèrie, establint les condicions en les quals l'equació (1) és vàlida.

Considerem un cas senzill en el qual els elements acoblats són dos solenoides cilíndrics idèntics (figura 1), de longitud  $l$ , radi  $r \ll l$ , resistència elèctrica negligible i coeficient d'autoinducció (Roller i Blum, 1986)

$$L_s \approx \mu n^2 \pi r^2 l \quad (2)$$

on  $\mu$  és la permeabilitat magnètica de l'aire i  $n$  el nombre d'espores per unitat de longitud. L'expressió (2) s'obté suposant que el camp magnètic és uniforme en l'interior del solenoide i nul en l'exterior.

La impedància equivalent de l'associació de solenoides, quan el corrent altern sinusoidal recorre ambdós enrotllaments en el mateix sentit, és (Roller i Blum, 1986)

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{eq}(a) &= 2j\omega [L_s + M_{s-s}(a)] \\ &\approx 2j\omega [\mu n^2 \pi r^2 l + M_{s-s}(a)], \end{aligned} \quad (3)$$

on  $j$  és la unitat imaginària,  $\omega$  és la freqüència angular del corrent i  $M_{s-s}$  és el coeficient d'inducció mútua dels dos solenoides, que depèn de la separació  $a$  entre

els solenoides, pren el seu valor màxim quan  $a = 0$  i és negligible quan aquests es troben molt separats. El valor màxim de  $\hat{Z}_{eq}(a)$  s'assoleix aleshores per a  $a = 0$ , és a dir, quan els dos solenoides estan units i recorreguts per un corrent que porta el mateix sentit en cada instant. Però aquesta situació correspon en realitat a un únic solenoide  $s'$  de longitud  $2l$ , radi  $r$  i igual nombre d'espores  $n$  per unitat de longitud, la impedància complexa del qual ve donada per

$$\hat{Z}_{eq}(0) = j\omega L_{s'} \approx j\omega \mu n^2 \pi r^2 (2l) \approx 2j\omega L_s \quad (4)$$

que dona compte solament del primer sumand de l'equació (3). Com que  $M_{s-s}(0)$  és estrictament major que zero, i de fet assoleix un valor màxim en aquesta posició, sembla que hi ha una contradicció entre les equacions (3) i (4). Aquesta contradicció és només aparent i és deguda a l'aproximació utilitzada per calcular  $L_s$  i  $L_{s'}$ . En efecte, per determinar el valor aproximat del coeficient d'autoinducció d'un solenoide, s'ha suposat que el camp magnètic que crea és nul en els punts de l'exterior de l'element i aquesta hipòtesi implica, de fet, que  $M_{s-s} = 0$  per a qualsevol valor de  $a$ . Si volem donar compte de l'acoblament de solenoides, s'ha de refinar el procés de càlcul del camp magnètic; per exemple, avaluant numèricament el camp creat per una espira circular en un punt arbitrari de l'espai i integrant el resultat a totes les espores que formen el solenoide. El coeficient d'autoinducció es determina aleshores calculant el flux d'aquest camp a través de cada espira del solenoide i integrant de nou totes les espores que el formen per obtenir el flux total. No cal dir que aquest procés de càlcul resulta molt laboriós i que és convenient plantejar una alternativa senzilla que, tot i ser aproximada, retenga les característiques essencials del problema i evite les contradiccions.

Si admetem que, pel fet que els solenoides són llargs i estrets, el camp magnètic en un punt pròxim a l'eix del solenoide és aproximadament igual al camp en l'eix (Tipler, 1994)

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{\mu n I}{2} \left[ \frac{x + l/2}{\sqrt{(x + l/2)^2 + r^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x - l/2}{\sqrt{(x - l/2)^2 + r^2}} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

on  $x$  és la distància mesurada des del centre del solenoide, els coeficients d'autoinducció i inducció

\*Patricio Ramírez (Albacete, 1965) és doctor en Ciències Físiques (1994) i actualment professor titular de Física Aplicada en la Universitat Jaume I de Castelló.

†Antonio Barbero (Cartagena, 1957) és doctor en Ciències Físiques (1994) i actualment professor titular de Física Aplicada en la Universidad de Castilla-La Mancha.

‡Salvador Mafé (Sueca, 1961) és doctor en Ciències Físiques (1986) i actualment professor titular de Física Aplicada en la Universitat de València-Estudi General.



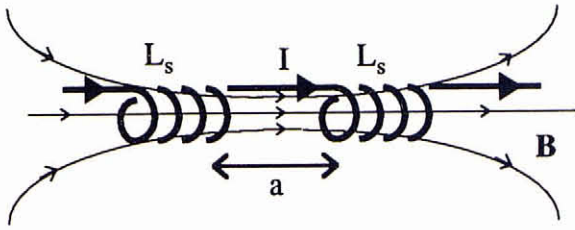


Figura 1: Inductàncies pures (dos solenoides de resistència negligible) connectades en sèrie. La impedància equivalent conté un terme d'acoblament magnètic

mútua es poden avaluar analíticament com a

$$L_s = \mu n^2 \pi r^2 \left[ \sqrt{l^2 + r^2} - r \right], \quad (6)$$

$$M_{s-s}(a) = \frac{\mu n^2 \pi r^2}{2} \left[ \sqrt{(2l+a)^2 + r^2} - 2\sqrt{l+a)^2 + r^2} + \sqrt{a^2 + r^2} \right]. \quad (7)$$

Així, el coeficient d'inducció mútua per a  $a = 0$  resulta

$$M_{s-s}(0) = \frac{\mu n^2 \pi r^2}{2} \left[ \sqrt{(2l)^2 + r^2} - 2\sqrt{l^2 + r^2} + r \right], \quad (8)$$

i el coeficient d'autoinducció del solenoide de longitud  $2l$  queda de la manera següent

$$L_{s'} = \mu n^2 \pi r^2 \left[ \sqrt{(2l)^2 + r^2} - r \right] = 2[L_s + M_{s-s}(0)], \quad (9)$$

amb la qual cosa les impedàncies resulten finalment

$$\hat{Z}_{eq}(0) = j\omega L_{s'} = 2j\omega [L_s + M_{s-s}(0)], \quad (10)$$

i es dona compte de l'acoblament sense que apareguen contradiccions.

### Observació experimental de l'acoblament

Els efectes d'acoblament discutits en l'apartat anterior per al cas de dos solenoides són petits i, per tant, difícils d'observar en el laboratori. Perquè es facen evidents, cal fer servir elements el coeficient d'inducció mútua dels quals siga major. En la majoria dels laboratoris de física de primer curs de carreres tècniques es disposa de bobines circulars de radi i nombre d'espises relativament grans, que s'utilitzen normalment per produir camps magnètics. Aquestes bobines presenten un coeficient d'autoinducció de l'ordre d'algunes desenes de mH i, quan es connecten per parelles (en el muntatge conegut com a bobines de Helmholtz), el seu coeficient d'inducció mútua és d'uns pocs mH. Aquests valors d'inductància són suficientment grans com perquè es puguin observar

en el laboratori sense que siga necessària la utilització d'un equip sofisticat.

En la figura 2 es mostra el muntatge utilitzat per mesurar la impedància d'unes bobines de Helmholtz. Les bobines es connecten en sèrie amb una font de f.e.m. alterna de freqüència angular  $\omega$  i, amb l'ajuda d'un voltímetre i un amperímetre, es mesuren els valors eficaços de la diferència de potencial entre els borns del muntatge,  $V_{ef}$ , i del corrent que passa per les bobines,  $I_{ef}$ . Cada bobina té una resistència  $R_b$  i un coeficient d'autoinducció  $L_b$ , i el coeficient d'inducció mútua de les bobines es denotarà per  $M_{b-b}$ .

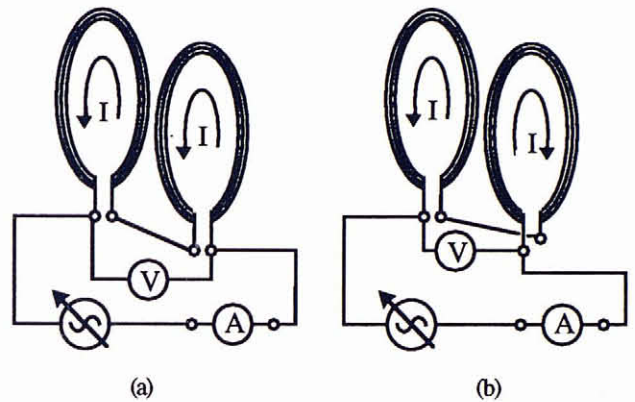


Figura 2: Circuit de corrent altern utilitzat per mesurar la impedància d'unes bobines de Helmholtz en muntatge paral·lel (a) i en muntatge antiparal·lel (b). A i V simbolitzen un amperímetre i un voltímetre, respectivament (en l'experiment utilitzem dos polímetres digitals METEX Demestres M3650)

Ara bé, les bobines es poden connectar de manera que els corrents circulen per totes dues bobines en el mateix sentit (bobines paral·leles, figura 2a) o en sentits contraris (bobines antiparal·leles, figura 2b). La impedància complexa de les bobines en aquestes dues formes de connexió és (Roller i Blum, 1986)

$$\hat{Z}_p = 2[R_b + j(L_b + M_{b-b})\omega] \text{ (paral·lela)} \quad (11)$$

i

$$\hat{Z}_a = 2[R_b + j(L_b - M_{b-b})\omega] \text{ (antiparal·lela)}, \quad (12)$$

amb la qual cosa la relació entre els valors de  $V_{ef}$  i de  $I_{ef}$  queda de la forma

$$V_{ef} = Z_k I_{ef}; \quad k = p, a, \quad (13)$$

on  $Z_k$  és el mòdul de la impedància complexa  $\hat{Z}_k$ .

Així, representant gràficament  $V_{ef}$  enfront de  $I_{ef}$  s'obté una recta el pendent de la qual en el cas de bobines paral·leles resulta

$$Z_p = 2\sqrt{R_b^2 + (L_b + M_{b-b})^2\omega^2}, \quad (14)$$



i en el muntatge de les bobines antiparalleles

$$Z_a = 2\sqrt{R_b^2 + (L_b - M_{b-b})^2\omega^2}. \quad (15)$$

De les equacions (14) i (15) es poden deduir els valors experimentals de  $L_b$  i  $M_{b-b}$  una vegada coneguts  $R_b$  i  $\omega$ . En la figura 3 es representen els valors de  $V_{ef}$  enfront dels de  $I_{ef}$  en el cas d'unes bobines de Helmholtz construïdes amb dues bobines circulars (Phywe 06 960.00) de radi  $r_b = 20$  cm, nombre d'espises  $N_b = 154$  i resistència  $R_b = (2,3 \pm 0,3) \Omega$ ; el gruix del bobinat és  $2\delta = 1,6$  cm. Els punts blancs corresponen als valors experimentals obtinguts amb el muntatge paral·lel i els negres corresponen al muntatge antiparal·lel. Les línies contínues són les rectes d'ajust fent servir les equacions (13). Els mesuraments es van realitzar utilitzant corrent altern de freqüència angular  $\omega = (314 \pm 6)$  rad/s.

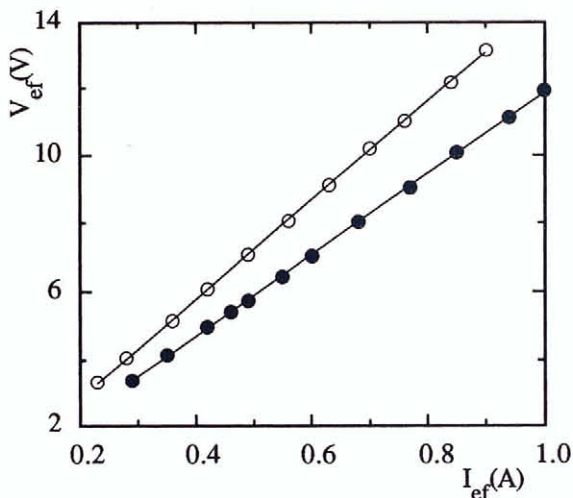


Figura 3: Gràfic de la lectura del voltímetre enfront de la de l'amperímetre per a les bobines de Helmholtz de la figura 2. Es representen els resultats experimentals en el cas de les bobines paral·leles (○) i antiparalleles (●). Les línies contínues corresponen als ajusts realitzats per mitjà de les equacions (13)

Els valors de les inductàncies que es dedueixen dels ajusts de la figura 3 són

$$L_b^{\text{exp}} = (19,6 \pm 0,8) \text{ mH}, \quad (16)$$

## Referències

- HALLIDAY, D., RESNICK, R. i WALKER, J., *Fundamentals of Physics*, 4a ed. Wiley, (Nova York, 1993).  
 REITZ, J.R., MILFORD, F.J. i CHRISTY, R.W., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, Fondo Educativo Interamericano, (Mèxic, 1984).  
 ROLLER, D.E. i BLUM, R., *Física*, Reverté, (Barcelona, 1986).  
 SERWAY, R.A., *Physics for Scientists and Engineers*, 3a ed, Saunders, (Nova York, 1992).  
 TIPLER, P.A., *Física*, Traducció al català de la 3a edició nordamericana, Ed. Reverté, S.A., (Barcelona, 1994).  
 YOUNG, H.D., *University Physics*, Addison-Wesley, (Massachusetts, 1992).

$$M_{b-b}^{\text{exp}} = (2,33 \pm 0,13) \text{ mH}, \quad (17)$$

cosa que suposa errors relatius del 4% i 6%, respectivament.

## Discussió

En els llibres de Física General orientats als primers cursos de carreres tècniques no és freqüent trobar estudis complets del fenomen d'acoblament magnètic d'impedàncies en circuits de corrent altern. Si es considera la possibilitat de l'acoblament de dues inductàncies pures connectades en sèrie i se'ls assignen impedàncies complexes de la forma habitual, s'arriba a contradiccions que només es poden evitar refinant els procediments de càlcul dels coeficients d'inducció mútua i autoinducció dels elements connectats.

Els fenòmens d'acoblament magnètic són fàcilment observables en el laboratori si es disposa d'elements que presenten un coeficient d'inducció mútua suficientment gran. A més, els valors mesurats per als coeficients d'autoinducció i inducció mútua són molt exactes i es pot comprovar el seu excel·lent acord amb els valors teòrics disponibles en la bibliografia (Reitz, Milford i Christy, 1984)

$$\begin{aligned} L_b^{\text{teo}} &= 2\mu N_b^2 r_b \left[ K \left( 1 - \frac{\delta}{r_b} \right) - E \left( 1 - \frac{\delta}{r_b} \right) \right] \\ &= 19,5 \text{ mH}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} M_{b-b}^{\text{teo}} &= \mu N_b^2 r_b \sqrt{5} \left[ \frac{3}{5} K \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \right) - E \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right] \\ &= 2,34 \text{ mH}, \end{aligned} \quad (19)$$

mitjançant la utilització de taules per avaluar les integrals el·líptiques completes de primera i segona espècie  $K(k)$  i  $E(k)$ , respectivament.

La fàcil disponibilitat i maneig del material emprat i les seues possibilitats tant pel que fa a la introducció de conceptes fonamentals com a la comparació entre la teoria i l'experiment, fa de l'experiment presentat una bona base per a l'elaboració d'una pràctica de laboratori en cursos de física general o d'electricitat i magnetisme a nivell introductori.