Percepcions inicials sobre el raonament matemàtic de l'alumnat de segona ensenyança i batxillerat d'Andorra

Initial perceptions of mathematical reasoning among lower and upper secondary school students in Andorra

Georgina Cerqueda Santacreu

Yolanda Colom Torrens

Universitat d'Andorra (Andorra)

A/e: gcerqueda@uda.ad
https://orcid.org/0000-0002-7411-2537

A/e: ycolom@uda.ad
https://orcid.org/0000-0002-4590-8384

Data de recepció de l'article: 2 de gener de 2025

Data d'acceptació de l'article: 9 de març de 2025

Data de publicació de l'article: 3 de novembre de 2025

DOI: 10.2436/20.3007.01.225

Copyright © 2025

Georgina Cerqueda Santacreu i Yolanda Colom Torrens. Aquest article és d'accés lliure subjecte a la llicència Creative Commons Reconeixement –No Comercial–Sense Obra Derivada 4.0 Internacional. Per a més informació consulteu: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es

Resum

L'estudi avalua les percepcions inicials de l'alumnat sobre diversos tipus de raonament, amb l'objectiu de determinar-ne la comprensió i d'avaluar la capacitat per distingir entre verificacions empíriques i demostracions genèriques. La mostra inclou 28 alumnes de segona ensenyança i 41 de batxillerat, distribuïts en quatre grups heterogenis (dos de cada nivell), tots sense formació prèvia en demostracions. Els participants van realitzar una prova en què havien de valorar diferents raonaments donats per a una mateixa propietat i, posteriorment, demostrar una propietat similar. Els resultats mostren que l'alumnat de batxillerat reconeix millor les limitacions del raonament empíric i mostra una major inclinació cap a l'àlgebra, mentre que a segona ensenyança tendeix a preferir raonaments basats en la verificació empírica amb exemples. També es detecta una diferència significativa entre la percepció de comprensió i la capacitat d'aplicar el raonament a propietats similars. A més, gairebé tot l'alumnat presenta dificultats per formular una demostració acceptable, amb errors tant en l'ús de l'àlgebra com en la comprensió dels conceptes implicats. Aquests resultats indiquen la necessitat de treballar la comprensió de representacions visuals i d'ajudar l'alumnat a centrar-se en les característiques generals dels exemples genèrics per millorar la seva capacitat de comprendre les demostracions.

Paraules clau

Raonament, demostració, matemàtiques, educació secundària.

Abstract

This study evaluates students' initial perceptions of various types of reasoning, with the aim to determine whether they understand these concepts and to assess their ability to distinguish between empirical verifications and generic demonstrations. The sample includes 28 lower secondary school students and 41 upper secondary school students, distributed into four heterogeneous groups (two from each level), none with any prior training in demonstrations. The participants took a test in which they had to evaluate different reasonings provided for the same property and then demonstrate a similar property. The results show that upper secondary school students are better at recognizing the limitations of empirical reasoning and show a greater inclination towards algebra, while lower secondary school students tend to prefer reasoning based on empirical verification through examples. A significant difference is also detected between perceived understanding and the ability to apply reasoning to a similar property. Additionally, nearly all students face difficulties in formulating an acceptable demonstration, making errors in both the use of algebra and the understanding of the underlying concepts. These results indicate a need to work on the understanding of visual representations and to help students focus on the general characteristics of generic examples in order to enhance their capacity to comprehend demonstrations.

Keywords

Reasoning, demonstration, mathematics, secondary education.

Com fer referència a aquest article / How to cite this article:

Cerqueda Santacreu, G., i Colom Torrens, Y. (2025). Percepcions inicials sobre el raonament matemàtic de l'alumnat de segona ensenyança i batxillerat d'Andorra. *Revista Catalana de Pedagogia*, *28*, 68-84. https://doi.org/10.2436/20.3007.01.225

1. Introducció

En les darreres dècades ha augmentat la consciència sobre la importància de fer que l'alumnat, fins i tot en nivells educatius més baixos, participi en activitats matemàtiques autèntiques que representin aspectes essencials de la disciplina (Stylianides et al., 2022). L'ensenyament de les matemàtiques a les escoles ha de reflectir fidelment l'estructura i els conceptes propis de la disciplina, garantint una coherència entre l'aprenentatge de l'alumnat i les pràctiques de la comunitat matemàtica (Stylianides i Stylianides, 2006). Cal tenir present que demostrar és un procés central i característic de les matemàtiques. Les demostracions, tant en el context acadèmic com en l'escolar, són clau per entendre, desenvolupar i transmetre coneixements matemàtics (Hanna i Jahnke, 1996). Per aquest motiu, es considera fonamental incloure les demostracions en tots els nivells de l'educació matemàtica, i els experts coincideixen que fomentar el sentit de la demostració hauria de ser un objectiu prioritari en l'ensenyament (Mariotti, 2006).

1.1. *Competència matemàtica de raonament en els referents curriculars*

El 2002 es va publicar a Dinamarca l'informe del projecte KOM (Niss i Jensen, 2002) amb l'objectiu de definir un currículum de matemàtiques basat en competències que reformés l'ensenyament de les matemàtiques des de l'escola fins a la universitat. L'informe no només introdueix el concepte *competències matemàtiques*, sinó que també en subratlla la importància en el seu ensenyament i aprenentatge.

El procés de demostració, que és el focus d'aquesta recerca, forma part de la competència de raonament, però està estretament relacionat amb les competències de pensament matemàtic i resolució de problemes, incloses en el primer grup de competències. Aquest grup fa referència a la capacitat de formular i respondre preguntes a través de les matemàtiques. També s'associa a les competències del segon grup, que es concentren en el tractament i gestió del llenguatge i les eines matemàtiques. Cada competència es divideix en dues facetes: una de «receptiva», que implica la interpretació d'informació o processos d'altres, i una de «constructiva», que es refereix a la creació independent de processos o informació. En el cas de la competència de raonament, seguir i avaluar una demostració correspon a la faceta receptiva, mentre que crear una demostració pertany a la faceta constructiva.

Aquest informe, i les competències que s'hi descriuen, han servit d'inspiració per a les reformes curriculars de diversos països. En concret, els programes de matemàtiques del sistema educatiu andorrà s'estructuren en competències i prenen com a referents les que es defineixen al projecte KOM. En el nivell educatiu de primera ensenyança, corresponent a l'educació primària catalana, els eixos competencials del programa són la resolució de problemes, el raonament matemàtic i la comunicació. En els programes de matemàtiques de segona ensenyança, equivalent a l'educació secundària, i batxillerat també s'inclou l'eix competencial de modelització. Així doncs, es considera que el raonament i la prova han de ser una part essencial de l'educació matemàtica en els tres nivells del sistema educatiu andorrà.

El programa de matemàtiques de segona ensenyança de l'escola andorrana (Govern d'Andorra, 2023) inclou la competència «Aplicar el raonament matemàtic per conjecturar i per demostrar». Aquesta competència conté l'ús del raonament deductiu, que permet encadenar raonaments lògics per fer demostracions que validin propietats. La descripció de la competència comprèn els diferents llenguatges amb què podem expressar una demostració: el narratiu, el simbòlic o el gràfic. En particular, s'observa que avançar cap al llenguatge simbòlic no implica excloure demostracions visuals vàlides en què els raonaments generals s'expressen a través d'imatges. A més, s'exposa que cal mostrar l'àlgebra com un llenguatge matemàtic que permet fer demostracions, però que aquest no és l'únic ni el millor mitjà per fer-ne, ja que el llenguatge simbòlic implica una abstracció que pot no resultar convincent a l'alumnat d'aquest nivell educatiu. D'altra banda, el programa fa menció de les dificultats de l'alumnat per produir demostracions d'una certa longitud. Per això, el programa recomana un aprenentatge explícit que fomenti la realització de raonaments deductius curts, fent èmfasi en la distinció d'aquests raonaments i els raonaments inductius. Les expectatives de final de segon cicle de segona ensenyança estableixen que l'alumnat ha de ser capaç d'encadenar raonaments per fer deduccions per validar conjectures, així com per refutar conjectures no vàlides trobant contraexemples.

1.2. *Les demostracions amb exemples genèrics*

La tendència a confiar excessivament en exemples per validar i justificar constitueix una de les dificultats principals en l'aprenentatge de la demostració (Healy i Hoyles, 2000; Knuth et al., 2010 i 2020). Un nombre significatiu d'alumnes considera que un conjunt d'exemples és suficient per verificar una propietat matemàtica, i els utilitzen per acceptar o construir arguments (Reid i Knipping, 2010; Stylianides et al., 2017). Tot i això, no es pot desestimar el rol crucial que tenen els exemples en l'activitat de demostrar, ja que permeten desenvolupar, explorar i comprendre conjectures. Diversos autors recomanen que cal dissenyar i plantejar de manera explícita tasques que permetin a l'alumnat fer ús dels exemples de manera estratègica en les activitats de raonament i prova, mostrant-ne les limitacions i ajudant els alumnes a distingir quins exemples són útils per demostrar (Aricha-Metzer i Zaslavsky, 2019; Knuth et al., 2020; Knuth i Na, 2020).

Els exemples genèrics són una de les maneres d'usar els exemples estratègicament en el procés de demostrar. El terme *exemple genèric* apareix inicialment a Mason i Pimm (1984) i el defineixen com «un exemple, però presentat de manera que destaqui el seu rol com a portador de generalitat» (p. 287). Les demostracions genèriques són aquelles que utilitzen un exemple genèric, fent el raonament en termes d'un nombre o un objecte concret sense usar cap propietat específica del nombre escollit, sinó només les propietats que són comunes a tota la classe que representa. Balacheff (1988) també inclou els exemples genèrics en la seva taxonomia d'esquemes de demostració, dins de les justificacions pragmàtiques. Caracteritza els exemples genèrics pel fet de mostrar els motius de la certesa d'una propietat a través de realitzar operacions en un objecte que actua com a representant d'una classe i ens permet emprar propietats que són generals. Es tracta, per tant, de la manera com es presenta la verificació, proporcionant els motius de la validesa de la proposició, i no del fet d'haver-la comprovat en un cas concret.

Per poder determinar si una demostració amb exemples genèrics es considera una demostració, cal que aquesta mostri una estructura d'inferència deductiva. És a dir, ha de generar en la ment del lector un raonament deductiu que el convenci que darrere l'argument hi ha una cadena de deduccions completes (Reid i Vallejo Vargas, 2018). A més, per considerar-la demostració, des d'una perspectiva social, cal que convenci l'alumnat i que compleixi les normes sociomatemàtiques que s'han establert a l'aula. Per això, l'exemple genèric ha de proporcionar un model per construir infinits exemples, de manera que ha d'eliminar la necessitat de produir-ne més. També cal que l'exemple genèric compleixi la funció explicadora de les demostracions, mostrant els motius pels quals la propietat que volem demostrar és certa. Per determinar si el treball escrit compleix aquests criteris d'acceptació, cal que inclogui consciència de generalitat i evidència de raonament matemàtic. És a dir, s'ha de poder detectar que l'alumne és conscient que el seu raonament és vàlid per a tots els casos i el docent ha de poder determinar que l'alumne és conscient que l'ús que ha fet de l'exemple no és una evidència empírica. D'altra banda, l'evidència de raonament matemàtic suposa fer explícits els motius pels quals l'estructura emprada es pot extrapolar a un altre objecte concret i obtenir la mateixa conclusió. Aquestes dues evidències han d'estar relacionades: la consciència de generalitat se sosté per un raonament matemàtic i el raonament matemàtic ha de ser considerat de manera general. Aquestes evidències es poden expressar acompanyant els exemples amb textos escrits o altres representacions. És aquesta argumentació escrita que acompanya l'exemple genèric el que permet distingir-la de les verificacions empíriques amb exemples i qualificar el raonament de demostració (Biehler i Kempen, 2013).

1.3. *Estat de la qüestió*

Diversos autors (Dogan i Williams-Pierce, 2021; Leron i Zaslavsky, 2014; Reid i Vallejo Vargas, 2018; Rowland, 2001; Zaslavsky, 2018) han destacat la rellevància de treballar amb exemples genèrics i sostenen que poden ser instruments potents per treballar la demostració en les diferents etapes educatives. En concret, en l'àmbit de l'educació secundària obligatòria en què se centra aquesta recerca, alguns experts consideren que els exemples genèrics poden funcionar com a suports per a l'aprenentatge de la demostració, facilitant que els estudiants participin en activitats de raonament, i com a prova que habitualment no solen realitzar (Karunakaran et al., 2014). En concret, les demostracions amb exemples genèrics poden facilitar el pas entre la verificació empírica i la demostració general, ja que empren un exemple concret i mostren els motius pels quals la propietat és certa. Això permet que l'alumne vegi la cadena de raonaments sobre l'exemple genèric, reduint l'abstracció i eliminant la necessitat de simbolisme. (Dreyfus et al., 2012). És a dir, l'exemple genèric ofereix un context familiar i intuïtiu que possibilita que es produeixin arguments generals correctes, encara que l'alumne no domini l'ús de les variables, i això permet que l'alumnat de tots els nivells pugui accedir a les idees principals de la demostració. En general, en contextos escolars els exemples genèrics són particularment potents, perquè proporcionen un exemple que permet visualitzar la propietat, i aquest exemple ofereix una explicació que es pot transformar en la base d'un argument més general (Dogan i Williams-Pierce, 2021).

Tot i això, els estudis empírics sobre l'ús dels exemples genèrics per demostrar són escassos, en especial en estudiants de nivells no universitaris. Un d'aquests estudis és el que van dur a terme Aricha-Metzer i Zaslavsky (2019), que van analitzar com estudiants d'ensenyament secundari, tant obligatori com postobligatori, i d'universitat utilitzen els exemples en activitats de demostració. Aquesta recerca conclou que els alumnes usen els exemples de manera genèrica en la majoria de casos (57 %), tot i no haver rebut formació prèvia en l'ús productiu dels exemples. Les autores van observar que gairebé tots els casos d'exemples usats genèricament van ser productius per a la demostració i no van trobar cap cas en què un exemple empíric ho fos. D'altra banda, encara que els alumnes inferissin els motius pels quals la propietat pot funcionar en general a partir dels exemples, no tots van ser capaços de produir un argument que permetés que l'exemple genèric produís una demostració. Per això, les autores conclouen que, encara que l'ús genèric d'exemples pot ser necessari per al seu ús productiu, no és suficient. A més, la investigació mostra que els exemples són més productius quan són donats, de manera que proposen seleccionar curosament exemples per oferir-los a l'alumnat com a eina pedagògica per desenvolupar la capacitat de demostrar i treballar amb l'alumnat la pràctica de focalitzar l'atenció en les propietats generals, ja que l'estudiant pot no percebre la generalitat d'un exemple genèric donat pel docent.

Biehler i Kempen (2013) van investigar l'ús d'exemples i variables en la transició entre demostracions genèriques i formals per part de futurs docents de matemàtiques. Els resultats van revelar que només una part dels estudiants va comprendre adequadament el concepte *demostració genèrica*, mentre que la majoria els confonia amb verificacions empíriques. Tanmateix, aquells estudiants que sí que van reconèixer la generalitat en els exemples genèrics van demostrar ser capaços de fer la transició cap a demostracions formals. En un estudi similar, Karunakaran et al. (2014) van dur a terme una investigació amb docents en formació que van participar en un curs centrat en el raonament i la prova. Els autors van concloure que el curs va tenir un impacte positiu en la capacitat d'aquests futurs docents per identificar i produir correctament exemples genèrics. A més, el curs va afavorir que consideressin els exemples genèrics com a demostracions vàlides i modifiquessin la seva visió sobre la rellevància de dur a terme activitats de raonament i prova en l'educació secundària.

1.4. *Objectius de l'estudi*

L'estudi que es presenta en aquesta publicació forma part d'un estudi més ampli que té per objectiu analitzar l'impacte del treball amb exemples genèrics en el desenvolupament de la capacitat de demostrar en alumnat de segona ensenyança i batxillerat. En aquest treball, ens centrem en la faceta receptiva de la competència de raonament i presentem els resultats d'una part de la prova inicial que té per objectiu determinar les percepcions inicials de l'alumnat sobre diferents tipus de raonament i comprovar si són capaços de distingir els raonaments purament empírics, que no constitueixen una demostració, dels raonaments amb exemples genèrics.

2. Material i mètodes

Les dades presentades en aquesta publicació corresponen a un estudi que ha implicat una mostra de 28 alumnes de primer de segon cicle de segona ensenyança, equivalent a 3r d'ESO, i 41 alumnes de primer de batxillerat del sistema educatiu andorrà, que van realitzar individualment una prova diagnòstica inicial del seu nivell de demostració. La recerca es va dur a terme en grups de classe naturals i heterogenis, seleccionats perquè eren els grups en què les investigadores impartien docència durant el curs en què es va realitzar la recollida de dades. Aquesta selecció va permetre mantenir la cció habitual de les classes, i així garantir un entorn d'aprenentatge natural i evitar qualsevol intervenció que pogués alterar la dinàmica de l'aula. L'alumnat de secundària va dur a terme la seqüència un cop va finalitzar la unitat didàctica de llenguatge algebraic. Els cursos i el moment de realització de les proves es van escollir de manera que els participants haguessin rebut formació en llenguatge algebraic, però no haguessin realitzat activitats de demostració prèviament en cap dels dos nivells educatius implicats en l'estudi. En l'activitat que analitzem, es presenten a l'alumnat quatre raonaments diferents com a possibles demostracions de la propietat que un nombre parell al quadrat és divisible per quatre. L'elecció d'aquesta propietat per determinar la comprensió dels diferents raonaments s'ha fet considerant que no involucra conceptes o propietats matemàtiques complexes i que es pot demostrar fent ús de diferents raonaments i llenguatges. Es demana a l'alumnat que determini si cada un dels raonaments donats compleix les funcions de verificació i explicació. Entre els raonaments presentats, s'inclou una comprovació amb exemples, dues demostracions genèriques amb presentacions diferents (numèrica i visual) i una demostració algebraica. A la figura 1 mostrem la demostració genèrica amb presentació numèrica donada a l'activitat.

FIGURA 1
Demostració sobre un exemple genèric numèric

Resposta 4:
Agafem un nombre parell, per exemple 6, i l'escrivim com a 2 multiplicat per 3.

$$6^2 = 6 \cdot 6 = (2 \cdot 3)\,(2 \cdot 3)$$

$$4 \cdot 9$$

En multiplicar 6 per 6, tenim el factor 2 dues vegades i el factor 3 dues vegades, que multiplicat dona $4 \cdot 9$. Per tant, el resultat es pot dividir per 4.
Com que 2 és un factor de qualsevol nombre parell, podrem fer aquest procediment amb qualsevol altre nombre parell.

FONT: Elaboració pròpia.

En aquesta part de l'estudi, hem pres com a referència l'estructura del test de Healy i Hoyles (2000), però hem modificat les demostracions i les preguntes d'anàlisi per adaptar-les al nostre context i als objectius específics de la nostra investigació. En concret, se sol·licita als estudiants que avaluïn si entenen el raonament proposat, si aquest estableix la validesa general de la conjectura, si és capaç de convèncer sobre la seva veracitat i si explica adequadament per què la conjectura és certa. L'anàlisi de les seves respostes ens permetrà determinar si l'alumnat pot distingir entre verificacions purament empíriques i demostracions genèriques, en què l'exemple utilitzat facilita la generalització de la demostració a qualsevol situació. També es demana als estudiants que indiquin quin dels raonaments prefereixen i per quina raó, fet que ens permetrà explorar les seves concepcions sobre les propietats de les demostracions.

Finalment, basant-nos en el model de comprensió de la demostració de Mejia-Ramos et al. (2012), es demana a l'alumnat que demostri una propietat similar emprant un dels raonaments presentats, de manera que podem avaluar si han pogut transferir les idees principals de la demostració i determinar així el nivell de comprensió. La comparació entre les respostes donades i els esquemes de demostració emprats ens ha permès determinar quin esquema ofereix més percepció de comprensió i quin resulta més accessible a l'alumnat.

3. Resultats

3.1. *Percepció dels diferents raonaments*

En les dues taules següents (taula 1 i taula 2) es mostren les respostes de l'alumnat de segona ensenyança i batxillerat, respectivament, quan se'ls demana de valorar si

Cerqueda Santacreu, G., i Colom Torrens, Y. (2025). Percepcions inicials sobre el raonament matemàtic de l'alumnat de segona ensenyança i batxillerat d'Andorra. *Revista Catalana de Pedagogia*, *28*, 68-84. https://doi.org/10.2436/20.3007.01.225

perceben que cada un dels raonaments donats és comprensible, general, convincent i explicatiu.

TAULA 1

Percepció de comprensió, generalitat, convicció i explicació dels diferents raonaments (SE)

	Raonament algebraic			**Raonament EG amb presentació**		
	Sí	No	No ho sé	Sí	No	No ho sé
Comprensió	19	4	5 (18 %)	11	11	4 (14 %)
Generalitat	15	8	5 (18 %)	15	5 (18 %)	8 (29 %)
Convicció	13	7	8 (29 %)	12	5 (18 %)	11 (39 %)
Explicació	17	4	7 (25 %)	15	2 (7 %)	11 (39 %)
	Raonament empíric			**Raonament amb EG numèric**		
	Sí	No	No ho sé	Sí	No	No ho sé
Comprensió	21	3	4 (14 %)	16	4 (14 %)	8 (29 %)
Generalitat	19	5	4 (14 %)	16	5 (18 %)	7 (25 %)
Convicció	16	4	7 (25 %)	14	5 (18 %)	7 (25 %)
Explicació	19	4	5 (18 %)	20	3 (11 %)	5 (18 %)

FONT: Elaboració pròpia.

Observem que entre l'alumnat del primer curs del segon cicle de segona ensenyança el raonament empíric és el que genera una major percepció de comprensió. A més, també és el raonament que provoca una percepció més elevada de generalitat i convicció. El raonament que més alumnes consideren explicatiu és aquell que inclou un exemple genèric presentat en format numèric, acompanyat d'una explicació escrita. En canvi, el raonament genèric visual és el que ha produït una comprensió menor en els estudiants.

TAULA 2

Percepció de comprensió, generalitat, convicció i explicació dels diferents raonaments (batxillerat)

	Raonament algebraic			**Raonament EG amb presentació visual**		
	Sí	No	No ho	Sí	No	No ho sé
Comprensió	36 (88 %)	5 (12 %)	0 (0 %)	29	7	5 (12 %)
Generalitat	33 (80 %)	4 (10 %)	4	24	10	7 (17 %)
Convicció	34 (83 %)	5 (12 %)	2 (5 %)	21	13	7 (17 %)
Explicació	27 (66 %)	10	4	30	6	5 (12 %)
	Raonament empíric			**Raonament amb EG numèric**		
	Sí	No	No ho	Sí	No	No ho sé
Comprensió	41	0 (0 %)	0 (0 %)	35	4	2 (5 %)
Generalitat	6 (15 %)	34	1 (2 %)	25	14	2 (5 %)
Convicció	6 (15 %)	34	1 (2 %)	25	12	4 (10 %)
Explicació	9 (22 %)	29	3 (7 %)	27	7	7 (17 %)

FONT: Elaboració pròpia.

Entre l'alumnat de batxillerat, tant el raonament algebraic com el raonament amb un exemple genèric presentat numèricament han mostrat nivells similars de comprensió. Tot i això, el raonament algebraic és el que ha generat una percepció de major generalitat i convicció en més estudiants. Pel que fa al raonament amb un exemple genèric presentat visualment, aquest ha estat percebut com el més explicatiu per un major nombre d'alumnes, malgrat ser el que menys comprensió ha generat. En resum, tot i que els raonaments algebraic i genèric numèric han estat considerats comprensibles per un major nombre d'alumnes en comparació amb el raonament genèric visual, més estudiants perceben el raonament visual com el que millor explica per què la propietat és certa.

En la taula 3 mostrem la preferència de raonament de l'alumnat de segona ensenyança i batxillerat.

TAULA 3
Preferència de raonament donat

Raonament	Alumnat SE	Alumnat batxillerat
Raonament algebraic	6 (21 %)	25 (61 %)
Raonament genèric amb presentació visual	4 (14 %)	6 (15 %)
Raonament empíric	10 (36 %)	2 (5 %)
Raonament amb exemple genèric numèric	7 (25 %)	8 (20 %)
Blanc	1 (4 %)	0 (0 %)

FONT: Elaboració pròpia.

S'observa que el raonament empíric és el que prefereix la major part de l'alumnat de segona ensenyança, seguit del raonament amb exemple genèric i l'algebraic. En canvi, a batxillerat, hi ha una preferència més marcada pel raonament algebraic, sent aquest l'escollit per aproximadament dos terços de la mostra.

3.2. *Raonament utilitzat en una propietat similar*

En la darrera part de l'activitat es demana d'aplicar un dels raonaments donats per demostrar que el quadrat d'un nombre senar té residu u quan es divideix entre quatre. Plantegem aquesta tasca, seguint el model de comprensió de la demostració de Mejia-Ramos et al. (2012), per valorar el grau de comprensió dels diferents raonaments. A continuació, mostrem els raonaments emprats en la taula 4, independentment de si aquests s'han utilitzat correctament o no, per generar una demostració. En alguns intents de demostració observem que s'ha usat més d'un raonament.

TAULA 4

Raonament utilitzat per intentar demostrar una propietat similar a la donada en la prova inicial

Raonament utilitzat	**Alumnat SE**	**Alumnat batxillerat**
Raonament algebraic	5 (18 %)	19 (46 %)
Raonament amb exemple genèric amb presentació visual	0 (0 %)	6 (15 %)
Raonament empíric	13 (46 %)	13 (32 %)
Raonament amb exemple genèric numèric	1 (4 %)	5 (12 %)
Altres	0 (0 %)	1 (2 %)
Blanc	11 (39 %)	6 (15 %)

FONT: Elaboració pròpia.

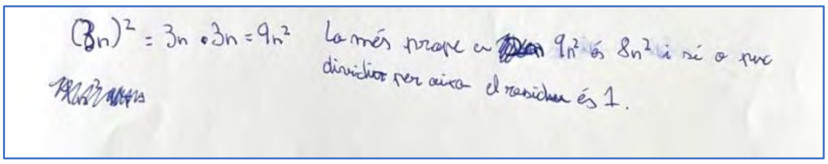
Podem observar que el raonament més utilitzat en l'alumnat de segona ensenyança és l'empíric, tot i que l'enunciat de l'activitat demana explícitament utilitzar algun dels altres raonaments. El nombre d'estudiants que han fet servir el raonament empíric supera el d'aquells que havien expressat preferència per aquest tipus de raonament. També, més d'un terç de l'alumnat participant ha deixat l'activitat en blanc. Entre l'alumnat que ha contestat la pregunta, hi ha 10 estudiants (53 %) que utilitzen un raonament que no correspon al que havien escollit com a preferit o més explicatiu.

D'altra banda, a batxillerat, el raonament més utilitzat per intentar demostrar una propietat similar és l'algebraic, que és emprat per aproximadament la meitat de l'alumnat. Tanmateix, també hi ha aproximadament un terç de la mostra que empra el raonament empíric en el seu intent de demostració.

Cal mencionar que l'ús del raonament algebraic és minoritari a segona ensenyança, i tres dels alumnes que intenten demostrar la propietat utilitzant el raonament algebraic expressen un nombre senar de manera incorrecta, considerant que és senar aquell nombre que té un factor senar. A més, els tres alumnes realitzen la divisió entre quatre només al coeficient per veure que aquesta té residu u. A la figura 2 es mostra un exemple d'aquest tipus de raonaments, en què es detecten els dos errors més comuns.

FIGURA 2

Exemple de raonament algebraic incorrecte



FONT: Fragment de l'intent de demostració d'un alumne de segona ensenyança participant en la recerca.

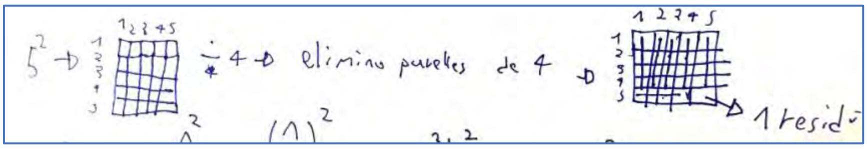
Destaquem que, a batxillerat, tres dels alumnes que usen el llenguatge algebraic per intentar demostrar empren l'àlgebra només per expressar la propietat, però no fan cap manipulació simbòlica que permeti demostrar-la. A més, hi ha 11 alumnes que cometen errors en la utilització de l'àlgebra, tant en la definició de les variables de la propietat com en la manipulació algebraica. Els cinc alumnes restants empren l'àlgebra correctament per definir un nombre senar i operen correctament per trobar l'expressió ampliada del quadrat d'aquest nombre, tot i que només dos d'aquests alumnes són capaços d'oferir un raonament per explicar com aquesta expressió implica la demostració de la propietat.

L'alumne de segona ensenyança que intenta demostrar la propietat reproduint el raonament amb l'exemple genèric no descompon el nombre correctament en factors i tampoc no expressa el nombre escollit de manera que es reflecteixi la seva qualitat de nombre senar i que la seva presentació pugui generar una demostració.

El raonament visual només s'empra a batxillerat, on l'ha utilitzat un 15 % de la mostra. Tot i això, cap dels intents de demostració presentats no reprodueix el raonament sobre la representació feta i les accions que s'hi realitzen no són generals, de manera que no produeixen una demostració genèrica. Per exemple, en la Figura 3, que mostrem com a representant d'aquest tipus de raonaments, veiem que l'alumne no realitza l'estructura en files i columnes de dos i l'agrupament que fa en conjunts de quatre és particular del seu cas concret i no es podria reproduir anàlogament amb un altre valor.

FIGURA 3

Exemple de raonament visual no genèric



FONT: Fragment de l'intent de demostració d'un alumne de batxillerat participant en la recerca.

4. Conclusions

Comparant els resultats dels dos nivells educatius, hem pogut observar diferències significatives en la percepció dels raonaments. Tot i que el raonament empíric sigui el més comprès en els dos nivells educatius, hi ha contrastos rellevants en la percepció que tenen els alumnes sobre la seva generalitat, convicció i explicació. Entre l'alumnat de segona ensenyança, són majoria aquells que consideren que el seu raonament mostra que la conjectura és certa per a qualsevol nombre i n'explica els motius. Els resultats obtinguts a segona ensenyança estan en línia amb altres investigacions prèvies, en què

Cerqueda Santacreu, G., i Colom Torrens, Y. (2025). Percepcions inicials sobre el raonament matemàtic de l'alumnat de segona ensenyança i batxillerat d'Andorra. *Revista Catalana de Pedagogia*, *28*, 68-84. https://doi.org/10.2436/20.3007.01.225

s'ha observat que molts estudiants consideren que un conjunt d'exemples és suficient per verificar una propietat matemàtica i els utilitzen tant per justificar un raonament com per construir una demostració (Reid i Knipping, 2010; Stylianides et al., 2017). En canvi, entre l'alumnat de batxillerat, un 83 % són conscients que els exemples empírics no constitueixen un raonament general i el 71 % afirmen que no expliquen els motius pels quals la propietat és certa. Aquesta discrepància entre les percepcions de l'alumnat sobre el raonament empíric també s'observa en demanar-los pel seu raonament preferit, atenent que el raonament empíric ha estat escollit pel 36 % de l'alumnat de segona ensenyança respecte al 2 % de la mostra de batxillerat. Malgrat això, el nombre d'alumnes de batxillerat que ha utilitzat el raonament empíric per demostrar una propietat similar és superior al que considera que aquest demostra la propietat per a tots els nombres. L'ús d'arguments empírics per fer demostracions per part d'alumnes que són conscients de la seva limitació per demostrar també va ser observat per Healy i Hoyles (2000) en el seu estudi amb alumnat d'alt rendiment de 14 i 15 anys.

En general, en els quatre tipus de raonament, la percepció de comprensió és notablement més alta entre l'alumnat de batxillerat. De fet, tots els raonaments han estat compresos per més del 70 % de la mostra. A secundària, en canvi, l'alumnat tendeix a respondre més sovint que no sap la resposta. A més, s'observen incoherències en les percepcions dels raonaments a secundària, ja que hi ha més alumnes que consideren que els raonaments són explicatius que no pas els que afirmen entendre'ls. En ambdós nivells, el raonament que genera menys comprensió és el raonament amb exemple genèric presentat visualment, que ha estat comprès per menys de la meitat de l'alumnat de segona ensenyança. Considerem que és essencial promoure en l'alumnat el desenvolupament d'habilitats per a la interpretació de representacions visuals i l'extracció d'informació significativa. Aquest aspecte adquireix una importància particular, ja que el programa de matemàtiques de l'escola andorrana fa un èmfasi destacat en aquest tipus de demostracions dins les orientacions didàctiques de la competència de raonament matemàtic. Això concorda amb el que suggereixen Hanna i Jahnke (1996), que consideren que, tenint en compte que el propòsit clau de la demostració és l'explicació, hi hem d'incloure demostracions visuals vàlides, de manera que reduïm el formalisme per facilitar la comprensió.

En els dos nivells educatius s'han detectat errors en l'ús de l'àlgebra i una discrepància entre la seva valoració en la faceta receptiva i la seva utilització en la faceta constructiva. De fet, l'alumnat que ha emprat el llenguatge algebraic per demostrar una propietat similar és menys que l'alumnat que l'ha escollit com a raonament preferit o que havia afirmat entendre el raonament algebraic donat en la primera part de l'activitat. La dificultat per aplicar correctament el raonament en la demostració d'una propietat similar indica que la comprensió real de l'alumnat sobre les demostracions algebraiques és menor del que ells mateixos perceben. En les fases següents de l'estudi serà important analitzar els motius que porten l'alumnat de batxillerat a preferir el llenguatge algebraic, malgrat que molts no en tinguin un domini complet. Aquesta inclinació podria estar relacionada amb diverses creences, com la identificada per Healy i Hoyles (2000), que van observar que l'alumnat considera que l'ús d'expressions algebraiques més complexes podria influir positivament en la valoració del professorat.

En relació amb els exemples genèrics, la gran majoria de l'alumnat dels dos nivells educatius els considera explicatius i més de la meitat els percep com a generals i convincents. No obstant això, aquests exemples han estat poc utilitzats en els intents de demostrar una propietat similar i cap de les persones que ho han provat no ha aconseguit representar l'exemple de manera genèrica. Per això, és necessari treballar amb l'alumnat per millorar la seva capacitat de centrar-se en les característiques generals, ja que no sempre és capaç de detectar la generalitat dels exemples proposats pel docent (Aricha-Metzer i Zaslavsky, 2019).

En general, hem detectat una taxa molt baixa d'alumnat capaç d'escriure una demostració acceptable. Hem observat errors en gairebé totes les persones que han intentat utilitzar el llenguatge algebraic per demostrar la propietat demanada, destacant l'alumnat que només utilitza l'àlgebra per expressar l'enunciat de la propietat, però no realitza cap manipulació algebraica que permeti arribar a la conclusió. D'altra banda, també cal destacar l'alumnat que no ha estat capaç d'expressar correctament un nombre senar o que no ha interpretat correctament el residu de la divisió, cosa que mostra que hi ha mancances no només en l'ús del llenguatge algebraic, sinó també en la comprensió dels conceptes matemàtics implicats. Aquestes mancances detectades concorden amb les trobades per Kempen (2024) en la seva recerca, que analitza les dificultats de l'alumnat que ha finalitzat batxillerat per realitzar una demostració d'una propietat numèrica similar a la que es proposa en el nostre estudi. Kempen va observar la influència de la norma semiòtica d'emprar l'àlgebra per fer demostracions i com la manca d'habilitats de l'alumnat per usar correctament el llenguatge algebraic crea un «cercle viciós» que no li permet escriure demostracions correctes.

Aquest estudi s'ha realitzat en el context d'Andorra, i, tot i que la mida de la mostra és reduïda i la recerca s'ha centrat en les percepcions inicials sobre la demostració d'una única propietat numèrica, les conclusions obtingudes són coherents amb investigacions prèvies. Això suggereix que els resultats podrien ser similars en contextos semblants, tot i que serien necessaris estudis futurs amb mostres més grans i qüestionaris que incloguessin demostracions d'altres propietats per confirmar aquestes conclusions. En tot cas, els resultats posen de manifest la necessitat d'establir pràctiques a l'aula que, d'una banda, fomentin les habilitats dels estudiants per utilitzar l'àlgebra com a eina per expressar generalitat, i, de l'altra, que promoguin un ús més reflexiu dels exemples en els processos de demostració.

5. Bibliografia

Aricha-Metzer, I., i Zaslavsky, O. (2019). The nature of students' productive and non-productive example-use for proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 304–322. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.002

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG; Université Joseph-Fourier.

Biehler, R., i Kempen, L. (2013). Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. Dins B. Ubuz, C. Haser, i M. A. Mariotti (ed.). *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 86-95). ESRME. http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG1/WG1_Kempen.pdf

Dogan, M. F., i Williams-Pierce, C. (2021). The role of generic examples in teachers' proving activities. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(1), 133-150. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10002-3

Dreyfus, T., Nardi, E., i Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classroom. Dins G. Hanna, i Villiers, M. de (ed.). *Proof and proving in mathematics education*: *The 19th ICMI Study* (p. 191-213). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_8

Govern d'Andorra (2023). Programa de matemàtiques de segona ensenyança de l'escola andorrana - Decret del 12-7-2023 de publicació del programa de matemàtiques de segona ensenyança de l'escola andorrana. *Butlletí Oficial del Principat d'Andorra* (BOPA).

Hanna, G., i Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. Dins A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, i C. Laborde, C. (ed.). *International handbook of mathematics education. Part 1* (p. 877-908). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_24

Healy, L., i Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396-428. https://doi.org/10.2307/749651

Karunakaran, S., Freeburn, B., Konuk, N., i Arbaugh, F. (2014). Improving preservice secondary mathematics teachers' capability with generic example proofs. *Mathematics Teacher Educator*, *2*(2), 158–170. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.2.2.0158

Kempen, L. (2024). The vicious circle of high-school graduates' proof construction. *The 15th International Congress on Mathematical Education, 7-14 Juliol, Sydney, Australia*.

Knuth, E., Choppin, J. M., i Bieda, K. N. (2010). Middle school students' production of mathematical justifications. Dins D. A. Stylianou, M. L. Blanton, i E. J. Knuth, E. J. *Teaching and learning proof across the grades* (p. 153-170). Routledge.

Knuth, E., i Na, G. (2020). A comparative study of example use in the proving-related activities of Korean and American students. *The 14th International Congress on Mathematical Education*.

Knuth, E., Kim, H., Zaslavsky, O., Vinsonhaler, R., Gaddis, D., i Fernandez, L. (2020). Teachers' views about the role of examples in proving-related activities. *Journal of Educational Research in Mathematics*, *30*, 115-134. https://doi.org/10.29275/jerm.2020.08.sp.1.115

Leron, U., i Zaslavsky, O. (2014). Generic proving: Reflections on scope and method. Dins M. Pitici (ed.). *The best writing on mathematics 2014* (p. 198-215). Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400865307-017

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. Dins Á. Gutiérrez, i P. Boero (ed.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (p. 173-204). Brill Sense.

Mason, J., i Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277-289. https://doi.org/10.1007/BF00312078

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., i Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 3-18. https://doi.org/ 10.1007/s10649-011-9349-7

Niss, M., i Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet.

Reid, D. A., i Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education*: *Research, learning and teaching*. Brill. https://doi.org/10.1163/9789460912467

Reid, D. A., i Vallejo Vargas, E. (2018). When is a generic argument a proof? Dins A. J. Stylianides, i G. Harel, G. *Advances in mathematics education research on proof* *and proving* (p. 239-251). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_17

Rowland, T. (2001). Generic proofs in number theory. Dins S. R. Campbell, i R. Zazkis (ed.). *Learning and teaching number theory*: *Research in cognition and instruction* (p. 157-183). ABC-CLIO. https://www.flm-journal.org/Articles/7DE6E459B48131C6FD31327F97E5B.pdf

Stylianides, G. J., i Stylianides, A. J. (2006). Making proof central to pre-high school mathematics is an appropriate instructional goal: Provable, refutable, or undecidable proposition? *Proceedings of PME 30*, *5*, 209-216.

Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K., i Stylianides, G. J. (2022). Dins M. Danesi (ed.). *Teaching and learning authentic mathematics*: *The case of proving BT - Handbook of cognitive mathematics* (p. 727–761). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-03945-4_9

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., i Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. Dins J. Cai (ed.). *Compendium for research in mathematics education* (p. 237–266). NCTM.

Zaslavsky, O. (2018). Genericity, conviction, and conventions: Examples that prove and examples that don't prove. Dins A. J. Stylianides, i G. Harel (ed.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (p. 283-298). Springer.