

ADQUISICIÓ I DESENVOLUPAMENT DE LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA

Josep Callís Franco
Universitat de Girona

Albert Mallart Solaz
Universitat de Barcelona

RESUM

Els currículums actuals es basen en vuit competències que han d'adquirir tots els alumnes, anomenades *competències bàsiques*. Una competència es considera una capacitat per actuar eficaçment, i l'adquisició de totes vuit hauria de permetre als alumnes la interpretació crítica i constructiva de la realitat que els envolta. En particular, la competència matemàtica hauria de permetre'ls produir informació per resoldre problemes quotidians i prendre decisions.

PARAULES CLAU: competències bàsiques, competència matemàtica, currículum, currículum matemàtic, educació matemàtica.

ACQUISITION AND DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL COMPETENCE

ABSTRACT

Current curricula are based on eight key skills that all pupils must acquire. Key skills allow us to act effectively and the acquisition of all eight should give pupils the competence to critically and constructively interpret the reality that surrounds them. In particular, mathematical competence should enable them to produce more information to solve everyday problems and make decisions.

KEYWORDS: key skills, mathematical competence, curriculum, mathematics curriculum, mathematics education.

1. CAP ALS CURRÍCULUMS BASATS EN COMPETÈNCIES

«L'evolució social i tecnològica que s'ha generat de manera tan radical i accelerada, especialment en l'última dècada del segle xx i en l'actual d'inici del segle XXI, juntament amb l'interès posat en les avaluacions educatives, especialment a partir dels anys vuitanta del s. xx fins avui, per valorar l'eficiència i la qualitat educativa (Informe Cockroft, Delors, PISA 2000 i 2003, assoliment de competències bàsiques de la Generalitat de Catalunya, 2001...), i la necessitat d'adaptació al nou espai europeu, mostren que els sistemes educatius establerts no resolen les demandes que genera el món d'avui consolidat en la permanent transformació i canvi i, conseqüentment, resulta necessari modificar els currículums vigents» (J. Callís i C. Callís, 2007, p. 9).

El currículum és la planificació educativa que configura la formació dels ciutadans i on es determinen les competències que cal assolir per adaptar-se i fer front a les demandes i exigències socials per a un context spatiotemporal concret. En aquest context, per tant, es defineixen els objectius que han de permetre desenvolupar els continguts conceptuals, procedimentals, habilitats, estratègies, recursos i tècniques que han de possibilitar la plena interacció amb la societat i l'entorn a partir d'una adequada capacitat crítica i imaginativa. És obvi que els canvis estructurals d'una societat impliquen canvis curriculars.

La Llei orgànica 2/2006, de 3 de maig, d'educació (LEC) assenyala que per, a la societat, l'educació és el mitjà de transmetre i, al mateix temps, de renovar els coneixements i els valors que la sustenten, de treure les màximes possibilitats de les seves fonts de riquesa, de fomentar la convivència democràtica i el respecte a les diferències individuals, de promoure la solidaritat i evitar la discriminació amb l'objectiu fonamental d'aconseguir la cohesió social. Esmenta els principis que han de fonamentar l'educació, entre els quals cal destacar el fet que totes les persones tenen dret a una bona qualitat educativa (independentment de les seves condicions i circumstàncies) i, per tant, el dret a la igualtat que garanteixi oportunitats per a tothom, la inclusió educativa i, conseqüentment, que actuï com a element compensador i no discriminador de les desigualtats personals, culturals, econòmiques i socials, amb especial atenció a les que derivin de discapacitats.

La principal novetat entre la Llei d'educació de Catalunya (LEC, 2009) i la Llei orgànica d'educació (LOE, 2006), fins ara vigent, i per tant dels currículums que se'n desprenen, és que la LEC determina els objectius terminals d'acord amb l'adquisició de competències, les quals segons el projecte de l'Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic (OCDE), anomenat *Definició i selecció de competències* (DeSeCo), es defineixen com «la capacitat per respondre

a les demandes i portar a terme les tasques de forma adequada. Sorgeix de la combinació d'habilitats pràctiques, coneixements, motivació, valors ètics, actituds, emocions i altres components socials i de comportament que es moguin conjuntament per aconseguir una acció eficaç». La competència per Perrenoud (2000) és entesa com «una capacitat d'actuar eficaçment en un tipus definit de situacions, capacitat que es recolza en els coneixements però que no s'esgota en ells». El concepte de competència inclou tant els coneixements teòrics com les habilitats i les actituds segons Girono i Dalmau (2001).

Tot i la gran diversitat existent sobre el concepte de competència, hi ha un cert acord a considerar-la com «una acció conscient efectuada amb l'objectiu de solucionar una problemàtica contextualitzada, aplicant i posant en joc els condicionants necessaris i adequats (coneixements, procediments, actituds, estratègies, habilitats...) per aquell context, amb capacitat per analitzar críticament el procés i el resultat i fer-hi, si cal, les modificacions pertinents. Un domini competencial representa, doncs, un complex procés integrador d'estructures mentals i habilitats no mentals» (J. Callís i C. Callís, 2007, p. 9).

Els nous currículums de primària i secundària que s'atenen a les indicacions de la Unió Europea, assumides per la Llei orgànica 2/2006, de 3 de maig,¹ que regulen els ensenyaments mínims (objectius, continguts, criteris avaluadors...) a tot l'Estat, defineixen vuit competències bàsiques² que cal aconseguir tot remarquant la importància de les competències matemàtiques per a la consecució global d'aquestes competències, ja que les competències matemàtiques permeten analitzar, interpretar i valorar informacions de l'entorn a l'hora d'afrontar situacions quotidianes i, d'acord amb aquesta conceptualització, tal com indica la llei, formen els pilars sobre els quals es construeixen els aprenentatges i el lloc on conflueixen totes les matèries del currículum: «Les competències matemàtiques són una de les competències bàsiques que han d'assolir els alumnes en aquesta etapa, ja que són necessàries en la vida personal, social i escolar... Nombroses situacions quotidianes, i de les diverses àrees, requereixen l'ús de les matemàtiques per poder analitzar-les, interpretar-les i valorar-les. Aquesta competència té un caràcter transversal a totes les àrees, encara que és l'àrea de matemàtiques la que se n'ocupa especialment».

Les competències bàsiques s'han d'adquirir des de totes les àrees i matèries, per anar més enllà de la pura transmissió i juxtaposició dels continguts de cada matèria. Per adquirir les competències bàsiques és necessari, doncs, establir

1. Reials decrets 151.23, 1630 i 1631.

2. a) Coneixement del món físic i interacció amb aquest; b) Tractament de la informació i competència digital; c) Autonomia i iniciativa personal; d) Competència matemàtica; e) Aprendre a aprendre; f) Comunicació lingüística; g) Expressió cultural i artística, i h) Competència social i ciutadania.

l·ligams entre les diferents matèries per integrar els continguts de manera significativa ja que tots els professionals educatius, des de les seves matèries, tenen una responsabilitat compartida en aquesta tasca. L'adquisició de les competències ha de permetre als alumnes interpretar críticament i constructiva la realitat que els envolta ja que això contribueix al desenvolupament personal i social.

En aquest nou context, el currículum s'ha hagut de replantejar donant un enfocament més global de l'aprenentatge tot potenciant la interacció amb la realitat. Es tracta que l'aprenentatge dels continguts segueixi una metodologia que condueixi a l'adquisició de competències per donar respostes a la problemàtica de la realitat, o sigui, es tracta de transformar la instrucció en aprenentatge. El treball per competències implica una clara necessitat d'aplicar metodologies actives amb enfocaments de mètode científic per descobriment, fet que fa que sigui més necessària que mai la innovació didàctica i la transformació metodològica vers els aprenentatges actius, reflexius i participatius que fomentin l'autocrítica i el desenvolupament de la capacitat de superació. S'insisteix molt en la comprensió lectora, en l'expressió oral i escrita, en el càlcul i la resolució de problemes com a clau de volta del treball en l'educació obligatòria i en cap cas no es pretén augmentar el nombre d'hores de les matèries perquè els continguts i els horaris ja són prou extensos.

Tota competència és, per tant, una estructura complexa (J. Callís, 2006, p. 123). «Les competències han de permetre saber analitzar i gestionar (identificar, interpretar, transcriure, transferir i avaluar) els contextos i situacions reals i, els processos mentals que es necessiten i apliquen. [...]» Tota competència, en el fons, és alhora multicompetencial ja que cada competència necessita de subcompetències «que possibilitin organitzar i gestionar tant la informació com el propi control personal i els sabers conceptuals i procedimentals amb capacitat per saber resoldre situacions i problemes tot adequant-los a l'especificitat i canvis de cada context i, fer-ho sota una visió crítica que cerca la qualitat i la innovació», circumstància que fa que difícilment es pugui avaluar la competència per un determinant producte d'un moment, ja que aquesta competència és un procés evolutiu i per tant l'avaluació que es fa detecta l'estadi evolutiu d'aquesta adquisició en aquell moment concret, sense que això signifiqui el ple domini competencial. Els controls avaluadors, per tant, només són factibles a partir dels productes o accions que es generen en aplicar-los en contextos dominats i, especialment, en els no coneguts.

2. COMPETÈNCIES MATEMÀTIQUES BÀSIQUES

La capacitat de llegir, escoltar, escriure i parlar un llenguatge és una de les eines més importants de la societat humana per a la integració i interrelació socials.

Les matemàtiques poden considerar-se, i de fet ho són, un llenguatge del qual s'han de conèixer els elements fonamentals del discurs matemàtic i de la seva simbologia expressiva (termes, símbols, signes, procediments...) i saber aplicar-los a la resolució de problemes sorgits de diverses situacions reals que són necessàries i es tracten, per tant, en moltes assignatures. Llenguatge o competència que resulta imprescindible per entendre i comprendre qualsevol entorn i realitat.

La importància de la competència matemàtica per al desenvolupament global la destaquen estudis com els informes Cockroft, el del National Council of Teaching of Mathematics (NCTM) o de l'OCDE/PISA (www.pisa.oecd.org), que la defineixen com la «capacitat d'una persona per identificar i entendre la funció que tenen les matemàtiques en el món, emetre judicis ben fonamentats i saber utilitzar i relacionar-se amb les matemàtiques de manera que li puguin solucionar necessitats reals de la vida com a ciutadà constructiu, responsable i reflexiu». També els documents d'organismes com la Comissió Europea, que fan referència a la competència matemàtica, apunten: «Habilitat per poder emprar sumes, restes, multiplicacions, divisions i fraccions en el càlcul mental o escrit amb la finalitat de poder resoldre problemes de situacions quotidianes. L'èmfasi cal situar-lo en el procés i l'activitat, encara que també en els coneixements. La competència matemàtica comporta la capacitat i la voluntat d'emprar formes diverses de pensament (lògic, espacial) i representacions (fórmules, models, construccions, gràfics, diagrames...)». Mogen Niss (1999) la defineix com «l'habilitat d'entendre, jutjar, fer i usar matemàtiques en una gran varietat de situacions i contextos en els quals la matemàtica té, o podria tenir, un paper important. La competència matemàtica és una habilitat per utilitzar nombres i les seves operacions bàsiques, els símbols i les formes d'expressió. També preveu el raonament matemàtic per produir i interpretar informacions, per conèixer més aspectes quantitius i espacials de la realitat i per identificar i resoldre problemes relacionats amb la vida quotidiana. Ha de contribuir a la identificació de raonaments vàlids i a la valoració de la veracitat dels resultats obtinguts. Es requereix la selecció de les tècniques adequades per calcular, representar i interpretar a partir de la informació disponible, i també l'aplicació d'estratègies de resolució de problemes». Segons això, Niss sintetitza el domini i la capacitat matemàtica en vuit competències, que són les mateixes sobre les quals s'estructura l'anàlisi del domini de competències matemàtiques que efectua l'OCDE/PISA: 1. Pensar i raonar; 2. Argumentar; 3. Comunicar; 4. Modelar (traduir la realitat a una estructura matemàtica); 5. Plantejar i resoldre problemes; 6. Representar; 7. Utilitzar el llenguatge i operacions simbòliques, formals i tècniques; 8. Utilitzar ajudes i eines.

La formació matemàtica en els termes en què ho fa el Projecte OCDE/PISA (2000, 2006) s'entén com la capacitat de l'individu a l'hora de moure's pel món per

identificar, comprendre, establir i emetre judicis amb fonament sobre el paper que tenen les matemàtiques com a element necessari per a la vida actual i futura de qualsevol ciutadà constructiu, compromès i capaç de raonar. La competència matemàtica definida en la LOE i les unitats competencials³ que la configuren es fonamenten sota la mateixa consideració de l'OCDE/PISA i, per tant, de Mogen Niss.

El domini competencial matemàtic segons la LOE implica, per tant, un coneixement i comprensió dels elements matemàtics, operacions i relacions bàsiques entre si i la identificació de les situacions on poden ser útils. Es requereixen les habilitats necessàries per aplicar els principis i els processos matemàtics en situacions quotidianes de l'àmbit personal, social i laboral i per seguir i valorar arguments encadenats, localitzant les idees bàsiques. Al mateix temps, resulta necessari adquirir un adequat domini dels procediments relatius a l'anàlisi i a la producció d'informació matemàtica per a qualsevol camp de coneixement i de les estratègies bàsiques en la resolució de problemes. És important subratllar que s'han d'aconseguir habilitats que permetin raonar matemàticament, comprendre una demostració matemàtica i comunicar-se en el llenguatge matemàtic fent ús de les eines adients. El desenvolupament de la competència matemàtica ha de fer possible l'ús espontani i amb confiança en els suports d'elements matemàtics i formes de raonar i actuar en els àmbits personal, social i laboral.

El domini de les competències matemàtiques segons l'OCDE/PISA s'organitza, igualment que el seu procés avaluador, a través de tres eixos:

- a) Contextos: les situacions i els entorns on se situen els problemes.
- b) Processos: les habilitats i els continguts matemàtics requerits per resoldre els problemes d'acord amb certes nocions clau.
- c) Estructures: els procediments i les estratègies que han de ser aplicades per connectar el món real, en el qual es generen els problemes, amb les matemàtiques per resoldre així els mateixos problemes plantejats.

Els vigents decrets del currículum de primària i secundària (Decret 142 i Decret 143, de 2007) especifiquen i detallen els components implícits de la competència matemàtica, els quals, si els interrelacionem amb les competències bàsiques definides per Niss (1999) o de l'OCDE/PISA, en resulta la següent taula comparativa en què es relaciona cada una de les vuit competències amb propostes que la potencien i desenvolupen:

3. 1. Pensar matemàticament; 2. Raonar matemàticament; 3. Plantejar-se i resoldre problemes; 4. Obtenir, interpretar i generar informació amb contingut matemàtic; 5. Utilitzar les tècniques i els instruments matemàtics bàsics; 6. Interpretar i representar per mètodes i llenguatges diversos els processos i resultats matemàtics; 7. Comunicar el treball i els descobriments utilitzant progressivament el llenguatge matemàtic.

<i>Pensar matemàticament</i>	Construir coneixements matemàtics a partir de situacions on tinguin sentit experimentar, intuir, formular, comprovar i modificar conjectures, relacionar conceptes i fer abstraccions.
<i>Raonar matemàticament i argumentar</i>	Fer induccions i deduccions, particularitzar i generalitzar, reconèixer conceptes matemàtics en situacions concretes; argumentar les decisions preses, així com l'elecció dels processos seguits i de les tècniques utilitzades.
<i>Plantejar-se i resoldre problemes</i>	Llegir i entendre l'enunciat, generar preguntes relacionades amb una situació-problema, plantejar i resoldre problemes anàlegs, planificar i desenvolupar estratègies de resolució, verificar la validesa de les solucions, cercar altres resolucions, canviar les condicions del problema, sintetitzar els resultats i mètodes emprats, i estendre el problema, recollint els resultats que poden ser útils en situacions posteriors.
<i>Modelar</i>	Traduir la realitat a una estructura matemàtica. Obtenir, interpretar i generar informació amb contingut matemàtic.
<i>Representar</i>	Interpretar i representar (a través de paraules, gràfics, símbols, nombres i materials) expressions, processos i resultats matemàtics.
<i>Utilitzar el llenguatge i operacions simbòliques, formals i tècniques. Utilitzar ajudes i eines</i>	Utilitzar les tècniques matemàtiques bàsiques (per comptar, operar, mesurar, situar-se a l'espai i organitzar i analitzar dades) i els instruments (calculadores i recursos TIC, de dibuix i de mesura) per fer matemàtiques.
<i>Comunicar</i>	Comunicar als altres el treball i els descobriments realitzats, tant oralment com per escrit, utilitzant el llenguatge matemàtic.

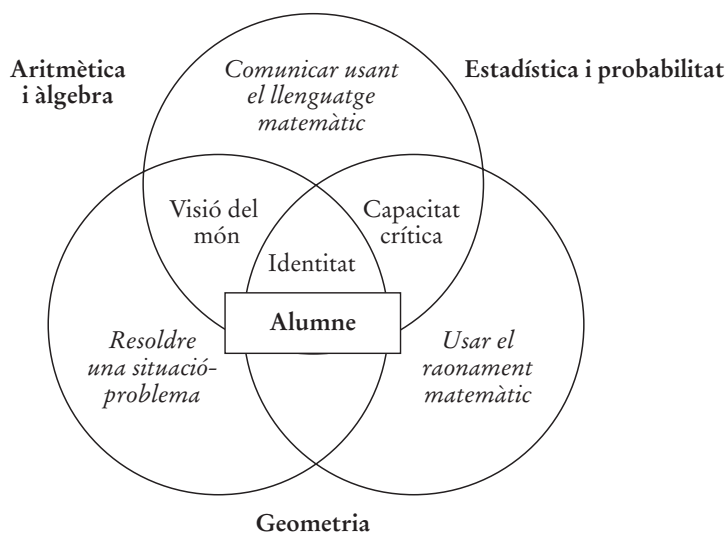
Resulta molt evident, per tant, la gran connexió i dependència existent entre la LEC i la direccionalitat de l'OCDE/PISA tal com hem anat indicant, de manera que la primera, la LEC, es desprèn de la segona.

Per veure fins a quin punt en són d'encertats els currículums catalans pel que fa a la selecció de les subcompetències matemàtiques que determinen, només

hem de donar una visió a altres currículums estrangers de qualitat, com poden ser, entre d'altres, els currículums matemàtics belgues o els quebequesos. Tots dos coincideixen a considerar les competències matemàtiques una síntesi de tres subcompetències (Jobin, 2008):

- a) Resoldre una situació-problema.
- b) Saber utilitzar i aplicar un raonament matemàtic.
- c) Comunicar amb l'ajuda del llenguatge matemàtic.

El gràfic adjunt mostra com aquestes tres subcompetències i les seves interconnexions incideixen en l'alumne tant respecte als camps de continguts matemàtics implicats, com en l'estructuració de la seva personalitat.



Cal entendre que des de totes les disciplines científiques es potencien i es treballen processos i capacitats que incideixen en l'adquisició de les competències matemàtiques a partir de l'observació, identificació, relació, codificació i representació, interpretació, inferència i anàlisi, modelització, les quals ajuden al desenvolupament del pensament logicomatemàtic. No obstant això, hem de destacar, també, dos aspectes importants (Mallart, 2009a) que és convenient assumir

per a una concepció transdisciplinària de l'educació matemàtica: a) la necessitat de provocar permanentment la reflexió explícita sobre aquestes capacitats, afavorint una aprehensió implícita, i b) el fet de considerar aquestes capacitats com a no estàtiques.

Atès que l'educació matemàtica cal entendre-la com un conjunt de coneixements bàsics per formar ciutadans responsables i crítics davant d'una societat cada vegada més tecnificada, l'aprenentatge de les matemàtiques, no només té importància com a disciplina curricular, sinó que a més a més té un paper a l'hora de donar una igualtat d'oportunitats a tots els alumnes com determina la LEC.

3. CONSIDERACIONS METODOLÒGIQUES PER DESENVOLUPAR LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA

Acadèmicament, la competència matemàtica es concreta en el fet que els alumnes han de saber interpretar i produir informació per resoldre problemes quotidians i per prendre decisions. La finalitat en l'educació obligatòria s'aconsegueix quan els coneixements matemàtics s'apliquen de manera natural en tots els camps de coneixement i de la vida quotidiana. L'actitud que s'ha de transmetre ha d'afavorir l'ús dels nombres, dels símbols i altres elements matemàtics i l'ús del raonament per justificar els resultats. Ha de ser una actitud positiva que a través del raonament busca la veracitat dels resultats.

La manera d'ensenyar i d'aprendre matemàtiques escolars no és sempre la mateixa; primer, ha de ser contextualitzada, per, després, poder passar a nivells d'abstracció més alts. Segons Schoenfeld (1992), aprendre a pensar matemàticament significa valorar el procés de passar d'un problema en termes quotidians a un altre en termes matemàtics, que es pugui resoldre matemàticament i després explicar-ne la resposta en termes quotidians (matematització) i valorar el procés d'abstracció perquè es pugui aplicar, i desenvolupar competències per fer servir instruments al servei d'estructurar el pensament i el sentit comú de com fer matemàtiques.

D'una manera sintètica, la competència pot ser entesa com aquell coneixement pràctic sobre quelcom que permet la solució de determinats problemes que es presenten, fet que implica el domini d'habilitats procedimentals i manipuladores. No obstant això, aquest domini es podria assolir com un procés més o menys mecànic sense tenir-ne comprensió. D'aquí, doncs, que es diferenciïn dos vessants d'aquest domini, el pràctic i el comprensiu, els quals ambdós necessiten de coneixements procedimentals. En certa manera correspon al que Richard Skemp ja durant la dècada dels anys setanta defineix com a *comprensió*

instrumental i *comprensió relacional*. També queda clara la direccionalitat que ha de prendre l'aprenentatge matemàtic per tal de generar, no només instrucció, sinó, fonamentalment, competència, si atenem les paraules d'alguns pensadors i matemàtics d'aquests últims segles, les quals ens permeten apropar-nos i entendre que, en gran manera, la causa del nivell tan alt de fracàs escolar en matemàtiques es troba en la metodologia que s'aplica per aconseguir aquest aprenentatge:

— Alfred North Whitehead (1861-1947). «Només hi ha una cosa que cal ensenyar: la vida en totes les seves manifestacions. En comptes d'aquesta senzilla unitat, oferim als nens una àlgebra, una geometria... no relacionades amb res»... «Les matemàtiques elementals haurien de tractar-se com l'estudi d'un conjunt d'idees fonamentals de les quals l'estudiant pot copsar-ne la importància immediata, els enunciats i mètodes que no puguin passar aquesta prova independentment de la seva importància per a estudis més avançats haurien de ser suprimits inexorablement».

— Richard Courant (1888-1972): «L'abstracció i la generalització no són més vitals per les matemàtiques que els fenòmens concrets, i, sobretot, no ho són més que la intuïció inductiva».

— Pere Puig Adam (1900-1960), Julio Rey Pastor (1888-1962): «La matemàtica de l'ensenyament primari ha de ser instrumental, la del secundari ha de ser educativa o formativa i la universitària ha de ser professional».

— Johannes von Neumann (1903-1957): «Si la matemàtica s'allunya de la seva font empírica o, més encara, si s'hi inspira indirectament amb la realitat a partir d'idees de segona o tercera mà, està en greu perill... després d'un gran recorregut "abstracte", un tema matemàtic té el perill de degenerar-se».

— James Stoker (1905-1992): «Aquesta actitud de considerar l'abstracció matemàtica com la millor forma d'ensenyament ignora la psicologia humana i raona a l'inversa, ignora que el progrés matemàtic ha anat lligat a la formulació d'abstraccions apropiades i vertaderament vàlides basant-se en una perllongada experiència de caràcter molt concret i ignora que aquest és també el camí que segueix la ment de la majoria de les persones».

— Morris Kline (1908-1992): «Les matemàtiques no s'haurien d'ensenyar deductivament sinó constructivament»... «Si la matemàtica no té significativitat és com si s'ensenyés la notació musical sense permetre interpretar».

— Lluís Santaló (1911-2001): «La matemàtica no és una pesada calculatòria, ni una faramalla de definicions i teoremes d'enunciat complicat i de contingut buit i trivial. En l'ensenyament, la matemàtica, primordialment, ha d'interessar a l'alumne. El càlcul excessiu, cal deixar-lo per a les màquines; la verboria redun-

dant, suprimir-la de soca-rel»... «Cal buscar que no sols operin, sinó que pensin i raonin»... «No és un conjunt d'elements que cal descriure: és el motor d'una acció per a desxifrar enigmes que cal aprendre a utilitzar i, si es pot, contribuir al seu millorament i perfecció».

Davant d'aquesta realitat, resulta imprescindible i essencial cercar metodologies que ajudin la persona a comprendre la matemàtica, i això, segons es pot deduir de les anteriors paraules, significa una matemàtica lligada a la realitat, que parteixi de l'entorn per retornar-hi, que estimuli l'observació per tal de poder fer deduccions lògiques i la seva posterior abstracció, ja que és aquesta la fita final de l'aprenentatge matemàtic. També respecte a aquest enfocament deslligat de la realitat i enfocat en la repetició mecànica d'algorismes operatius, desgraciadament massa utilitzat i freqüent en les nostres aules, sempre hi ha hagut la necessitat d'aquest canvi metodològic i centrat en la manipulació:

— Aristòtil (384 aC-322 aC): «No hi res a l'intel·lecte que no hagi passat pels sentits».

— Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827): «El coneixement ha de, necessàriament, començar pels sentits —si és veritat que res pot ser objecte de comprensió si no ha estat primer objecte de sensació. Per què doncs, començar l'ensenyament amb una exposició verbal de les coses i no per una observació real d'elles? Solament quan aquesta observació de la cosa hagi estat feta, la paraula podrà intervenir per explicar-la amb eficàcia».

— Arthur Schopenhauer (1788-1860): «Suprimir la intuïció per la lògica és tant com voler canviar les cames per crosses.»

— George Pólya (1887-1985): «L'impuls més fort per aprendre és que l'estudiant trobi interès en la matèria que estudia i plaer en l'activitat que d'ella en resulta».

— Emma Castelnuovo (1913): «Com més temps els nens es dediquin a l'estudi d'allò que és concret, com més temps utilitzin en l'observació, millor comprendran, llavors, les formes abstractes».

És evident que es fa imprescindible canviar l'enfocament de l'aprenentatge matemàtic i, conseqüentment, la seva didàctica. Element essencial en el procés de desenvolupament de les competències matemàtiques és centrar l'aprenentatge a partir de la resolució de situacions problemàtiques més connectades amb la realitat i els interessos de l'alumnat. De fet, hauria de constituir i ser el nucli fonamental de l'aprenentatge matemàtic i del bagatge que les matemàtiques han d'aportar a la visió del món i a la manera d'afrontar les situacions conflictives. Encara més, les necessitats matemàtiques que sorgeixen a l'escola haurien d'estar

supeditades a les necessitats matemàtiques de la vida en societat i sorgir com a fruit de projectes matemàtics que, partint de la realitat, haurien de permetre conèixer-la i transformar-la.

Potenciar el domini competencial matemàtic de l'alumnat necessita del domini competencial previ dels professionals de l'educació, i saber analitzar i gestionar (identificar, interpretar, transcriure, transferir i avaluar) els fets matemàtics, coneixement necessari per a qualsevol docent (Callís, 2006) i, per extensió, per a qualsevol persona:

a) Competències acadèmiques (saber, conèixer)

— Posseir i dominar els continguts matemàtics de forma comprensiva i instrumental.

— Conèixer i saber interpretar i representar els processos matemàtics a través de la simbolització.

— Reconèixer les matemàtiques com a instrument de modelització de la realitat.

— Conèixer els aspectes curriculars de l'aprenentatge matemàtic.

— Dominar les bases didàctiques de l'aprenentatge matemàtic.

b) Competències tècniques (saber fer, realitzar)

— Ser capaç de gestionar una classe de matemàtiques (interaccions, motivació, procés metodològic per arribar a l'abstracció...).

— Saber dissenyar una seqüència didàctica sobre continguts matemàtics atinent a la diversitat i al context.

— Saber utilitzar procediments vivencials, manipuladors i tecnològics necessaris per a l'aprenentatge matemàtic i crear-ne de nous.

— Saber integrar la interdisciplinarietat en les planificacions didàctiques.

— Adquirir estratègies i procediments resolutoris i capacitat de generalització.

— Saber utilitzar la recerca-acció per incidir en la innovació.

c) Competències participatives (saber estar)

— Desenvolupar processos d'aprenentatge motivacionals i adequats al nivell o al context.

d) Competències personals (ser)

— Adquirir processos mentals de reflexió crítica i creativa.

— Potenciar i desenvolupar el pensament logicomatemàtic.

Per desenvolupar la competència matemàtica, les implicacions metodològiques més importants que s'han de tenir en compte es poden sintetitzar en les següents:

1. Potenciar situacions de conflicte metacognitiu en què cada alumne pugui descobrir i aprofundir el seu propi coneixement personal (sabers, habilitats, interessos...).
2. Enfocar l'aprenentatge tot potenciant els processos de visualització, o sigui, a partir de la implicació sensorial fruit de la vivenciació i la manipulació.
3. Aplicar la vivenciació, manipulació i simbolització de forma esglaonada i seqüencial per tal de potenciar l'adquisició final de l'abstracció i la capacitat de generalització.
4. Enfocar l'aprenentatge a partir de situacions problemàtiques i integrar la realitat com a punt de sortida i arribada de l'aprenentatge.
5. Estimular l'estimació prèvia i el plantejament de conjetures per tal d'arribar a la formulació de les hipòtesis corresponents.
6. Estimular el treball en grup, l'intercanvi d'opinions i la presentació de resultats tot potenciant-ne la transcripció simbòlica de les situacions i dels processos resolutoris.

4. DESENVOLUPAR LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA A PRIMÀRIA

Considerant que tot aprenentatge significa evolució en les estructures neurològiques cerebrals, això fa que si ens atenem a les teories genètiques i constructivistes de l'aprenentatge, aquest ha de tenir en compte les fases corresponents al desenvolupament maduratiu de la persona però també el desenvolupament cerebral i, alhora, partir de situacions reals que són les que aporten la connexió entre aprenentatge i vida i, per tant, li donen sentit.

La metodologia aplicada a l'escola necessita, d'acord amb això, una profunda innovació didàctica per aconseguir millorar l'aprehensió de l'aprenentatge. Les experiències de la neurobiologia demostren que l'adquisició i la interiorització de l'aprenentatge no es fan efectives només a partir de la memorització de conceptes i algorismes situats en zones específiques del neocòrtex cerebral, sinó que cal que aquests vagin acompanyats i integrats de visualitzacions i sentiments localitzats en les estructures del cervell mitjà i el cervell intern, les quals reforcen i consoliden molt més la comprensió de l'aprenentatge.

El domini matemàtic no s'obté o no consisteix a dominar uns continguts i unes estratègies algorísmiques que tenen per objectiu resoldre les activitats esco-

lars, sinó que el que cal és adquirir competències que permetin cercar la generalització dels fets a partir de situacions abstractes i donar solució a situacions noves i a la vida en general. L'aprenentatge cal entendre'l com un procés configurat a partir de nivells comprensius diversos i alhora evolutius, de manera que sense el domini i la comprensió d'un d'aquests nivells resulta pràcticament impossible l'adequada comprensió del nivell posterior, fet que implica començar i planificar el procés d'aprenentatge segons les fases de vivenciació, manipulació, simbolització i abstracció i generalització (J. Callís, 2010).

a) *Vivenciació*. L'alumnat ha de viure i ser protagonista de la situació problemàtica de manera que se li converteixi en un «problema personal». En la resolució intervé una gran integració multisensorial i emocional capaç de proporcionar la comprensió i una potent representació mental que ha de possibilitar l'aprofundiment posterior del problema.

b) *Manipulació*. Permet aprofundir, plantejar hipòtesis i experimentar sobre el problema. Possibilita la comprensió conceptual i l'adquisició d'estratègies resolutòries reforçades per una variada representació i visualització mental.

c) *Simbolització*. Transforma el procés vivencial i manipulador en llenguatge comunicatiu de manera que la matemàtica es converteix en el llenguatge que permet entendre i descriure la realitat.

d) *Abstracció i generalització*. Possibilita sortir del cas concret resolt per poder ser aplicat a noves situacions.

Per aconseguir una bona adquisició i interiorització de l'aprenentatge matemàtic a infantil i primària, cal saber prioritzar la fase didàctica que ha d'aplicar-se a cada cicle: «El planteig metodològic de qualsevol aprenentatge matemàtic ha de tenir en compte aquesta evolució i graduar-la segons l'estadi evolutiu de la persona. Així, en el nivell piagetian de l'estadi sensoriomotor (fins als dos anys) cal treballar amb una gran atenció i prioritat vivencial i manipuladora i amb menys interès pel treball fet simbòlic (excessiva obsessió per omplir fitxes i més fitxes per lliurar un bon recull als pares) i d'abstracció; sense que això signifiqui no poder-hi incidir de forma puntual i dintre les limitacions que n'imposa el desenvolupament maduratiu. Al llarg de l'estadi preoperacional (de dos a set anys) cal mantenir uns criteris semblants a l'estadi anterior, si bé amb increment del valor simbòlic. I en l'estadi de les operacions concretes (de set a onze o dotze anys), l'activitat simbòlica va adquirint i guanyant importància juntament amb la de l'abstracció sense deixar de banda, en cap moment, el valor de la vivenciació i la manipulació. Serà al llarg de l'estadi de les operacions formals (a partir dels 11 o 12 anys) que la prioritat es desplaçarà vers el nivell simbòlic i d'abstracció, sense deixar mai de connexionar-se i fonamentar-se amb la vivenciació i la manipulació» (J. Callís, 2010, p. 9).

4.1. DE LA RESOLUCIÓ A LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA. UN EXEMPLE

L'escola dedica molt de temps a la instrucció del domini algorísmic de l'operativitat per tal que hom sàpiga resoldre fets i demandes puntuals. Quantes hores i hores, quantes planes i planes, quantes multiplicacions i més multiplicacions, per exemple, no hem fet tots plegats per aprendre a resoldre-les?

Però, quantes persones són capaces de resoldre mentalment, 24×36 , o 238×27 , o 13×18 , o...? Tal vegada s'ha aconseguit que la gran majoria sàpiga aplicar les mecàniques del càlcul escrit però aquest domini no genera les estratègies per ser aplicades al càlcul mental. És a dir, l'aprenentatge assolit no permet ser aplicat a una nova situació o sigui que únicament resol una tipologia concreta de problema i sovint sense saber el perquè de la mecànica aplicada. Seria un clar exemple del domini que Skemp, tal com hem dit abans, anomena *comprensió instrumental*. Igualment succeeix en l'aprenentatge de la resta portant, algorisme que hom aplica amb el supòsit que això és suficient per dominar el concepte de resta, sense que hi hagi comprensió del procés matemàtic implícit, o amb les mecàniques operatòries de les fraccions, resolució d'equacions, derivades, matrius... En tots aquests dominis hi manca la comprensió relacional o el nivell de comprensió conceptual que fa entendre el sentit tant del concepte específic de l'operació com el de les raons que possibiliten les tècniques algorísmiques.

4.1.1. *Aprenentatge i comprensió relacional*

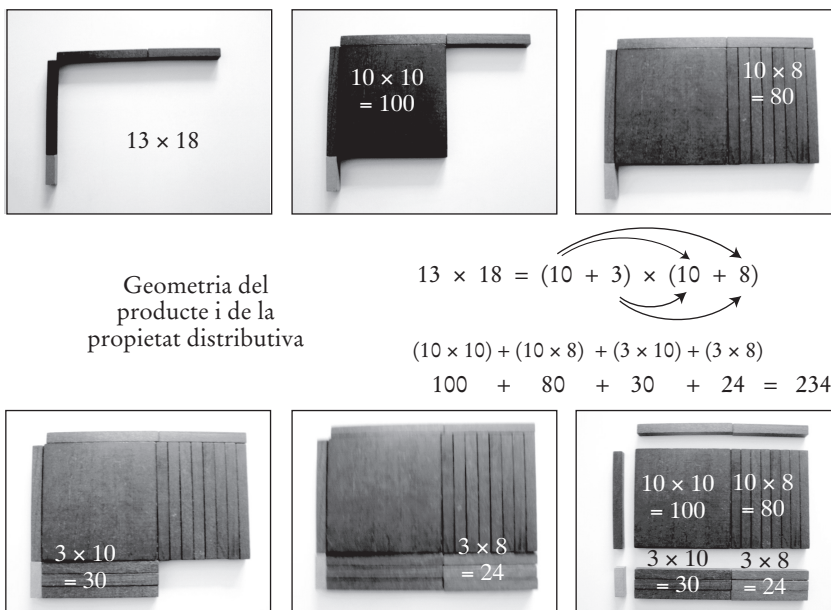
Es necessita partir de processos sensorials (vivenciació del problema per comprendre i detectar-ne les problemàtiques inherents, i fer-ne un posterior aprofundiment amb la manipulació de materials concrets) per tal que s'interioritzi la conceptualització del producte i se'n reforci la comprensió amb imatges visuals.

Tornant a l'aprenentatge operatiu de la multiplicació, perquè sigui fet amb sentit competencial, si en comptes d'una instrucció instrumental es planifica l'aprenentatge des d'una perspectiva d'interrelació aritmètica-geomètrica de la multiplicació i a partir de processos manipuladors, el nivell d'interiorització relacional en possibilita l'aplicació en el camp del càlcul mental i no exclusivament en el càlcul escrit, fet que comporta que l'aprenentatge hagi generat un nivell competencial que permet resoldre situacions diferents de la inicial.

Si en comptes d'iniciar l'aprenentatge d'aquest domini operatiu a partir d'un procés simbòlic de mecàniques de llapis i paper i de pissarra, això es fa amb la uti-

lització de recursos manipuladors diversos com poden ser, per exemple, els multibases de color, llavors es genera l'aprenentatge amb visualització comprensiva.

Agafem, per exemple, la multiplicació 13×18 . Els valors numèrics que es multipliquen necessiten, per poder generar la comprensió relacional, partir de la necessitat comprensiva de la descomposició numèrica de cada valor tal com es «veu» i es treballa amb el material indicat, de manera que 13×18 s'estructura d'acord amb el fet que 13 és $10 + 3$ i 18 és $10 + 8$ o sigui que del producte 13×18 resulta $(10 + 3) \times (10 + 8)$. Considerant que el producte amb els multibases de color és una estructura bidimensional rectangular i que el resultat s'obté completant l'interior (concepte d'àrea) amb el mínim de peces possibles —per tant, utilitzant sempre les màximes possibles—, la disposició, sobre el pla, determina, com es pot observar en les imatges adjuntes, quatre estructures espacials diferenciades: la corresponent a 10×10 ; la de 3×10 ; la de 8×10 i la de 8×3 ; en realitat, la propietat distributiva del producte. És a partir de la comprensió d'aquesta estructuració geomètrica visualitzada, adquirida després de treballar així, i no una vegada feta de forma expositiva pel mestre, sinó amb l'aplicació experimental i continuada dels alumnes, que davant un producte l'aplicació de la propietat distributiva queda visualitzada i en permet el càlcul sense necessitat d'aplicar algorismes escrits.

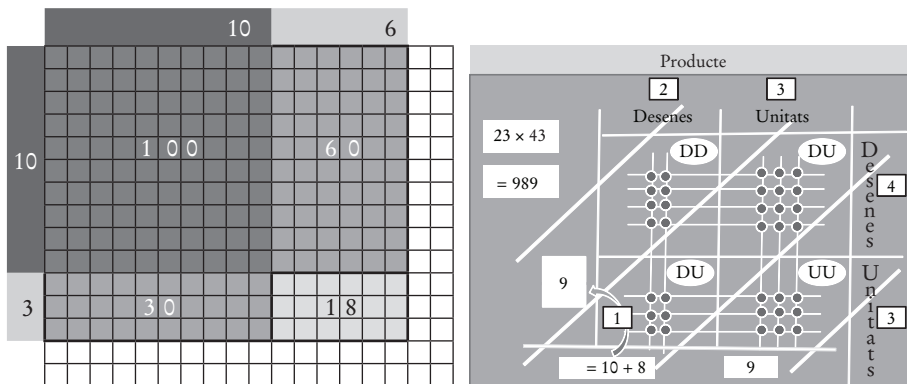


4.1.2. *Estructuració i generalització dels coneixements*

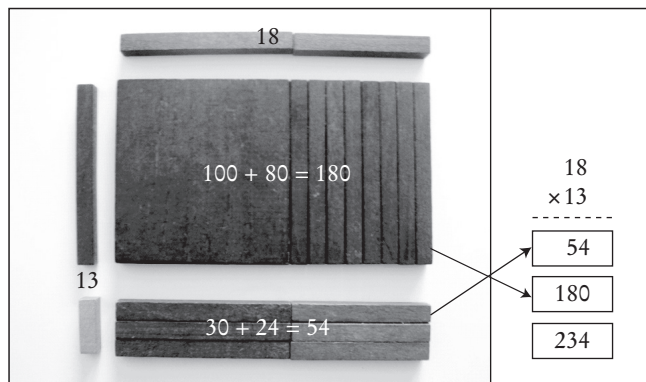
És important que l'alumne no interpreti mai que una propietat descoberta en un material resulta una propietat específica d'aquell material, sinó que és una propietat matemàtica general que apareix en qualsevol altre cas de manipulació i posteriorment generalitzable en el món simbòlic. Cal, per tant, aplicar i visualitzar el procediment amb altres materials o formes resolutòries i passar després a ser representada i utilitzada simbòlicament.

En l'àmbit simbòlic es produeix la substitució del món real per formes i simbolismes que el substitueixen (paraules, dibuixos, esquemes, icones, símbols matemàtics...), però que el que fan és reproduir i visualitzar mentalment la realitat viscuda. S'adquireix, doncs, la capacitat de comprensió i expressió simbòliques dels fets i accions matemàtiques viscudes i manipulades.

Un exemple d'ús d'aquest mateix procediment comprensiu emprat amb els multibases de color però de manera simbòlica seria calcular el resultat d'una multiplicació treballant sobre paper quadriculat, on les peces físiques de la manipulació dels multibases són substituïdes per longituds i àrees (quadrats que integren cada part) dels quatre espais geomètrics; o com a intersecció de valors en taula de doble entrada (multiplicació maia), com una altra manera de reforçar l'estructura de les zones o espais geomètrics del producte.



Una fase posterior de la interiorització és aconseguir aquesta comprensió d'estructures geomètriques per a valors i productes cada vegada més alts (24×17 ; 26×28 ; 327×13 ...) i d'entendre i visualitzar geomètricament el que es fa amb el procés algorítmic que s'aplica en el càlcul escrit.



Estructura geomètrica del producte i mecànica algorísmica.

4.1.3. *L'adquisició de la competència matemàtica de càlcul mental*

El domini aconseguït fruit de la comprensió relacional entre el món numèric i el geomètric comporta, alhora, el domini de la reversibilitat o sigui que, a la inversa, la visió d'una expressió matemàtica (18×16) pugui ser interpretada com a representació d'accions i permeti que a partir d'aquesta expressió es pugui interpretar l'estructura geomètrica que genera i, consegüentment, el poder de calcular-ne el resultat com a suma de les quatre estructures espacials: $100 + 80 + 60 + 48$.

5. DESENVOLUPAR LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA A SECUNDÀRIA

El professor ha d'intentar desenvolupar una actitud positiva i una motivació adequada i favorable. Cal tenir en compte el caràcter instrumental de les matemàtiques i que aquestes apareixen en la majoria de les assignatures per contribuir a desenvolupar altres competències. Blanco (1993) manifesta que l'aprenentatge requereix implicar els alumnes en activitats significatives. Les explicacions del professor són elements fonamentals en certs moments si es fan de manera apropiada, però no convé ensenyar només de manera expositiva; cal oferir als alumnes la possibilitat de viure experiències concretes en què aquestes explicacions puguin mostrar un sentit profund. Ell mateix entén l'aprenentatge com una qüestió d'establiment de relacions, veure les mateixes coses des de punts de

vista diferents. Aspectes com la participació, el diàleg, la deducció de fets sense la intervenció directa del professor, o l'ús de material manipulador, resulten importantíssims, ja que permeten portar un procés inductiu cap a l'abstracció i l'anticipació.

Bergasa (1996) estructura unes intencions educatives matemàtiques per a la secundària obligatòria entorn de tres tipus d'aprenentatge: els relatius al mètode matemàtic (competència numèrica i geomètrica, i desenvolupament i utilització del llenguatge matemàtic), els relatius a actituds i hàbits de treball, i els relatius a valoració i apreciació del coneixement matemàtic.

5.1. LA MILLORA DE L'ACTITUD VERS LES MATEMÀTIQUES. UN EXEMPLE

El professor no pot estudiar en lloc dels alumnes, però sí que cal que hi desenvolupi una actitud positiva i una motivació adequada i favorable perquè aprenguin; ha d'aconseguir que l'alumne s'impliqui activament en el seu propi procés d'aprenentatge. Mallart (2008) posa de manifest que el fet d'introduir recreacions matemàtiques a l'aula augmenta la motivació de l'alumnat i permet fer millor els processos inductius. Les recreacions matemàtiques ajuden a desenvolupar conceptes, reforçar habilitats, desenvolupar habilitats formatives i potenciar el raonament lògic tan útil en altres disciplines. També aconseguen un alt nivell d'implicació i provoquen una actitud oberta cap al coneixement i el plaer per aprendre, descobrir i crear. Els alumnes amb una actitud oberta davant les dificultats abandonen més tard els intents resolutius frustrats de problemes. Mitjançant les recreacions matemàtiques es combaten moltes de les dificultats amb les quals l'alumne es troba quan resol problemes de tot tipus, ja siguin pertanyents a l'àrea de la biologia, la química, la física... (Mallart, 2009b). Per exemple, autorestriccions, interpretacions abusives del llenguatge verbal, o també implícites del llenguatge que hi ha en els enunciat, falses intuïcions, particularitzacions i generalitzacions.

En les matemàtiques, la intuïció hi té una gran importància i es treballa amb l'anticipació i l'experimentació que es practiquen en particular amb la matemàtica recreativa. Encara que segons Blanco (1993) els alumnes se senten més segurs treballant en grup, s'ha d'anar amb molt de compte com s'incentiva i es fomenta la intuïció, ja que en un grup d'individus hi poden haver aspectes que cohibeixin. Els motius poden ser diversos, però no interessa que els alumnes que presenten dificultats en la resolució de problemes escullin mantenir-se al marge de les noves activitats proposades grupalment. Si es treballen en grup els enigmes matemàtics de manera adient, s'aconsegueixen avenços en aprenentatges sobre resolució

de problemes (Mallart, 2008) i, ahora, d'integració dels alumnes en el grup i de l'atenció a la diversitat tan necessària. A més a més de poder-hi jugar tots, existeix un component d'atzar i un requeriment de coneixements aliens a les pròpies assignatures que provenen de les seves experiències personals. De fet, trobar la resposta d'un enigma matemàtic requereix molt més que els coneixements corresponents a alguna assignatura en concret. A causa del caràcter interdisciplinari dels contextos en els quals es pot enquadrar la matemàtica recreativa fins i tot podria succeir que algun alumne que presentés dificultats en l'assignatura de matemàtiques s'interessés i millorés els resultats en altres matèries que indirectament tinguessin relació amb la resolució de problemes.

Un exemple per treballar amb alumnes de secundària pel que fa al desenvolupament de la competència matemàtica mitjançant la matemàtica recreativa podria ser l'endevinalla següent:

L'endevinalla del club esportiu:

Un club esportiu amb 60 socis va decidir organitzar un dinar per tal de celebrar els èxits assolits durant l'any. Com que no tenien taules grans, els organitzadors van optar per distribuir-los en petits grups. Però si els asseien de 2 en 2, en sobrava un; si els acomodaven de 3 en 3, també en sobrava un; i si ho feien de 4 en 4, continuava sobrant-ne un. Finalment, van veure que si els asseien de 5 en 5 no sobrava cap comensal.

Quants socis van assistir a la celebració?

Resposta:

Sabem que el mínim comú múltiple de 2, 3 i 4 és 12. Multiplicat per 1, 2, 3, 4, etc., i a cada multiplicació li sumem 1 (el que sobra), obtenim:

$$12 \times 1 + 1 = 13$$

$$12 \times 2 + 1 = 25$$

$$12 \times 3 + 1 = 37$$

$$12 \times 4 + 1 = 49$$

$$12 \times 5 + 1 = 61$$

I no cal continuar, ja que el club només té 60 socis. Dels nombres que han sortit, veiem que només un, el 25, és múltiple de 5. Per tant, podem estar segurs que al dinar hi havia 25 socis.

Aquesta activitat s'ha dissenyat per a la millora de l'atenció de les dades de l'enunciat i per reforçar el concepte de mínim comú múltiple. El treball individual requereix de la lectura reiterada de l'enunciat fins a trobar una solució. També

hi ha un treball en grup on els alumnes exposen les seves solucions a la resta de la classe. En cas que no hi hagi cap alumne que hagi arribat a una solució adequada, és el professor el que haurà de guiar amb la tècnica de la pluja d'idees una solució correcta.

El professor ha de vigilar que treballin en silenci durant cinc minuts i durant deu minuts més és en el grup classe on es comenten les solucions trobades. En acabar, el mateix professor s'encarrega d'aclarir tots els dubtes i de fer les connexions pertinents amb els continguts explicats i practicats a classe durant dos minuts més. Naturalment, les orientacions temporals no són rígides: sempre s'ha d'estar atent al ritme dels estudiants.

BIBLIOGRAFIA

- BERGASA, Javier; ERASO M. Dolores; GARCÍA M. Victoria; SARA, Sergio (1996). *Matemáticas: materiales didácticos: Primer ciclo de la enseñanza secundaria obligatoria*. Gobierno de Navarra. Departamento de Educación, Cultura, Deporte y Juventud.
- BLANCO, L. J. (1993). «Una clasificación de problemas matemáticos». *Epsilon*, núm. 25, p. 49-60.
- CALLÍS, Josep (2006). «Saber analitzar i gestionar (identificar, interpretar, transcriure, transferir i avaluar) les situacions i els contextos educatius». A: GELI, A.; PÈLACH, I. *Aproximació a les noves competències en els nous títols de mestres*. Girona: Universitat de Girona, p. 123-127.
- (2010). «De la vivenciació a l'abstracció o el camí vers la competència matemàtica». *Perspectiva Escolar*, núm. 341, p. 2-16.
- CALLÍS, Josep; CALLÍS, Carles (2007). «Competències matemàtiques: necessitats i perspectives». *Escola Catalana*, núm. 445, p. 9-13.
- CAZZARO, J. P.; NOËL, G.; POURBAIX, F.; TILLEUIL, P. (1999). *Des compétences terminales en mathématique* [en línia]. Mons (Bèlgica): Université de Mons-Hainaut: <http://www.enseignement.be/index.php?page=23827&do_id=1722&do_check=> [Consulta: 30 juliol 2009].
- «Competencias matemáticas». *Uno*, núm. 29 (gener-febrer-març 2002). [Monogràfic]
- «Currículum d'educació secundària» [en línia]. (2006). Ministeri d'Educació del Quebec, p. 191. <<http://www.learnquebec.ca/eport/sites/learn/en/content/curriculum/mst/documents/chapter61.pdf>> [Consulta: 20 setembre 2009].
- «Decret 142/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària» (2007). DOGC (29 juny 2007).
- «Decret 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria» (2007). DOGC (29 juny 2007).

- GIRONDO, Luisa (2005). «La competència i els aprenentatges escolars: l'àrea de matemàtiques». *Comunicació Educativa*, núm. 18, p. 14-19.
- (2006). «Competència matemàtica i pràctica educativa». *Guix*, núm. 329, p. 16-23.
- GIRONDO, L.; DALMAU CASADEMONT, S. (2001). *Prisma: Matemàtiques, 6: Educació Primària. Proposta didàctica*. Barcelona: Casals.
- GOÑI ZABALA, Jesús M. (2008). *El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.
- (2009). «Competencia matemática». *Educatio Siglo XXI* [Múrcia], vol. 27, núm. 1, p. 35-58.
- INECSE (Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo) (2004). *Competencias básicas generales: Ámbito matemático y lingüístico*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- JOBIN, Gilles (2008). *Les compétences mathématiques du PDF* [en línia]. <<http://www.gilles-jobin.org/jobineries/index.php?2008/03/10/715-les-competences-mathematiques-du-pdf>> [Consulta: 20 octubre 2009].
- LEC (2009). «Llei 12/2009, de 10 de juliol, d'educació» DOGC (16 juliol 2009).
- LOE (2006). «Llei orgànica 2/2006, de 3 de maig, d'educació» BOE (4 maig 2006).
- MALLART, Albert (2008). *Estratègies de millora per a la resolució de problemes amb alumnes de segon d'ESO: ús de la matemàtica recreativa a les fases d'abordatge i de revisió*. Tesi doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- (2009a). «Enseñar matemáticas con conciencia transdisciplinar». A: TORRE, S. de la; PUJOL, M. A. *Educación con otra conciencia: Una mirada ecoformadora y creativa de la enseñanza*. Mataró: Davinci, p. 215-224.
- (2009b). *Interdisciplinarietat a l'educació científica*. Comunicació al VII Congrés Internacional sobre Investigació en la Didàctica de les Ciències, organitzat per l'Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona, 7-11 setembre 2009.
- (2010). *Didàctica de la resolució de problemes per al desenvolupament de la competència matemàtica*. Comunicació al Congrés Internacional de Didàctiques, organitzat per les universitats de Girona, Granada i Ginebra. Girona, del 3 al 6 febrer 2010.
- MARTÍNEZ MORENO, Jaume (2008). *Competencias básicas en matemáticas: Una nueva práctica*. Barcelona: Wolters Kluwer.
- MOYA OTERO, José (2007). «De la competencia: texto y contexto». *Uno*, núm. 46, p. 25-33.
- NISS, M. (1999). «Competencies and Subject Description». *Uddanneise*, núm. 9, p. 21-29.
- ORTEGA, Tomás (2005). *Conexiones matemáticas: Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona: Graó.
- PERRENOUD, Philippe (2000). *L'approche par compétences, ¿une réponse à l'échec scolaire?* Ginebra: Faculté de Psychologie et de Sciences de l'Éducation. Université de Genève.
- PISA (2000). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: La evaluación de la lectura, las matemáticas y las ciencias en el Proyecto Pisa 2000*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

- PISA (2006). *PISA 2006. Marco de evaluación: Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura*. Madrid: Santillana: MEC.
- RICO ROMERO, Luis; LUPIÁÑEZ GÓMEZ, José Luis (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- SCHOENFELD, A. H. (1992). «Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics». A: GROUWS, D. A. (ed.). *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. Nova York: MacMillan, p. 334-389.