

# El principi d'equivalència d'Albert Einstein

Josep Graells \* i Carme Martín †

Departament de Física Aplicada. Universitat de Barcelona

## Introducció

Dins el context de la mecànica newtoniana, la segona llei de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (1)$$

relaciona la força  $\vec{F}$  aplicada a una partícula amb la seva massa  $m$ , independentment de la natura de la força. Tanmateix, la força pot dependre de determinats atributs de la partícula. Així, si es tracta d'una força generada per un camp electrostàtic  $\vec{E}$ , la força dependrà de la càrrega  $q$  de la partícula

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Si es tracta d'una força generada per un camp gravitatori  $\vec{G}$ , resulta que l'atribut del qual depèn la força és proporcional a la massa de la partícula i, escollint de forma adient el sistema d'unitats, es pot aconseguir que quan es mesurin amb la mateixa unitat (per exemple el kg en el SI), la constant de proporcionalitat valgui 1, sent el valor de l'atribut gravitatori numèricament igual a la massa del cos.

Aquesta igualtat, entre la massa inercial i la gravitatoria, s'ha comprovat amb una precisió d'una part en  $10^{11}$  o  $10^{12}$  (Ohanian, 1976), i per tant està ben arrelada experimentalment, per la qual cosa s'acostuma a representar l'atribut gravitatori (es podria qualificar com la càrrega gravitatoria), amb la mateixa lletra  $m$ .

És evident, però, que res en la teoria newtoniana fonamenta aquesta igualtat, i en conseqüència tampoc s'incorpora dins l'edifici teòric, ja que se la tracta com una casualitat numèrica que en darrera instància es neutralitza matemàticament en resoldre les equacions de moviment. No obstant això, si es vol ser conceptualment rigorós, l'edifici newtonià requereix dels dos tipus de masses:

Una massa inercial  $m_I$  que és la que apareix en la segona llei de Newton

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_I\vec{v})$$

\* Josep Graells Casanellas (Cervera, 1946) és doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1978) i actualment treballa a FECSA en la direcció d'Explotació i Enginyeria.

† Carme Martín Torres (Barcelona, 1950) és doctora en Física per la Universitat de Barcelona (1981) i és professora del col·legi La Salle, Gràcia.

i que ens mesura la resistència de les partícules en canviar el seu estat de moviment, és a dir, en ser accelerades en un referencial inercial. I una massa gravitatoria  $m_G$ , que és l'atribut que mesura l'acoblament de les partícules amb un camp gravitatori  $\vec{G}$

$$\vec{F} = m_G\vec{G}$$

i que, a la vegada, actua com a font de camp gravitatori, com es pot demostrar aplicant la tercera llei de Newton.

La igualtat

$$m_I = m_G \quad (2)$$

explica, com va anticipar Galileu, que tots els cossos suficientment petits perquè s'hi pugui considerar homogeni el camp gravitatori, caiguin amb la mateixa acceleració independentment de la seva constitució, ja que de (1) i de (2), trivialment se segueix

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{G}.$$

En la natura sols es coneix un altre tipus de forces que gaudeixin d'aquesta extraordinària propietat, és a dir que generin en les partícules acceleracions independents de la seva massa. Són les conegudes i a la vegada interpretativament polèmiques i esmunyedisses forces inercials (Coriolis, centrífuga, etc.). Aquestes forces inercials desapareixen completament quan els fenòmens físics s'observen des d'un referencial inercial, això és, un referencial en el qual es verifiqui la primera llei de Newton.

Pot semblar lògic preguntar-se si pot tenir lloc quelcom de semblant en un camp gravitatori: hi ha algun mecanisme que permeti fer-lo desaparèixer o neutralitzar-lo?

Atès que hi ha una sola classe de massa gravitatoria, al contrari del que passa en el domini elèctric en el qual existeixen les càrregues positives i les negatives, esdevé impossible aïllar un camp gravitatori com es fa amb un camp elèctric mitjançant la gàbia de Faraday. Recordem que si se situa dins d'un camp electrostàtic un conductor, per exemple una escorça conductora tancada, carregada o no, quan s'assoleix l'equilibri electrostàtic, el camp elèctric en la regió interna, limitada per la superfície externa de l'escorça, s'anulla. En el camp gravitatori no pot haver-hi un mecanisme semblant a la gàbia de Faraday.

A. Einstein, l'any 1907 (Miller, 1992; Sánchez-Ron, 1983) i amb més extensió i profunditat el 1911 (Einstein, 1952), va idear un mètode que permetia d'eliminar totalment els camps gravitatoris homogenis i quasi la resta de camps gravitatoris.

En la resta de l'article intentarem d'exposar aquest mètode, que A. Einstein va anomenar principi d'equivalència, i que en darrera instància el va conduir el 1915 a la creació de la teoria de la relativitat general. El principi d'equivalència també s'analitza i s'aplica al domini electromagnètic, al corriment de les freqüències i a la curvatura dels raigs, tal com originalment es va formular.

### El principi d'equivalència

Quasi immediatament després de crear la relativitat especial el 1905, A. Einstein va dedicar part dels esforços investigadors cap a la recerca d'una teoria relativista del camp gravitatori, ja que la teoria newtoniana del camp gravitatori no encaixa en l'estructura físico-matemàtica de la relativitat especial, ben al contrari que les equacions de Maxwell per al camp electromagnètic, que són relativísticament correctes. A més a més, també es coneixien petites discrepàncies entre les prediccions de la teoria newtoniana i el món experimental, per exemple, no es podia explicar raonablement, després de calcular les pertorbacions degudes a la resta de planetes, una diferència de 43 segons d'arc per segle terrestre en el desplaçament del periheli de Mercuri. S'ha de tenir en compte que el corriment total del periheli de Mercuri és de  $5600,73 \pm 0,41$  segons d'arc per segle terrestre (Sexl, 1979). Per tant, el petit remanent de 43 segons bé podia ser degut a efectes relativistes, tal com el desenvolupament posterior (1915) de la relativitat general va demostrar.

En un manuscrit del 1919, descobert per Gerald Holton el 1971 (Miller, 1992; Sánchez-Ron, 1983), A. Einstein escriu:

“Quan, al 1907, estava treballant en un assaig referent a la teoria de la relativitat especial per al *Jahrbuch für Radioaktivität und Elektronik*, vaig intentar modificar la teoria newtoniana de la gravitació en una forma tal que encaixés amb la teoria de la relativitat. Els intents dirigits en aquest sentit van mostrar-me que el projecte era factible, però no hem satisfien perquè es fonamentaven en hipòtesis sense base física. (...) En aquest punt se'm va ocórrer la idea més feliç de tota la meua vida. De la mateixa manera que el camp elèctric produït en el fenomen de la inducció,<sup>1</sup> el camp gravitatori

té una existència relativa. Ja que si es considera un observador en caiguda lliure, per exemple, des del terrat d'una casa, durant la caiguda no existeix, per a l'observador, cap camp gravitatori, almenys no en el seu entorn immediat.”

En definitiva, com la majoria de bones idees, en el fons és molt senzilla, però no simple. Es basa en expressar les lleis físiques i observar els fenòmens que tenen lloc en un camp gravitatori, emprant la metodologia següent:

1. En caiguda lliure.
2. Amb un abast espàcio-temporal local (petit).

Per fixar les idees, considerem primer un referencial  $K$  en repòs respecte a les fonts del camp gravitatori, per exemple el Sol. Respecte a  $K$ , el camp gravitatori que genera el Sol a una distància  $r$  és

$$\vec{G}(\vec{r}) = -G \frac{M_{\odot}}{r^3} \vec{r}. \quad (3)$$

Matemàticament s'ha representat el referencial  $K$  mitjançant un sistema de coordenades l'origen del qual se situa en el Sol.

Seguidament considerem un observador situat en un planeta, per exemple la Terra, que ens servirà per definir un nou referencial  $K_0$ . Per tal d'evitar complicacions, que ens apartarien del nucli de l'argumentació, no tindrem en compte el moviment del Sol i la Terra al voltant dels seus eixos, i negligirem el camp gravitatori creat per la Terra.

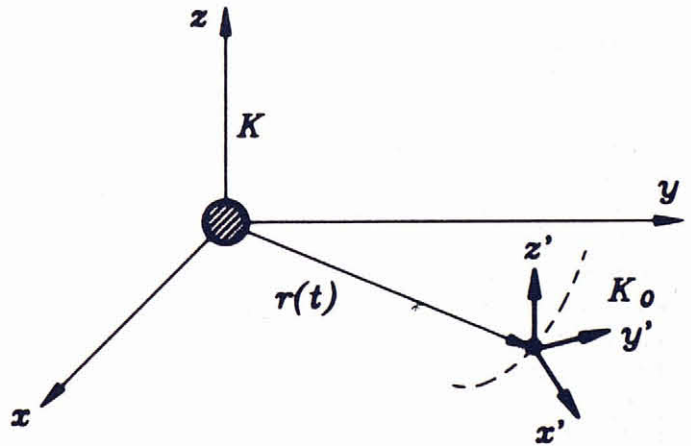


Figura 1: Sistemes de referència de la Terra i del Sol

Si  $\vec{r}_T(t)$  és el radi vector de la Terra respecte al Sol, llavors en  $K$  es verifica, atès (2)

$$\frac{d^2 \vec{r}_T(t)}{dt^2} = -G \frac{M_{\odot}}{r_T^3} \vec{r}_T, \quad (4)$$

equació que determina la trajectòria de la Terra en el referencial global  $K$ . Suposem ara que l'observador solidari a la Terra, és a dir, en repòs respecte al referencial

<sup>1</sup>Einstein s'està referint al fenomen de la inducció d'una f. e. m. deguda al moviment relatiu d'una espira i un imant.

$K_0$ , sols estigui interessat en el que passa en el seu entorn immediat. Sigui  $\delta\vec{s}$  el vector que defineix la posició d'una partícula propera a l'observador. Per tant, es verificarà

$$|\delta\vec{s}| \ll |\vec{r}_T|.$$

Aquesta desigualtat permetrà de fer desenvolupaments en sèrie de Taylor en  $\delta\vec{s}$  al voltant de  $\vec{r}_T$ , i amb error negligible o bé controlat pels límits experimentals, menysprear termes quadràtics i superiors en  $\delta\vec{s}$ .

Suposem que la partícula situada en  $\vec{r} = \vec{r}_T + \delta\vec{s}$  es deixa en caiguda lliure. Evidentment la Terra i l'observador  $K_0$  sempre estan en caiguda lliure.

L'equació de moviment de la partícula respecte a  $K$  és

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_T + \delta\vec{s}) = \vec{G}(\vec{r}_T + \delta\vec{s}).$$

Efectuant el desenvolupament en sèrie de  $\vec{G}(\vec{r}_T + \delta\vec{s})$ , indicat abans

$$\vec{G}(\vec{r}_T + \delta\vec{s}) = \vec{G}(\vec{r}_T) + \delta\vec{s} \cdot \nabla \vec{G}(\vec{r}_T)$$

i tenint en compte (4), l'equació de moviment de la partícula per a l'observador  $K_0$  és

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta\vec{s}) = \delta\vec{s} \cdot \nabla \vec{G}(\vec{r}_T) \quad (5)$$

que posa de manifest que en  $\vec{r}_T$  ha desaparegut el camp  $\vec{G}(\vec{r}_T)$ , per bé que romanen els efectes ocasionats per les seves inhomogeneïtats.

Si en lloc de tractar-se del camp gravitatori del Sol,  $\vec{G}$  fos homogeni o bé es poguessin negligir les seves inhomogeneïtats, l'equació de moviment de la partícula respecte a  $K_0$  es reduiria a

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta\vec{s}) = \vec{0}. \quad (6)$$

Per tant, i localment, per a l'observador  $K_0$ , en caiguda lliure dins del camp  $\vec{G}$ , ha desaparegut el camp gravitatori. En  $K_0$  sols resta com a romanent dels efectes de  $\vec{g}$ , els deguts al seu gradient, és a dir, les anomenades forces de marea. Aquests efectes, si s'escull un entorn espàcio-temporal suficientment petit, que en darrera instància vindrà definit per la precisió de l'experiment que es dissenyi per mesurar-los, sempre els podrem deixar a segon terme, o bé obviar-los en una primera anàlisi.

Quelcom de semblant té lloc quan es considera el camp magnètic creat per una càrrega que es mou amb velocitat constant respecte a un referencial inercial, ja que si l'observador se situa en el referencial propi de la càrrega, el camp magnètic desapareix i sols queda el camp electrostàtic coulombià.

Pel que s'acaba d'exposar A. Einstein va escollir una estratègia local per aprofundir en el coneixement dels fenòmens gravitatoris newtonians, amb l'objectiu

d'ampliar el seu abast al món relativista. Aquesta estratègia local va ser induïda en part per consideracions analògiques de caire electromagnètic. Per exemple, així com de l'electrostàtica coulombiana es pot passar dins del context teòric de la relativitat especial a l'electromagnetisme maxwellià, es tractaria de passar de la gravitació newtoniana a la gravitació relativista. Però l'experiència ens ha ensenyat i els desenvolupaments teòrics així ho han ratificat, que no n'hi ha prou. S'han d'afegir altres ingredients. A. Einstein va considerar que la igualtat numèrica entre la massa inercial i la massa gravitatòria havia d'ocupar un primer terme, elevant-la a la categoria d'identitat física entre les magnituds que ambdues masses representen. Es basava en el fet que tots els resultats teòrics el conduïen a acceptar aquesta hipòtesi, i va proposar en conseqüència vies de contrastació experimental. Per tant, la identitat entre les masses s'havia d'incloure en l'edifici de la gravitació relativista com a pilar basamental, contràriament al que s'esdevé en la teoria newtoniana, que no sols continuaria existint si no es verificués l'esmentada igualtat, sinó que ni tan sols requeriria cap canvi.

Amb aquesta línia de pensament heurístic, les forces inercials poden interpretar-se, àdhuc dins el context newtonià, com a camps gravitatoris per bé que d'un tipus especial. En efecte, sigui  $\Sigma$  un referencial caracteritzat per posseir una acceleració  $-\vec{G}(\vec{r})$  respecte a un referencial inercial  $\Sigma_0$ . Per tal de poder negligir efectes gravitatoris directament associats a masses identificables, ambdós referencials els considerarem allunyats de tots els cossos, de manera que, idealment, els podem ubicar en l'espai interestel·lar. Respecte a  $\Sigma_0$ , una partícula lliure satisfà l'equació de moviment

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} = \vec{0}, \quad (7)$$

equació que coincideix amb l'equació (6), corresponent a una partícula en caiguda lliure dins d'un camp gravitatori, respecte al referencial local  $K_0$ . Si considerem la partícula observada des del referencial  $\Sigma$ , atès que la transformació de coordenades entre  $\Sigma_0$  i  $\Sigma$  és

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}(\vec{r}')t - \frac{1}{2}\vec{G}(\vec{r}')t^2$$

$$t' = t,$$

on  $\vec{v}(\vec{r}')$  és la velocitat de  $\Sigma$  respecte a  $\Sigma_0$  en  $t = t' = 0$  (suposem que el rot  $\vec{v}(\vec{r}') = 0$ ), l'equació de moviment de la partícula respecte a  $\Sigma$  esdevé

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} = \vec{G}(\vec{r}'),$$

que coincideix amb l'equació de moviment d'una partícula sotmesa a un camp gravitatori  $\vec{G}$  en el referencial  $K$ .

Per tant, i dins del context de la dinàmica newtoniana, s'estableix, per a la descripció dels fenòmens

mecànics, un fort parallelisme, segons s'esquematitza en la taula següent:

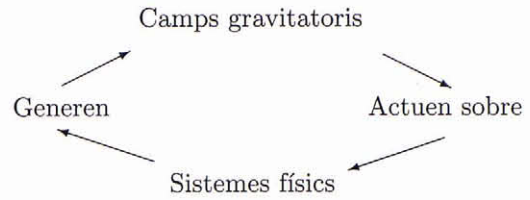
Camp gravitatori Forces gravitatòries	↔	Camp d'acceleracions Forces inercials
<u>REFERENCIALS</u>	↔	<u>REFERENCIALS</u>
$K$ : en repòs respecte a les masses creadores de camp.	↔	$\Sigma$ : accelerat respecte a un referencial inercial.
$K_0$ : en caiguda lliure.		$\Sigma_0$ : inercial.
LOCAL	↔	GLOBAL

És en aquest estadi on A. Einstein, opinem els autors, va fer una aposta heurística important, ja que va fer extensiva a tots els dominis de la física, l'analogia purament mecànica, esquematitzada en la taula anterior. És més, va ampliar l'abast, més o menys formal, de l'analogia exposada fins ara, transformant-la en principi físic, que totes les lleis que regeixen el món real haurien de complir. En aquest sentit postula l'equivalència dels referencials  $\Sigma$  i  $K$ , en els termes següents:

“No solament en el domini de la mecànica, sinó en el de tota la física, un referencial  $K$ , en el qual hi hagi un camp gravitatori homogeni  $\vec{G} = \text{constant}$ , és exactament equivalent a un referencial  $\Sigma$ , allunyat de totes les masses, però accelerat amb una acceleració  $-\vec{G}$  respecte a un referencial inercial.”

Una conseqüència directa del principi d'equivalència és que el desenvolupament dels fenòmens físics en un referencial  $\Sigma$ , caracteritzat per una acceleració  $\vec{a} = -\vec{G}$  respecte a un referencial inercial  $\Sigma_0$ , ha de ser idèntic al desenvolupament dels mateixos fenòmens dins d'un camp gravitatori  $\vec{G}$ . En el domini electromagnètic les primeres concrecions pràctiques d'aquesta inferència, deduïdes pel propi Einstein en l'article esmentat (Einstein, 1952), condueixen a la predicció del corriment de la freqüència i el corbament de la trajectòria d'un senyal electromagnètic quan està sotmès a l'acció d'un camp gravitatori. Però amb un abast més general, també se segueix de l'equivalència entre  $\Sigma$  i  $K$  que tots els sistemes físics han d'estar acoblats al camp gravitatori. I simètricament, si es té present la identificació entre energia i massa que es dedueix de la relativitat especial ( $E = mc^2$ ), tots els sistemes físics al seu torn han de ser font de camp gravitatori, inclòs el propi camp gravitatori que hauria d'actuar com a autogenerador de camp. Altrament, el camp gravitatori esdevé “gravitatoriament carregat”, en contraposició, per exemple, al camp electromagnètic que en ser elèctricament neutre, no té càrrega elèctrica. Per tant, el camp gravitatori ha d'interaccionar amb tots els sistemes físics i aquests al

seu torn han de generar camp gravitatori. S'estableix un cercle tancat que es pot esquematitzar de la manera següent:



Aquest cercle tancat situa la interacció gravitatòria en una posició privilegiada en el món de la física, posició que la diferencia de la resta d'interaccions que sols són sensibles a les càrregues que les generen.



Figura 2: *Joguina regalada a A. Einstein per un amic*

En definitiva, les conseqüències del principi d'equivalència d'Albert Einstein són de llarg abast, i li van servir de guia per finalment assolir el 1915 la creació de la relativitat general. No ens ha d'estranyar, per tant, que la qualifiqués el 1919 com la idea més afortunada de la seva vida.

No obstant això, les mentalitats amb inclinacions matemàtiques rigoroses i filosòficament escrupoloses, poden trobar bastants punts febles en tota l'argumentació que s'ha fet. Per exemple s'extrapolen resultats basats en camps gravitoris homogenis a camps gravitoris newtonians no homogenis, s'inclouen conseqüències de la relativitat especial, etc.

Per acabar aquest apartat proposem que el lector es diverteixi, almenys mentalment, intentant de respondre com ha d'actuar per fer funcionar la joguina esquematitzada a la figura 2. En la joguina, la petita bola resta en repòs atès que el seu pes està equilibrat per la força que la molla, solidaria al recipient exterior mitjançant el tap, li transmet per mitjà del fil inextensible. Aquesta joguina va ser regalada a A. Einstein per un

amic amb motiu del seu 76 aniversari (un mes abans del seu traspàs).

Cal esbrinar per quin mètode infalible es pot fer penetrar la petita bola unida a la molla, dins del seu suport semiesfèric, sense sotmetre-la a cap sacsejada brusca. (Ajut: penseu en el principi d'equivalència).

## Corriment de les freqüències d'un senyal electromagnètic

Considerem una font lluminosa a una alçada  $L$  que emet fotons de freqüència  $\nu$  envers un observador  $O$  en repòs respecte a la Terra (figura 3). Per tant, l'observador i la font estan en repòs en el referencial  $K$  on hi ha el camp gravitatori d'intensitat  $\vec{g}$ .

Ens plantegem de calcular la freqüència del senyal mesurada per l'observador  $O$ . Segons el principi d'equivalència, el problema proposat és el mateix si el plantejament en el referencial  $\Sigma$  (part dreta de la figura 3), que posseeix una acceleració  $-\vec{g}$ , respecte a un referencial inercial. Adoptem com a origen de temps l'instant d'emissió del senyal, segons el mesura el referencial inercial  $\Sigma_0$  comòbil en aquest instant amb el referencial accelerat  $\Sigma$ . Respecte a  $\Sigma_0$  el senyal es dirigeix cap a l'observador amb velocitat constant  $c$ .

Com que  $\Sigma$  està accelerat, en un interval de temps  $t$  assoleix una velocitat  $v = gt$  respecte a  $\Sigma_0$  i recorre una distància  $gt^2/2$ . Aquestes expressions newtonianes són suficientment precises ateses les baixes velocitats implicades ( $v^2/c^2 \ll 1$ ). En  $t = 0$  la distància entre la font lluminosa i l'observador és  $L$ . El temps que tarda en travessar-la a la velocitat  $c$  és  $t = L/c$ , i per tant la velocitat de l'observador respecte a  $\Sigma_0$  és aproximadament  $gL/c$ . En conseqüència, respecte a l'observador, és a dir respecte al referencial inercial comòbil amb l'observador, però en aquest cas en l'instant de la mesura, la freqüència de la llum experimenta un corriment Doppler de magnitud

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} = \frac{gL}{c^2}. \quad (8)$$

Les correccions degudes al fet que el camí recorregut pel senyal és lleugerament més petit que  $L$ , els efectes associats a la contracció de Lorentz i la dilatació dels intervals temporals, són tots ells correccions de segon ordre en  $v/c = gL/c^2$ .

De l'equació (8) es dedueix immediatament la freqüència  $\nu'$  mesurada per l'observador  $O$ , ja que  $\Delta\nu = \nu' - \nu$

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{gL}{c^2}\right). \quad (9)$$

Amb aquesta disposició experimental té lloc un corriment de les freqüències vers el blau. L'experiència va ser portada a terme per primera vegada per Pound i Rebka el 1960, en el camp gravitatori terrestre i va ser perfeccionada quatre anys després per Pound i Snider.

Atès que era  $L = 22,5$  m, l'equació (8) implicava un corriment de la freqüència de  $2,46 \cdot 10^{-15}$  Hz. Aquest resultat ha estat confirmat amb una precisió relativa de  $10^2$ , gràcies a l'efecte Mössbauer. S'anomena així l'emissió, sense retrocés, dels raigs gamma de baixa energia ocasionats per transicions nuclears en estructures cristallines. L'àtom emissor, solidari a l'estructura, comunica a tot el cristall la quantitat de moviment deguda al retrocés conseqüència de l'emissió del fotó. Degut a la manca de retrocés, les ratlles de l'espectre d'emissió són extraordinàriament fines, cosa que permet fer mesures molt precises dels corriments espectrals.

Seguidament interpretarem el resultat que acabem d'obtenir en el referencial  $\Sigma$ , però ara des del punt de vista del referencial  $K$ , en repòs respecte a les masses que creen el camp gravitatori  $\vec{g}$ . El fotó, com s'indica a la figura 3, es dirigeix cap a les fonts del camp, on està situat l'observador. Aquest, d'acord amb el principi d'equivalència, ha de mesurar el corriment al blau indicat en l'equació (9). L'observador  $K$  pot explicar-se aquesta predicció, basant-se en la identitat postulada per A. Einstein entre la massa inercial i la gravitatòria. Atès que un fotó té una energia  $h\nu$ , també ha de tenir una "massa inercial" idèntica a la gravitatòria  $h\nu/c^2$  (bé que la seva massa en repòs és zero). En conseqüència, el fotó ha de tenir un "pes". L'energia total ( $E + E_{pot}$ ), quan el fotó està a l'alçada  $L$  per sobre la superfície de la Terra, és  $h\nu + h\nu\Phi/c^2$ , sent  $\Phi = gL$  el potencial gravitatori, en tant que baixa a la superfície (on  $\Phi = 0$ ), l'energia del fotó és  $E' = h\nu'$ , tal que per raó del principi de conservació de l'energia ha de verificar

$$h\nu' = h\nu + \frac{h\nu}{c^2}\Phi$$

és a dir, retrobem l'equació (9), amb  $\Phi = gL$

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \quad (10)$$

El corriment es produiria cap al roig (*red shift*) en comptes de cap al blau, si el camp de gravitació tingués l'orientació oposada a la considerada ( $\Phi < 0$ ). Aquesta situació es presenta quan s'observa la radiació electromagnètica emesa per una estrella en el camp gravitatori que ella crea.

## Corbament de la trajectòria d'un raig de llum

En aquest apartat considerarem un raig de llum emès perpendicularment a l'acceleració  $-\vec{g}$  del referencial  $\Sigma$ . En el referencial inercial comòbil amb el  $\Sigma$  en l'instant d'emissió  $t = 0$ , el raig de llum viatja en línia recta amb velocitat  $c$ , i cobreix durant l'interval  $\Delta t$  una distància  $\Delta x = c\Delta t$ . Durant aquest interval de temps el referencial  $\Sigma$  ha avançat un  $\Delta y$

$$\Delta y = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2 \quad (11)$$

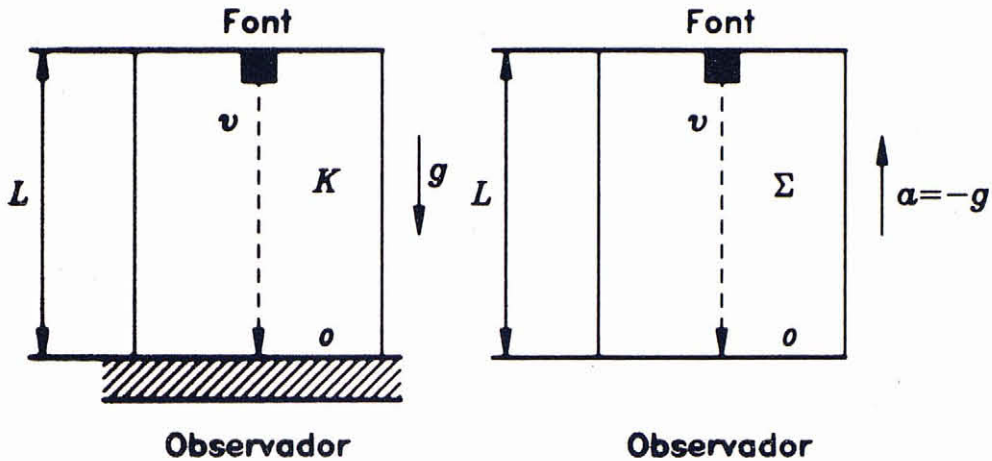


Figura 3: Observadors: el de la dreta en un camp gravitatori; el de l'esquerra en un sistema accelerat

Ara imaginem que el raig de llum hagi de passar a través d'un conjunt de forats situats en successius  $\Delta x$  dins l'estructura que idealment conforma  $\Sigma$ . Els forats no poden disposar-se al llarg d'una línia recta, sinó que han de localitzar-se dirigits cap a la base, segons la paràbola (11). L'angle de la llum que ha estat deflectida, i que hauria de mesurar un físic de  $\Sigma$  segons l'enfocament adoptat, és

$$\alpha \simeq \tan \alpha = \frac{\partial \Delta y}{\partial \Delta x} = g \frac{\Delta x}{c^2}. \quad (12)$$

Segons el principi d'equivalència, el mateix fenomen ha de tenir lloc en el referencial  $K$ , en repòs respecte a les fonts que generen el camp gravitatori  $\vec{g}$ . L'observador  $K$  pot interpretar el corbament del raig de llum recorrent als arguments que li han permès d'explicar-se el corriment de la freqüència. En efecte, el raig lluminós d'energia  $E$  té una massa  $E/c^2$ , cosa que implicarà que posseeixi una energia potencial  $E\Phi/c^2$  dins un potencial gravitatori  $\Phi$ , i conseqüentment experimenti una acceleració  $g = -\nabla\Phi$ . La variació de moment lineal en la direcció ortogonal al raig, quan recorre una distància  $\Delta x$  perpendicularment al camp gravitatori és

$$\Delta p = \frac{E}{c^2} g \Delta t = \frac{E}{c^2} g \frac{\Delta x}{c}.$$

Atès que el moment del raig de llum és  $p = E/c$  se segueix que l'angle deflectit coincideix com era d'esperar amb l'equació (12)

$$\alpha \simeq \tan \alpha = \frac{\Delta p}{p} = g \frac{\Delta x}{c^2}$$

Aprofitant aquest resultat calcularem la deflexió que experimenta un raig de llum que passi proper al Sol. Ja que el corbament del raig és molt petit, no és necessari determinar l'òrbita del raig. En efecte, el càlcul del canvi total del moment és suficientment precís, efectuant la integració de la component normal de la força al llarg

de la recta indicada a la figura 4. No obstant això, hem d'anticipar que els resultats teòrics obtinguts no estan d'acord amb els resultats experimentals. Aquest punt es tracta més endavant i en les conclusions.

$$\frac{dp_n}{dt} = -\frac{E}{c^2} \frac{GM_\odot}{r^2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r}$$

com  $dt = dx/c$  i  $p = E/c$  resulta

$$\alpha(b) = \frac{\Delta p_n}{p} = \frac{GM_\odot}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^2} dx.$$

Aquesta integral pot avaluar-se directament o bé, d'una manera senzilla, recorrent al teorema de Gauss, ja que representa  $1/2\pi b$  multiplicat per l'angle sòlid total subtendit per un cilindre infinitament llarg de radi  $b$ , això és  $4\pi$ . Per tant

$$\alpha(b) = \frac{2MG_\odot}{bc^2}$$

i per a un raig que passi gratant el limbus solar

$$\alpha(R_\odot) = \frac{2GM_\odot}{R_\odot c^2}.$$

Substituint els valors numèrics  $M_\odot = 1,9910^{33}$  g,  $R_\odot = 6,96 \cdot 10^{10}$  cm,  $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$  dina  $\text{cm}^2 \text{g}^{-2}$  resulta

$$\alpha(R_\odot) = 0,875''$$

Les nombroses observacions experimentals són totes consistents amb un valor pràcticament doble del calculat

$$\alpha(R_\odot) \simeq 1,75''$$

que precisament és el valor que preveu la teoria de la relativitat general (Einstein, 1952)

$$\alpha(R_\odot)_{R.G.} = \frac{4GM_\odot}{R_\odot c^2}.$$

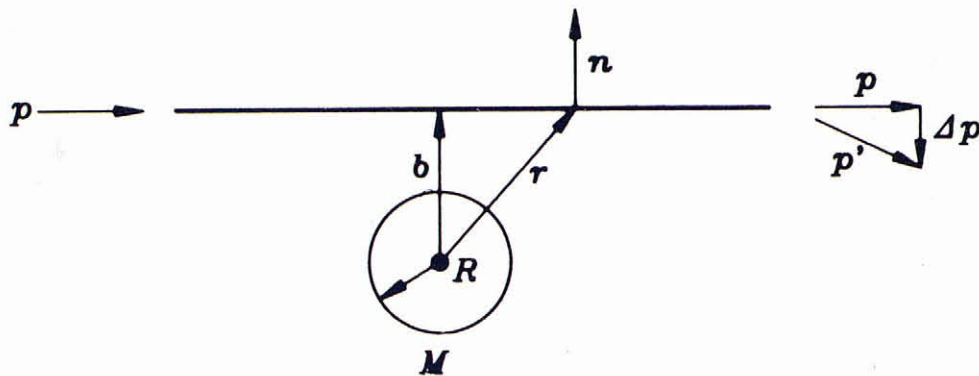


Figura 4: Component normal de la força d'un raig de llum en la deflexió

Aquesta discrepància es discuteix en l'apartat següent.

### Discussió dels resultats

S'ha arribat a un punt en el qual els senzills càlculs realitzats no sols no estan d'acord amb els resultats experimentals, sinó que analitzats amb cura poden conduir a conclusions en certa forma paradoxals.

S'ha calculat el corriment espectral i la deflexió de la llum pel Sol, en dues formes diferents:

1. Emprant la gravitació newtoniana i afegint-hi l'equivalència massa-energia, és a dir, situant l'anàlisi físico-matemàtica en el referencial  $K$ .
2. Aplicant el principi d'equivalència, s'ha efectuat l'anàlisi en el referencial  $K$ , és a dir emprant un camp d'acceleracions.

Ambdós mètodes donen els mateixos resultats per a cada fenomen, però mentre s'obté una resposta que està d'acord amb els experiments pel corriment espectral, el càlcul de la deflexió gravitatòria dels raigs de llum difereix en un factor 2 dels resultats experimentals, i del que preveu teòricament la relativitat general, que per tant està d'acord amb les dades experimentals.

Una possible via que aporta una idea per sortir d'aquesta contradicció, pot basar-se en l'obvietat que s'ha hagut d'emprar la teoria newtoniana de la gravitació. Al calcular la deflexió del raig de llum s'ha integrat la component de la força newtoniana normal a la trajectòria del fotó. Si la gravitació relativista proporcionés una força addicional, que sempre fos perpendicular a la trajectòria, de mòdul igual a la newtoniana per  $v = c$  i negligible per  $v \ll c$ , llavors s'explicaria el factor que manca en el càlcul de la deflexió i, a més a més, no afectaria la correcta predicció del corriment de la freqüència, ja que una força perpendicular al moviment no efectuarià treball. Aquesta idea no ens hauria d'estranyar, atès que per exemple, la força magnètica que actua sobre una càrrega és sempre perpendicular a la trajectòria de la càrrega, sent el magnetisme un efecte purament relativista. (Anticipem al lector que àdhuc en el domini de

l'aproximació lineal a la relativitat general, apareix la força addicional esmentada.)

Una altra reflexió crítica, que estimem adient al context de tot l'article, és que sempre que s'ha emprat un referencial inercial s'ha fet en relació amb el referencial  $\Sigma$  accelerat, és a dir, les dues aplicacions analitzades no han emprat l'estratègia local. Si el referencial global  $K$ , en repòs respecte a les masses creadores de camp, és equivalent al referencial accelerat  $\Sigma$ , se segueix que  $K$  no pot ser inercial, com implícitament se suposa que ho és dins del context de la mecànica newtoniana.

Un referencial inercial, sota un punt de vista operacional, es pot caracteritzar com aquell en el qual els acceleròmetres mesuren zero i és factible de jugar al billar tridimensional. En conseqüència, els referencials locals  $K_0$  en caiguda lliure (negligint les forces de marea), tenen tots els atributs, per representar, encara que de forma local, un referencial inercial. Però aquest enfocament teòric, que precisament és el que s'incorpora en la teoria de la relativitat general, implica que dos referencials inercials puguin estar mútuament accelerats. Aquesta acceleració mútua entre els referencials inercials, sembla que condueix a qüestionar-se la llei de la inèrcia, que és bàsica per descobrir forces en la natura, i per tant s'hauria de complir en qualsevol referencial inercial, altrament, un cos no sotmès a cap força ha de seguir un moviment rectilini i uniforme. Per tant, en esdevenir bàsica per descobrir forces en la natura, se segueix que la interacció gravitatòria ha de perdre bastant el caràcter de força i acostar-se més a una entitat física que faci aflorar en un primer terme les forces de marea i la connexió entre els referencials locals inercials, mútuament accelerats. És a dir, com ja s'ha indicat abans, la interacció gravitatòria té un rol singular si es compara amb la resta d'interaccions (electromagnètica, feble i forta) (Ramond, 1989).

## Referències

- OHANIAN, H. C., *Gravitation and Spacetime*, W. W. Norton (1976).
- MILLER, A. I., *Albert Einstein's 1907 Jahrbuch Paper: The first step from SRT to GRT. Studies in the History of General Relativity*, Edited by J. Eisenstaedt, A. J. Kox, Birkhouser (1992).
- SÁNCHEZ RON, J. M., *El origen y el desarrollo de la Relatividad*, Alianza Universidad (1983).
- EINSTEIN, A., *On the influence of Gravitation on the propagation of light. The Principle of Relativity. Einstein, Lorentz, Weyl, Minkowski.*, Notes d'A. Sommerfeld. Dover Publications Inc. (1952).
- EINSTEIN, A., *The Foundation of the General Theory of Relativity. The Principle of Relativity. Einstein, Lorentz, Weyl, Minkowski.*, Notes d'A. Sommerfeld. Dover Publications Inc. (1952).
- SEXL, R., SEXL, H., *White Dwarfs, Black Holes. An Introduction to Relativistic Astrophysics*, Academic Press (1979).
- RAMOND, P., *Field Theory: A Modern Primer.*, Second Edition. Frontiers in Physics. Addison-Wesley (1989).
- 

(Ve de la pàgina 1)

## Explosions nuclears a Mururoa

Un altre motiu d'actualitat de la física han estat els assajos nuclears que el govern francès ha fet als territoris francesos de Mururoa, al Pacífic, i que han aixecat una forta oposició al món, no solament a la Polinèsia i als països propers (Japó, Austràlia i Nova Zelanda, inclosos) sinó a Europa i Amèrica. La "justificació" dels assajos tenia una base metodològica: una suposada insuficiència de la simulació per ordinador per a l'optimització de les armes nuclears. A final de gener de 1996, després del sisè assaig, el president del govern francès ha anunciat la fi de les experiències i l'adhesió —una mica cínica, ara— de França al tractat de no-prolifерació nuclear. L'ambient a França ha estat molt enrarit per aquesta qüestió. La principal revista científica de divulgació del país, *La Recherche*, dedicà inicialment una nota editorial als assajos carregada d'ambigüitats. En els números següents, diversos lectors es queixaren de la posició de la revista, la trajectòria progressista de la qual havia estat força neta. Finalment, al mes de desembre, la revista ha publicat un article molt documentat d'un físic de la IBM i assessor en tecnologia nuclear del govern dels EUA, que considera innecessaris els assajos si es vol mantenir i optimitzar l'armament, la "seguretat" nuclear.<sup>1</sup> En el número següent, la redacció ha explicat que havien hagut de recórrer a un nord-americà perquè no havien trobat un expert independent a França...

---

<sup>1</sup>Aquest article apareix traduït en castellà al *Mundo Científico* de febrer.