# La física en problemes

Salvador Estradé i Jordi Vives

Tal com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

En cada número de la *Revista* hi haurà dos problemes proposats: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i es premiarà els guanyadors amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

Acompanyant la solució, l'estudiant ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 de març de 2008 a:

probuni@ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

## Problema per a l'alumnat de batxillerat

Un planeta de massa $M = 10^{23}$ kg té un satèl·lit de massa $M/10$. La distància entre els seus centres és de $4{\cdot}10^4$ km. A causa de l'atracció gravitatòria mútua, tots dos es mouen en òrbites circulars entorn al CM del conjunt, que suposarem en repòs. Calculeu les velocitats lineals i els períodes del planeta i del satèl·lit així com l'energia mecànica del sistema. Dada: G = $6{,}67{\cdot}10^{-11}$ N m$^2$ kg$^{-2}$.

## Problema per a l'alumnat universitari

José Luis Junquera Fernández-Díez ens ha enviat un problema que inclou diverses qüestions essencials de la relativitat general com per exemple la mètrica en un espai estàtic de geometria esfèrica i les trajectòries geodèsiques de la llum en una de les seves trajectòries més senzilles com la circular.

Una nau intergalàctica s'acosta a gran velocitat als voltants del planeta P que es troba a molts anys llum de la Via Làctia. Els tècnics de la nau volen saber quines són les equacions més generals que regiran el comportament de la nau quan es trobin en el domini del camp gravitatori generat per P . Les observacions són tan difícils que només es disposa de dues dades.

**Dada 1:** La mètrica en el buit que envolta el planeta té simetria esfèrica

$$c^2 d\tau^2 = A(r)(cdt)^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2),$$

on $A(r)$ i $B(r)$ són dues funcions desconegudes de la coordenada radial $r$ amidada des del centre de P.

**Dada 2:** S'ha pogut comprovar que $A(r)B(r) = 1$ en els voltants de P.

## Solució als problemes del número anterior de la *Revista*

## Del problema per a l'alumnat de batxillerat

Sergio González Gaspar i Weihong Ye, alumnes de 2n de batxillerat de l'IES Josep Lluís Sert de Castelldefels, ens han fet arribar, separadament, la solució següent:

Les figures 1 i 2 mostren, respectivament, la distribució de forces sobre cada cos per als valors mínim i màxim de la força aplicada.

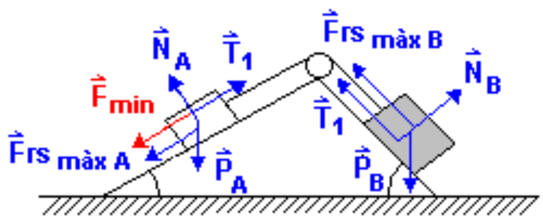



Figura 1: *Distribució de forces per al valor mínim de la força aplicada*

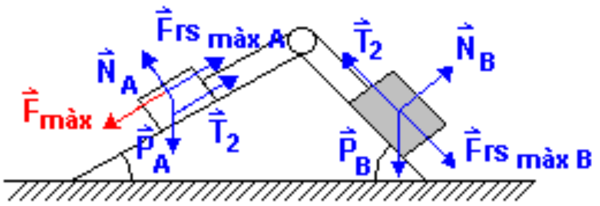



Figura 2: *Distribució de forces per al valor màxim de la força aplicada*

Per trobar el valor mínim de la força $F$ aplicarem, en la figura 1, l'equació fonamental de la dinàmica als cossos A i B:

$$\text{cos A}\left\{\begin{array}{ll} eix\ x) & T_1 - m_A g \sin 30 - \mu_S N_A - F_{\min} = 0 \\ eix\ y) & N_A - m_A g \cos 30 = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{cos B}\left\{\begin{array}{ll} eix\ x) & m_B g \sin 70 - \mu_S N_B - T_1 = 0 \\ eix\ y) & N_B - m_B g \cos 70 = 0 \end{array}\right.$$

Resolent el sistema ens queda:

$$\begin{aligned} F_{\min} = \ & m_B g \sin 70 - m_A \sin 30 - \\ & -\mu_S m_A g \cos 30 - \mu_s m_B g \cos 70. \end{aligned}$$

Substituint numèricament dóna $F_{\min} = 26,1$ N.

Per trobar el valor màxim de la força $F$ aplicarem, en la figura 2, l'equació fonamental de la dinàmica als cossos A i B:

$$\text{cos A}\left\{\begin{array}{ll} eix\ x) & T_2 - m_A g \sin 30 - \mu_S N_A - F_{\max} = 0 \\ eix\ y) & N_A - m_A g \cos 30 = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{cos B}\left\{\begin{array}{ll} eix\ x) & m_B g \sin 70 + \mu_S N_B - T_2 = 0 \\ eix\ y) & N_B - m_B g \cos 70 = 0 \end{array}\right.$$

Resolent el sistema ens queda:

$$\begin{aligned} F_{\min} = \ & m_B g \sin 70 - m_A \sin 30 + \\ & +\mu_s m_A g \cos 30 + \mu_s m_B g \cos 70. \end{aligned}$$

Substituint numèricament dóna $F_{\max} = 46,4$ N.

Així doncs, l'interval de valors de $F$ pel qual el sistema continua en repòs és 26,1 N $\leq F \leq$ 46,4 N.

**Del problema per a l'alumnat universitari**

La interacció entre la ionosfera i la Terra a través de l'atmosfera es comporta com un enorme circuit elèctric. Això forma una cavitat ressonant a freqüències 7,8; 14; 20; 26; 33; 39 i 45 Hz que porten el nom de *ressonàncies de Schumann.*

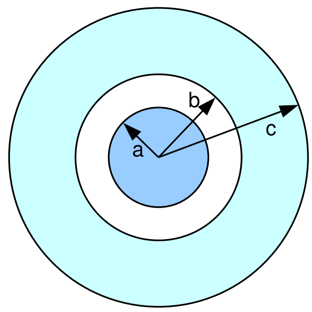
Intentem fer una aproximació molt senzilla com si es tractés d'un circuit elèctric ressonant amb inductància i capacitat. La seva freqüència de ressonància ve donada per l'equació:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \tag{1}$$

on hem de calcular la inductància i capacitat del circuit format per la ionosfera i la Terra.

### 1) Càlcul de la capacitat

Calcularem la capacitat de la cavitat esfèrica, suposant que tenim la distribució superficial de càrrega a un radi $a$ (superfície de la Terra) i una distribució contínua i homogènia de càrrega entre els radis $b$ i $c$ (ionosfera).




Calculem el potencial generat entre les superfícies $a$ i $b$ degut a una càrrega $Q$.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{a} - \int_b^a \frac{1}{r}dQ\right], \tag{2}$$

on

$$dQ = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}(c^3 - b^3)} 4\pi r^2 dr. \tag{3}$$

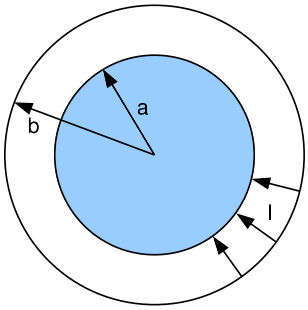
Integrant obtenim

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{3}{2}\frac{c^2 - b^2}{c^3 - b^3}\right]. \tag{4}$$

Per tant, la capacitat resultant és:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0\left[\frac{1}{a} - \frac{3}{2}\frac{c^2 - b^2}{c^3 - b^3}\right]^{-1}. \tag{5}$$

### 2) Càlcul de la inductància




Prenent un tall de l'esfera de radis $a$ i $b$, calculem la inductància. El corrent circula entre $a$ i $b$ travessant una superfície de radi $r$, on $r \in [a, b]$ i aplicant el teorema d'Ampère podem calcular el camp magnètic com:

$$\mu_0 I = \int_C \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} = \vec{B}(r) \cdot 2\pi r, \tag{6}$$

on $B(r)$ és perpendicular a la superfície i el seu mòdul val:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{7}$$

Calculem el flux magnètic que travessa la superfície.

$$\Phi = \int_S \vec{B}(r) \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_a^b B(r) \cdot r dr d\theta. \tag{8}$$

Substituïm l'equació 7 i la integral dóna

$$\Phi = \mu_0 I (b - a). \tag{9}$$

La inductància s'obté de l'equació

$$\Phi = L \cdot I, \tag{10}$$

on prenent 9 tenim

$$L = \mu_0 (b - a). \tag{11}$$

### 3) Càlcul de la freqüència de ressonància

El radi de la Terra $a$ és 6371 km, l'inici de la ionosfera $b$, 55 km d'alçada i el gruix $c - b$, 1550 km.

Substituint en 5 i 11, valorem la capacitat i la inductància.

$$C = 5973 \mu\text{F} \tag{12}$$
$$L = 69,12 \text{mH} \tag{13}$$

i per l'equació 1 tenim la freqüència de ressonància

$$f_0 = 7,83 \text{Hz} \tag{14}$$

### Conclusions

El 1952, W. O. Schumann va descobrir una ressonància de freqüència molt baixa deguda a la interacció de l'atmosfera. Fins ara el fenomen ha estat estudiat des de diversos punts de vista.

L'aproximació més senzilla consisteix a dividir la velocitat de la llum (ona electromagnètica) per la longitud de la Terra (longitud de la cavitat) i s'obté 7,5 Hz de freqüència de ressonància. El problema d'aquesta aproximació és que, per tenir com freqüència de ressonància 7,8 Hz, necessitaríem que la velocitat de propagació fos més gran que la velocitat de la llum en el buit o bé que el radi de la Terra fos més petit. Les dues opcions són impossibles.

L'aproximació a un circuit elèctric feta en la resolució del problema és curiosa, i il·lustra un mètode per calcular paràmetres elèctrics d'una estructura com la formada per la Terra, l'atmosfera i la ionosfera. El seu punt feble és que l'aproximació depèn molt de les dades i la freqüència pot variar des de 6 Hz fins a 10 Hz, amb la qual cosa es modifica l'inici i el gruix de la ionosfera.

Estudis actuals fan simulacions amb l'ordinador de l'atmosfera i el moviment de les càrreges elèctriques per obtenir resultats més acurats. S'estudien les variacions de la freqüència i les seves causes com a indicadors del bon estat de l'atmosfera. També hi ha estudis de la presència de la ressonància de Schumann en altres planetes com ara Venus, Mart, Júpiter, Saturn i la seva lluna Titan, per demostrar la presència d'ionosfera i algun tipus d'excitació com per exemple tempestes elèctriques.