Referents per a la creació matemàtica

Frames for mathematical creation

Miquel Albertí Palmer

Doctor en didàctica de les matemàtiques (UAB).
Catedràtic de secundària a l'INS Vallès (Sabadell).
A/e: miquel.alberti@institutvalles.cat

Data de recepció de l'article: 27 de febrer de 2019

Data d'acceptació de l'article: 4 d'abril de 2019

DOI: 10.2436/20.3007.01.125

Resum

Els aspectes psicològics característics de la creativitat són propis també dels processos creatius a matemàtiques. Malgrat tot, la idea que sovint es té de l'espurna creativa en matemàtiques acostuma a veure's desvinculada dels processos lògics que l'haurien de governar. En aquest article, s'analitzen els principals aspectes de la creació matemàtica i s'adrecen alguns referents per aprendre a ser matemàticament creatiu.

Paraules clau

Creativitat, matemàtiques, pràctica situada, diàleg filosòfic.

Abstract

The characteristic psychological aspects of creativity are also specific to the creative processes in mathematics. Despite this, however, the creative spark in mathematics is often thought to bear no relation to the logical processes that should govern it. In this paper the main aspects of mathematical creativity are analysed and several referents for learning to be mathematically creative are considered.

Keywords

Creativity, mathematics, situated practice, philosophical dialogue.

Fonaments psicològics de la creativitat

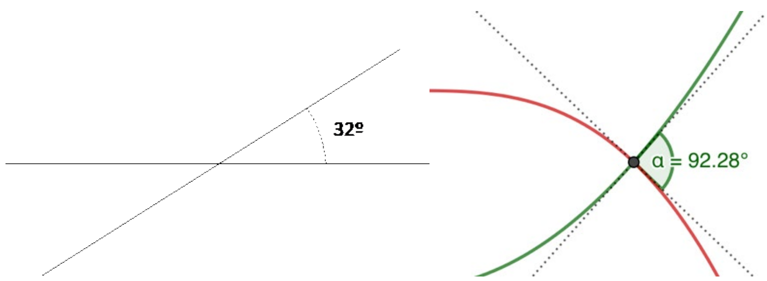
Tota creació és un seguit de pensaments. No és rar que Pinillos (1981) i Matusek (1977) s'hi referissin sota l'epígraf de pensament creatiu. L'origen etimològic del mot n'assenyala el significat: *creare*, en llatí, significa 'fer quelcom nou', quelcom inexistent abans. No és fàcil definir la creativitat, però alguns conceptes que haurien de formar part de la definició podrien ser: originalitat, flexibilitat, descoberta, invenció, intel·ligència, innovació…

Els psicòlegs han dissenyat tests de creativitat, tot i que aquests no porten associada una quantificació del grau de creació de la persona en qüestió, sinó que permeten fer-se una idea de la capacitat creativa d'un individu a partir d'una sèrie de preguntes, la majoria basades en cinc qualitats pròpies de la creativitat destacades per Matusek: fluïdesa d'idees, flexibilitat, originalitat, capacitat de noves definicions i sensibilitat pels problemes.

Fluïdesa d'idees. Les persones creatives no pensen rígidament ni paren de pensar, el flux d'idees és continu com els enllaços d'una cadena. No és estrany que el pensament matemàtic s'avingui a aquesta perspectiva, ja que cada teorema o resultat representa el punt de partida per un altre de nou, un nou problema, una nova definició. Un exemple matemàtic d'això seria la definició de l'angle format per dues corbes. És força coneguda la definició d'angle format per dues rectes: la mesura, normalment expressada en graus sexagesimals, de l'amplitud que les separa en la cruïlla (figura 1, esquerra). Si són rectes, aquesta cruïlla sempre existeix, llevat de quan siguin paral·leles. Però aleshores, l'angle que formen és de 0°.

FIGURA 1

Angle de dues rectes (esquerra) i de dues corbes (dreta)



Un primer repte creatiu és el de definir l'angle format per dos segments (fragments de rectes). El matemàtic no s'inventa quelcom absolutament nou, sinó que mira d'adaptar el concepte ja existent: l'angle format per dos segments és el format per les dues rectes que els contenen. La creació, per tant, es produeix dintre dels límits que la generalització imposa en tractar el cas dels segments com un cas particular.

Un pas més enllà és la definició de l'angle format entre dues corbes que es tallen. Què fan els matemàtics? Tampoc no s'inventen res de nou, sinó que tornen a basar-se en el concepte fonamental de tal manera que la definició sigui lògicament coherent amb la definició d'angle de dues rectes. Aleshores, es defineix l'angle de dues corbes com l'angle que formen les rectes tangents a cadascuna d'elles en el punt en què es tallen (figura 1, dreta). En lloc de rendir-se dient que les corbes no són rectes i, per tant, no se'ls pot aplicar la definició precedent, van més enllà i creen una definició filla de la prèvia. La fluïdesa d'idees és extraordinària, ja que ara podrien parlar d'angle entre dues superfícies i anar, fins i tot, més enllà pujant de dimensions.

Flexibilitat. És la capacitat per passar d'un àmbit a un altre i sense perdre's. La demostració de l'últim teorema de Fermat seria un cas extraordinari de flexibilitat, atesa l'extraordinària diversitat dels àmbits matemàtics que recorre la demostració d'Andrew Wyles, com destaca Singh (1998) en la seva crònica del procés de demostració.

Originalitat. La capacitat de generar idees sorprenents, com ara la que va tenir Gauss quan tenia només una desena d'anys per sumar els cent primers nombres naturals. Davant la tasca ingent que suposava sumar des d'1 fins a 100 a finals del segle XVIII, quan tenia deu anys, el que seria un dels més grans matemàtics de la història va escriure la suma directa i, a sota, la suma invertida. Després va sumar totes les columnes, les quals donen idèntic resultat: 101.

$$\begin{array}{rrrcrrr} 1+ & 2+ & 3 & +\cdots+ & 98+ & 99+ & 100 \\ 100+ & 99+ & 98 & +\cdots+ & 3+ & 2+ & 1 \\ 101 & 101 & 101 & +\cdots+ & 101 & 101 & 101 \end{array}$$

Veient que de columnes n'hi havia 100, la suma de la tercera fila era 101·100 = 10.100. Però aquest total representava dos cops la suma demanada. Per tant, el resultat era 10.100/2 = 5.050.

Ara podríem aplicar un recurs creatiu genuïnament matemàtic com és el de la generalització. Quina seria la suma des d'1 fins a 1.000? I des d'1 fins a qualsevol nombre natural *N*? L'adaptació del procés per sumar *1+2+3+…+N* és més senzilla del que pot semblar d'antuvi:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + \quad 2+ & 3 & +\cdots+ & N-2+ & N-1+ & N \\ N & +\, N-1\, + & N-2 & +\cdots+ & 3+ & 2+ & 1 \\ N+1 & N+1 & N+1 & +\cdots+ & N+1 & N+1 & N+1 \end{array}$$

Com en el cas concret anterior, totes les columnes sumen *N+1* i n'hi ha *N*. Per tant, el total de la tercera fila és *(N+1)·N*. Però això, com abans, és el doble de la suma demanada i el resultat n'és la meitat:

$$\frac{(N+1)\cdot N}{2}$$

Capacitat de noves definicions. Aquesta capacitat es basa en la idea kantiana que és quan som capaços de posar noms a les coses mitjançant els adjectius adequats que podem assegurar que posseïm coneixement. Si tornem a la definició de l'angle de dues corbes exposada abans (figura 1, dreta) veurem que és un cop concretada la definició que podem dir que acabem de comprendre el significat d'angle entre dues corbes. Es produeix així un fet paradoxal: la definició creada per nosaltres mateixos ens serveix per entendre millor el fet abans de crear-la.

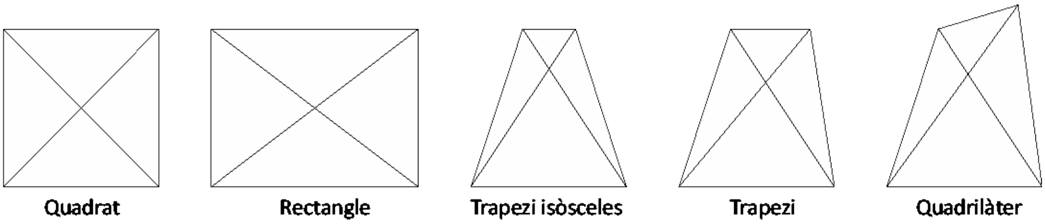
Sensibilitat pels problemes. El terme *problema* s'associa de manera natural amb l'àmbit matemàtic. És, de fet, una de les activitats matemàtiques principals. Però aquesta sensibilitat no fa referència a la resolució, sinó al plantejament, a la capacitat de generar nous problemes mitjançant noves preguntes. La qüestió ens porta de nou a la fluïdesa d'idees, ja que davant la resolució d'un problema no ens quedarem parats, sinó que representarà el trampolí per crear nous problemes o per elaborar noves solucions mirant vells problemes des d'altres perspectives.

No fou Gauss qui va plantejar el problema que va resoldre amb gran creativitat, sinó el seu professor de matemàtiques. La finalitat de la pregunta no era trobar el resultat, sinó tenir els nens de la classe entretinguts durant una bona estona amb una tasca prou feixuga. Més tard, Gauss plantejaria preguntes extraordinàries que ell mateix va respondre.

Vegem com el matemàtic pot plantejar una bona pregunta a partir d'un disseny geomètric quasi banal. La figura 2 mostra diferents quadrilàters en els quals s'han traçat les diagonals (segments que uneixen dos vèrtexs oposats). Quina pregunta matemàticament rellevant es podria formular per a cadascuna d'aquestes figures? Aquí intervé la creativitat. En aquest cas lligada o supeditada a la capacitat d'observació visual.

FIGURA 2

Alguns quadrilàters amb llurs diagonals

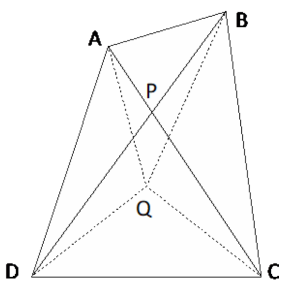


Algunes preguntes plausibles serien:

- Quin és el centre de cada figura? Sens dubte acceptaríem com a resposta el punt on es creuen les diagonals en el quadrat i el rectangle. Però això es posaria en dubte en els trapezis i en el quadrilàter, ja que en aquestes figures la cruïlla de les diagonals no respon al concepte que tenim del que és un centre, atès que el lloc on es creuen les diagonals no està ben bé enmig de la figura. Això podria incitar una modificació de la definició del centre d'un quadrilàter.
- Què té d'especial el punt on es tallen les diagonals d'un quadrilàter? En el quadrat, el punt de tall de les diagonals equidista dels costats, i també dels vèrtexs. En el rectangle, equidista dels vèrtexs, però no dels costats. En els trapezis, no passa ni una cosa ni l'altra. Una observació més creativa permet veure que el punt de tall de les diagonals verifica una propietat ben interessant. Per veure-la, diguem A, B, C i D als vèrtexs del quadrilàter i diguem O al punt de tall de les diagonals (figura 3). Aleshores, podem assegurar que O és el punt del quadrilàter des del qual la suma de distàncies als quatre vèrtexs és mínima. Això es demostra marcant un altre punt Q a la figura i observant que $QA + QB + QC + QD > PA + PB + PC + PD$ per a qualsevol Q.

FIGURA 3

La suma de les distàncies als vèrtexs des de la P és mínima



En efecte, si pensem en els triangles que formen P i Q amb els vèrtexs:

$$QA + QC > PA + PC = AC$$
$$QB + QD > PB + PD = BD$$
$$QA + QB + QC + QD > PA + PB + PC + PB = AC + BD$$

Com s'ha vist fins ara, la idea de creació està lligada a la de novetat, però amb això no n'hi ha prou. La novetat d'una creació ha de ser també productiva en el sentit que ha de representar un bé, una solució a una situació no resolta abans, una nova solució. Però, amb quin criteri es pot decidir aquesta novetat per ser considerada com a creació valuosa? Alguns psicòlegs com Newell, Shaw i Simon (1963) consideren que ha de gaudir de quatre característiques:

a) No ha de ser convencional, ha de representar una modificació o rebuig d'idees acceptades prèviament.

b) El procés que la produeix ha de ser fruit de gran motivació i persistència.

c) Ha de passar d'un plantejament poc definit a una formulació clara.

d) Ha de representar una solució especial a un problema.

Taylor (1964) estableix cinc nivells en el procés creatiu:

1) Expressiu.
2) Productiu, de caire pràctic.
3) Inventiu, establint relacions insòlites fins aleshores.
4) Innovador, en els àmbits artístic o científic.
5) Emergent, de màxima rellevància.

Si l'aspecte innovador és tan rellevant en la creativitat, ens podríem inclinar a pensar que els aspectes matemàtics exposats fins ara no ho són gaire, d'innovadors, atès que es produïren i es coneixen des de fa molt de temps. Certament, però la innovació depèn dels individus i de la cultura que rep la creació. En aquest sentit, l'àmbit educatiu determina un espai, un temps i una comunitat en la qual es poden produir innovacions, sobretot per a l'alumnat. Algunes creacions es poden reviure, algunes definicions es poden revisar i replantejar a través d'un guiatge que promogui la construcció de l'aprenentatge. Per això, l'educació hauria de desenvolupar-se en un context de llibertat. Només en un marc semblant podrem incitar un aprenentatge creatiu.

Precisament, Pinillos (1981) considera que la psicoanàlisi vincula el procés creatiu amb l'alliberament d'inhibicions que experimenta un individu mentre dorm, estat en el qual no estem sotmesos al cent per cent a les normes de la realitat. Aquesta és una perspectiva que sintonitza amb l'aspecte creatiu a matemàtiques, ja que el paper que té la realitat en l'àmbit matemàtic no és el mateix que representa en l'àmbit experimental. L'experimentació i la realitat serveixen i inspiren idees matemàtiques, però un cop aquestes han arrelat en l'abstracció no tenen per què tornar o posar-se a prova en l'àmbit real.

El pensament creatiu no és equivalent al pensament reflexiu. De fet, en la segona meitat del segle XX es posà de manifest la manca de correspondència entre un alt QI i l'originalitat. Molts científics intel·ligents no són creadors. Segons Matusek (1977), la correlació entre intel·ligència i creativitat només es pot assegurar a partir d'un QI proper a 120.

Per tant, a banda dels aspectes del procés creatiu esmentats més amunt, se n'han de tenir en compte dos de cabdals: el de llibertat i el d'establiment de noves relacions. Ambdós són inseparables, sense llibertat no es poden establir noves connexions i la prova que hom gaudeix de llibertat és precisament establint noves connexions.

Matemàtiques: una gran creació humana

Sempre hi ha hagut debat al voltant de si les matemàtiques representen una creació humana o són descobertes. La filosofia que sustenta que les matemàtiques són descobertes rau en el platonisme. Des d'aquest punt de vista, totes les idees matemàtiques habiten un món ideal del qual la realitat tangible en representa aproximacions imprecises. Mai no construirem un cercle perfecte perquè aquest és un ideal. Totes les definicions de cercle no fan sinó atansar-se a aquest objecte i concepte inabastables. A banda d'aquesta perspectiva, s'ha de reconèixer que els resultats matemàtics són tan independents de la ment o ments que els demostren que diríem que ja estaven ocults en algun lloc a l'espera de ser trobats (Penrose, 2011). Els teoremes de Tales i de Pitàgores, l'estratègia de Gauss per sumar nombres consecutius i que el punt on es tallen les diagonals d'un quadrilàter sigui aquell en què la suma de distàncies als vèrtexs és mínima, tot això, ja era veritable abans que algú ho veiés i ho demostrés. Era veritable i ho serà sempre. No depèn dels autors. És com si els autors actuessin com agents que busquen i troben una meravella en un racó del camí, darrere d'un matoll de la selva o al fons d'una cova obscura. Això invita a pensar que les matemàtiques són descobertes i no creades.

L'altra perspectiva és que la independència de l'autor és més aparent del que els resultats fan pensar i no tan profunda. El món sensible és el que inspira la geometria, les seves formes i els seus problemes. La història de les matemàtiques és prova d'això (Boyer, 1986). Polya (1988) vincula el quefer matemàtic amb el científic destacant que de portes endins, les matemàtiques es produeixen en una mena de cuina on hi ha errades, revisions, propostes fallides i discussions que acaben, sí, amb un resultat. Però el producte final es fa públic net i polit, sense màcula, com si d'una obra d'art es tractés. Res d'això és tan ideal com defensa el platonisme. Potser sí que el cercle platònic sigui un ideal, però fou inspirat pel món i els sentits mitjançant els quals percebem les coses. La definició de cercle és una invenció humana arrelada en la forma del Sol, la Lluna, una taronja o una bombolla. Fins i tot podem donar la volta a l'argument platònic dient que és el cercle perfecte el que és, de fet, una taronja, un Sol o una bombolla imperfectes. Vist així, la definició de cercle és només allà on podem arribar: una definició simplificada d'objectes reals i tangibles força més complexos.

Aquí es defensa la idea que les matemàtiques són creació humana i un producte cultural (Ernest, 1998) que es desenvolupa mitjançant proves i refutacions (Lakatos, 1994). Els axiomes de les matemàtiques no són el principi, sinó el final d'un procés creatiu en el qual intervenen diverses estratègies i habilitats de pensament pròpies de la creativitat (Courant i Robbins, 1996): intuïció, analogia, reflexió, experimentació, conjectures, contraexemples, refutacions, definicions, demostracions...

El paradigma de la creació científica i matemàtica

Henri Poincaré fou un dels més importants matemàtics del segle XX. La seva crònica de com se li acudí la idea per donar resposta a una qüestió matemàtica representa una experiència característica de la creació matemàtica. Poincaré treballava amb les funcions fuchsianes, però havia arribat a un punt mort, no podia avançar. Un dia es va apuntar a una excursió geològica. En el decurs del viatge s'oblidà del seu quefer matemàtic. Just en el moment en què l'home pujava a un autobús li vingué la idea que les transformacions que havia emprat per definir les funcions fuchsianes eren les mateixes que les de la geometria no euclidiana. En tornar a casa va formalitzar el resultat.

Que les matemàtiques es basen en idees brillants trobades de forma espontània ha estat una idea compartida de forma general. L'experiència de Poincaré pot fer pensar que és així. Però aquest breu relat no esmenta la part més important. La idea no li vingué a Poincaré de cop i volta sense cap altre input, sinó que, com ell va reconèixer també, es produí després de dedicar-hi molt de temps i de fer grans esforços de forma continuada. Des d'un punt de vista psicològic, quan la ment es relaxa deixa vies perquè es produeixin connexions inconscients que la reiteració del pensament impedeix obrir. Per tant, la seqüència dels fets podria ser aquesta: pensament intens sobre una qüestió (reflexió), pensament lleuger en qüestions ben diferents (canvi de context) i espurna de pensament aparentment sobtat (creació).

Altres matemàtics com Hadamard (1954) també han reflexionat sobre la creació matemàtica. Afegeixen un aspecte no esmentat fins ara com és el de pensar en diverses qüestions o problemes al mateix temps. Segurament així es fomenten connexions inconscients, i imprevistes d'entrada, durant períodes de repòs mental (sense que això signifiqui deixar de pensar, sinó pensar en altres temes).

El cas de Poincaré porta associat l'esperit de científic capficat en els seus pensaments que treballa sol i en coses que la resta de persones de l'entorn no comprenen, llevat dels seus col·legues. La filosofia d'aprenentatge de Piaget (1970) s'avé al paradigma del científic isolat, tancat en un despatx, allunyat de la societat i de la realitat que l'envolta. Més encara en l'àmbit matemàtic en què el treball és purament abstracte i no necessita tant el món físic. D'una figura així deriva la imatge paradigmàtica del científic boig extraordinàriament intel·ligent i amb els cabells i el despatx desendreçats amb què sovint es representava el gran Albert Einstein i a la qual també han contribuït els mitjans de comunicació.

Vygotsky (1978) canvia la perspectiva perquè socialitza els científics i l'aprenentatge. Per a Vygotsky, el científic necessita els altres. El coneixement, a més de cultural, és un producte social. Els altres representen un paper en què jo aprenc. Des d'aquesta perspectiva té sentit plantejar-se la possibilitat d'aprendre a ser creatiu. Un plantejament en el qual hi haurien d'intervenir els altres. Més avall veurem quin paper poden tenir les altres persones en el desenvolupament de la pròpia creativitat: el diàleg filosòfic.

La creació matemàtica

El mètode heurístic

L'educació per competències s'atansa a l'enfocament heurístic promogut per alguns matemàtics i educadors a mitjans del segle XX. Un dels més destacats fou George Polya, qui va caracteritzar i formalitzar una metodologia quasi universal de resolució de problemes matemàtics. Poc li manca a la caracterització de Polya (1988) per esdevenir una metodologia de la creativitat matemàtica, ja que estructura la resolució d'un problema matemàtic en quatre fases:

a) Comprendre el problema.

b) Dissenyar un pla.

c) Portar a terme el pla.

d) Analitzar la solució.

Cadascuna d'aquestes fases s'estructura més profundament en parts auxiliars que aquí es presenten de forma resumida:

a) Què és el que és desconegut? Quines són les dades? Quina és la condició? És possible satisfer-la? Amb aquesta condició, n'hi ha prou per determinar el que és desconegut? Fes un dibuix.

b) Troba la relació entre les dades i el que és desconegut. T'has trobat o coneixes un problema semblant a aquest? Podries usar aquella resolució aquí? Coneixes cap teorema que et pugui ser útil? Podries replantejar el problema amb les teves pròpies paraules?

c) En portar a terme l'estratègia, revisa cada pas. Pots esbrinar si els passos són correctes o no?

d) La solució, és coherent amb l'enunciat? Pots obtenir-la d'una altra manera? Pots utilitzar el resultat o el mètode seguit en algun altre problema?

Moltes d'aquestes preguntes s'adrecen a aspectes creatius, ja que inviten a establir relacions (entre les dades i el que és desconegut), a crear models matemàtics (dibuixos), a transferir metodologies o modificar-les (canvi de context) i a crear nous problemes (noves preguntes). A continuació es mostra un episodi d'aula produït en una classe de matemàtiques de 1r d'ESO. La qüestió consistia a resoldre el problema següent.

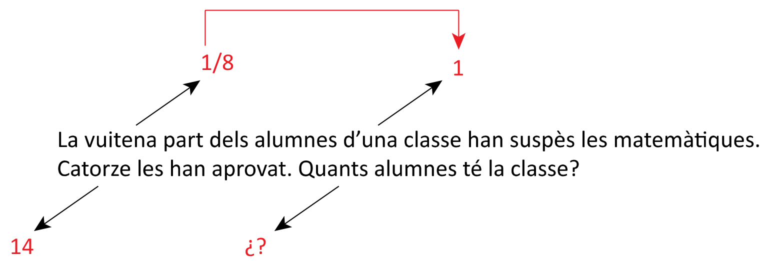
Problema. La vuitena part dels alumnes d'una classe han suspès les matemàtiques. Catorze les han aprovat. Quants alumnes té la classe?

Hom espera que la majoria d'alumnes de 1r d'ESO no tingui dificultats per resoldre un problema com aquest. Menys encara si es planteja després d'haver treballat l'estadística per determinar parts de totalitats i expressar-les com a fracció, percentatge, nombre decimal i gràfics diversos. En canvi, només el 2 % resolgueren el problema basant-se en una figura, i més del 40 % confessaren no saber per on agafar-lo.

L'anàlisi dels motius de tantes dificultats va posar de manifest que s'entenia el llenguatge en què estava redactat l'enunciat. També s'entenien tots els mots que el componien. També es van saber identificar les dades i expressar-les matemàticament: 1/8 de l'alumnat i 14 aprovats (figura 4). El que fallava era la relació entre les dades i el que era desconegut. Les dues persones que feren una representació visual de la situació resolgueren el problema de seguida, però la majoria de la resta no sabia com començar perquè no trobaren un lligam entre les dades i el que era desconegut. Tal com assenyala Polya, aquesta és una de les claus principals per a la resolució de problemes i, naturalment, de la creativitat matemàtica.

FIGURA 4

Dades del problema i les seves expressions matemàtiques



Una primera observació ens porta a mirar els nombres que intervenen a l'enunciat: 1/8 i 14. De fet, 1/8 no és només un nombre, és una fracció, una relació entre dos nombres. La xifra 1 d'1/8 té un significat ben diferent de la xifra 1 del nombre 14. L'1 d'1/8 representa la totalitat de l'alumnat de la classe; la xifra 1 del nombre 14, representa una desena dels alumnes.

La segona observació és la definitiva i és una dada no numèrica present a l'enunciat: suspesos i aprovats. La relació entre aquests dos conceptes determina la resolució, ja que el nombre d'aprovats i de suspesos estan lligats: quan un augmenta, l'altre disminueix en la mateixa mesura. Aprovats i suspesos són complementaris i parteixen la classe en dues meitats (figura 5).

Figura 5

Relació essencial per resoldre el problema

La vuitena part dels alumnes d'una classe han suspès les matemàtiques.
Catorze les han aprovat. Quants alumnes té la classe?

aprovats + suspesos = total d'alumnes

Organitzant les dades en una taula, les relacions es fan clares:

	Suspesos	Aprovats	Total
Part	1/8		1
Quantitat		14	¿?

Només veure aquesta taula molts s'adonaren que la part d'aprovats havia de ser 7/8, el que li mancava a 1/8 per a completar els 8/8, és a dir, el tot menys la part: $1 - 1/8 = 7/8$. Donat que aquests 7/8 equivalen a 14 alumnes, no va ser difícil que alguns més pensessin que la correspondència era de 2 alumnes per octau ($14 : 7 = 2$) i que la classe tenia 16 alumnes ($14 + 2$).

Els que resolgueren el problema amb una figura representaren la classe amb un rectangle dividit en vuit parts. Una de les parts era el vuitè que havia suspès. Si la resta eren 14, estava clar que en cadascuna de les 7 caselles restants s'hi havia de posar 2 alumnes (figura 6). El total eren $2 \cdot 8 = 16$ alumnes.

FIGURA 6

Representació visual d'un octau (esquerra) i dels 14 aprovats distribuïts en set octaus (dreta)

FIGURA 7

El garbell d'Eratòstenes destria els nombres primers fins a 100

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Aquest problema posa de manifest l'aspecte cabdal de la creativitat, és a dir, l'aspecte que determina poder crear o no idees o estratègies de resolució: la capacitat de veure o adonar-se de la relació entre les dades. El canvi de representació, com s'ha vist en aquest senzill problema, també pot produir resultats extraordinaris. El garbell d'Eratòstenes per fer emergir els nombres primers menors que 100 és una estratègia força coneguda. Eratòstenes disposa els nombres naturals de l'1 al 100 en un quadrat de 10×10 caselles i va eliminant els múltiples de 2, els múltiples de 3, els múltiples de 5… i així successivament fins que només queden els nombres primers (figura 7).

Aplicant la competència bàsica núm. 9 de l'àmbit matemàtic podem emprar el canvi de representació com a estratègia del quefer matemàtic. Distribuint els nombres naturals en una taula de sis files en lloc de deu (figura 8) es pot treure una conclusió més rellevant que la il·lustrada pel garbell d'Eratòstenes:

FIGURA 8

Un senzill canvi de representació il·lumina un resultat matemàtic

1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97	103	109	115	121	127
2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98	104	110	116	122	128
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99	105	111	117	123	129
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	124	130
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	107	113	119	125	131
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132

La conclusió és clara: a partir del 3, tots els nombres primers es troben en la primera o en la cinquena fila. Tenint en compte que la sisena fila conté tots els múltiples de 6, podem enunciar un petit teorema: a partir de 3, tots els nombres primers són veïns d'un múltiple de 6.

Aquesta creació permet anar encara més enllà i dissenyar un algorisme que produeixi nombres probablement primers:

- Pensa un nombre (per exemple, 2019).
- Multiplica'l per 6 (2019 · 6 = 12.114).
- Probablement, l'anterior o el següent d'aquest siguin primers (el següent, 12.115 no ho és, ja que acaba en 5; però l'anterior, 12.113, sí que ho és).

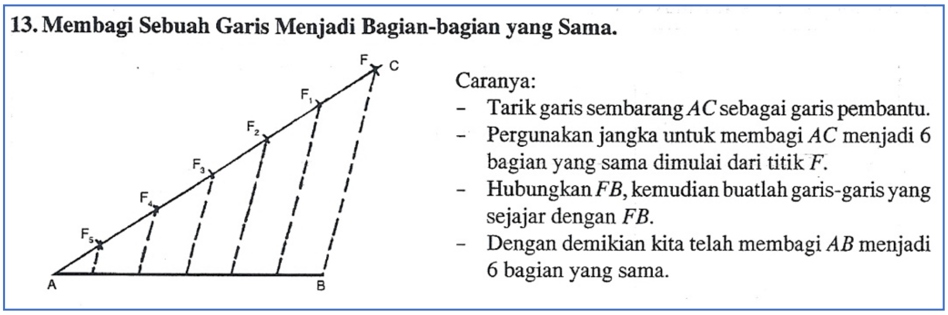
La pràctica situada

El paper que té la pràctica en l'aprenentatge matemàtic fou destacat per Lave (1988). La seva rellevància rau en el fet que la praxi incita a pensar diferent. Un exemple extraordinari de solució pràctica matemàtica i no gens formalitzada el trobem en la resolució no euclidiana que els artesans toradja de Sulawesi, a Indonèsia, donen a un problema matemàtic tradicional i que s'ensenya a resoldre segons la proposició núm. 9 del llibre VI dels *Elements* d'Euclides (1994) a les escoles i instituts d'arreu.

Estem parlant del problema que consisteix a dividir un segment en un nombre determinat de parts iguals. En el mètode euclidià es traça un segment auxiliar a l'original des d'un dels vèrtexs d'aquest. Damunt d'aquest segment auxiliar es fan tantes marques equidistants (amb compàs o regle) com parts en què es vol dividir el segment original. Després, s'uneix l'extrem lliure del segment auxiliar amb l'extrem lliure del segment original i es tracen, des de cadascuna de les marques equidistants, paral·leles a la línia. Així, el segment queda dividit (figura 9).

FIGURA 9

Divisió euclidiana d'un segment en sis parts iguals segons Hararap i Negoro (1998)



13. Membagi Sebuah Garis Menjadi Bagian-bagian yang Sama.

Caranya:
- Tarik garis sembarang AC sebagai garis pembantu.
- Pergunakan jangka untuk membagi AC menjadi 6 bagian yang sama dimulai dari titik F.
- Hubungkan FB, kemudian buatlah garis-garis yang sejajar dengan FB.
- Dengan demikian kita telah membagi AB menjadi 6 bagian yang sama.

FONT: Hararap i Negoro (1998).

La immensa majoria dels artesans toradja no han anat a l'escola. I aquells que hi han anat, no acostumen a aplicar cap mètode euclidià après a l'escola, sinó els mètodes tradicionals extraacadèmics que han après dels seus avantpassats i dels seus col·legues artesans. Es pot dir que formen una comunitat de pràctica (Wenger, 1999), atès que comparteixen un mateix llenguatge laboral, tècniques i mètodes de treball, eines i objectius.

La seva tasca consisteix a fer gravats en plafons de fusta rectangulars. Moltes formes que tallen amb la gúbia són geomètriques. La part més geomètrica de la tasca és traçar una retícula de fons en cada plafó que serveix de bastida al disseny. En els espais d'aquesta retícula i en les seves interseccions se situaran els punts principals de les formes que hi faran. Precisament, a l'hora de construir aquesta retícula els artesans s'enfronten al problema de dividir els costats del plafó en un nombre determinat de parts iguals. La figura 10 il·lustra el seu mètode per dividir un segment en tres parts iguals:

a) Es fa una primera estimació visual del terç del segment.

b) Aquesta estimació es marca en un llistó de bambú.

c) S'aplica aquesta estimació tres vegades successives al segment.

d) Si no hi ha error, la tasca ha finalitzat; si hi ha error, aquest és per excés o per defecte.

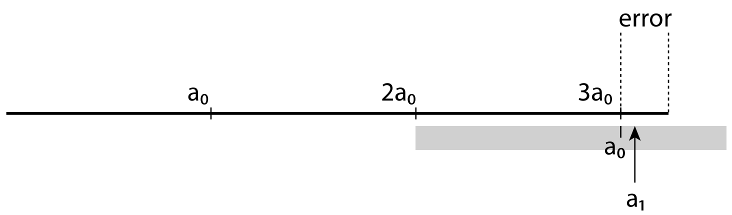
e) L'error per excés es corregeix restant un terç (visualment) de l'excés a la primera estimació; si l'error és per defecte, es corregeix afegint un terç (visual) del defecte a la primera estimació.

f) Tornem al punt *c*).

g) I així successivament fins que l'error desapareix o és tan petit que esdevé invisible.

FIGURA 10

Divisió no euclidiana d'un segment en tres parts iguals: la primera estimació del terç (a_0)



Hom pensaria que aquest procés pot trigar una bona estona. Ans al contrari, mai es necessiten més de tres iteracions per resoldre la qüestió. El mètode no és euclidià perquè s'atansa cap a la solució mitjançant aproximacions successives. Albertí (2007) demostra que la convergència és de tipus exponencial, prou ràpida, per tant. Si es té en compte l'experiència dels artesans, s'entendrà que la seva efectivitat sigui lloable.

Aquest mètode no l'aprenen els artesans a l'escola. De fet, no s'ensenya formalment. L'aprenen dels artesans més experts. Fou desenvolupat per a treballar en unes condicions específiques i que no es troben a l'àmbit acadèmic. Els plafons de fusta que treballen són verticals, formen part de les façanes de les cases tradicionals toradja. En algunes ocasions, han de treballar en les parts inferiors de plafons inclinats. Es tracta d'un context en el qual el mètode euclidià i acadèmic resultaria impossible d'aplicar.

Un cop formalitzat acadèmicament, es posa de manifest que el mètode toradja no representa altra cosa que una divisió, però alliberada de les limitacions que caracteritzen les divisions numèriques de l'escola primària occidental (Albertí, 2007). La figura 11 mostra que es podria fer una divisió numèrica seguint el procediment geomètric dels artesans toradja.

FIGURA 11

Adaptació de la divisió no euclidiana d'un segment a la divisió numèrica

$$
\begin{array}{r|l}
20 & 3 \\ \cline{2-2}
-24 & 8-1-0{,}3 \\ \cline{1-1}
-4 & \\
+3 & 20/3 \approx 8-1-0{,}3 = 6{,}7 \\ \cline{1-1}
-1 & \\
+0{,}9 & \\ \cline{1-1}
-0{,}1 &
\end{array}
$$

Un cop finalitzada la recerca, vaig tenir l'oportunitat de veure que els artesans també s'enfrontaven al problema de dividir una circumferència en parts iguals, ja que alguns dissenys incorporaven pentagrames. Després d'observar que no se n'acabaven de sortir, el repte creatiu del matemàtic occidental fou adaptar la solució toradja de la divisió d'un segment a la divisió d'arcs circulars (Albertí, 2010). La perspectiva acadèmica ajudà en la tasca, però hauria resultat impossible sense el vessant pràctic. Tot plegat posà de manifest el paper que té la praxi *in situ* en la comprensió del que feien i pensaven els artesans i la creativitat matemàtica per adaptar mètodes aliens a la pròpia cultura.

El diàleg filosòfic

S'ha esmentat la funció dels altres en la creativitat matemàtica, però no ha estat concretat. En l'àmbit matemàtic el paper que desenvolupen els altres esdevé fonamental, ja que el fet de compartir idees i solucions matemàtiques inspira la creativitat. De fet, quan algú té una bona idea acostuma a sentir la necessitat d'explicar-la, de comunicar-la, de compartir-la. Aleshores, es produeix un diàleg de caràcter filosòfic l'objectiu del qual és la cerca de la veritat, la revisió dels raonaments i la posada a prova de les idees i solucions manifestades. Això vol dir escoltar, reflexionar, raonar i arribar a conclusions, aspectes que no tenen perquè produir-se en una conversa, tertúlia o un debat. Tenint en compte això resulta fàcil imaginar com d'inspirador per a la creativitat pot resultar un diàleg filosòfic.

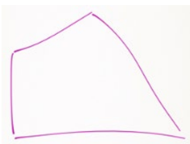
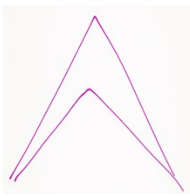
De fet, les matemàtiques s'han desenvolupat i els seus resultats han estat validats arran de diàlegs filosòfics. Malgrat tot, els diàlegs no s'han produït ni en el mateix espai ni en el mateix temps. L'entrebanc ha estat sempre la dificultat de comunicació. Cèlebres són els diàlegs de Plató (1960) en el decurs dels quals s'estableixen idees matemàtiques primàries i principals a les quals s'arriba posant els pensaments damunt d'una taula virtual, a la vista i crítica de tothom. Cèlebre és el diàleg a tres bandes mitjançant el qual Galileu (1994) va enfrontar els dos sistemes de concepció del món vigents a finals del segle XV: el ptolemaic i el copernicà. No menys rellevants són els diàlegs que Lakatos (1994) enceta entre l'alumnat d'una aula imaginària per a posar a prova les concepcions i demostracions de les propietats topològiques dels poliedres.

Si Newton i Leibniz, en lloc de lluitar per tal d'esbrinar qui fou el primer de crear el càlcul diferencial, haguessin dialogat per a refinar i compartir les seves idees, no hauria estat tan necessari que els seus successors, Lagrange, Cauchy i altres, encetessin un diàleg sobre el càlcul posterior als dos grans protagonistes. El mateix se'n pot dir de les disputes entre Descartes i Fermat sobre la resolució del problema de la tangent a una corba. Al segles XVI i XVII les comunicacions eren, sobretot, epistolars, la qual cosa demorava l'escolta i la resposta. Avui dia no hi ha excusa per a no encetar diàlegs filosòfics.

Alguns exemples contemporanis i ben recents de com el diàleg incita la creativitat es troben en el diàleg filosòfic mitjançant el qual l'alumnat d'un grup de 1r curs d'ESO arriben a concretar la idea de cercle (Albertí, 2016) i en el següent diàleg desenvolupat també en una classe de matemàtiques d'aquest mateix nivell educatiu (taula 1) (Albertí i Hernández, 2018).

TAULA 1

Diàleg filosòfic sobre la definició de rectangle

Professor	***Alumnat***
—Què és un rectangle?	—Una figura de quatre costats.
El professor dibuixa aquesta figura a la pissarra: 	Ningú no la considera rectangle. —De quatre costats, però dos d'iguals i els altres dos també iguals, però diferents.
—Algú podria dibuixar una figura així que no sigui rectangle?	Una alumna surt a la pissarra i dibuixa: 

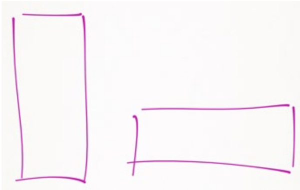
Ningú no la considera rectangle.

—El costat major ha d’estar horitzontal.

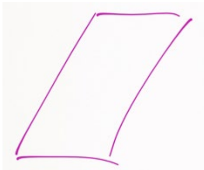
—No importa, el rectangle serà el mateix.

—Una figura com abans, però amb els costats paral·lels.

El professor dibuixa:



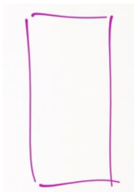
Un alumne surt a la pissarra i dibuixa:



Ningú no la considera rectangle.

—El mateix, però amb els quatre angles rectes.

Un altre alumne dibuixa:



En el decurs del diàleg filosòfic es posen en solfa habilitats de pensament (Lipman, 2016). En aquest cas les més utilitzades són el contraexemple i la definició.

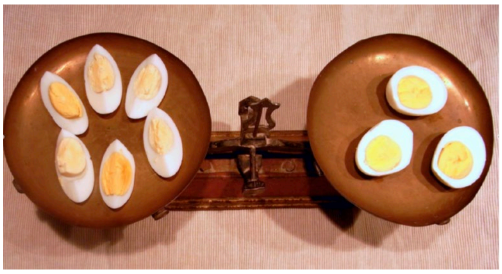
Mirar i veure… matemàtiques

La relació de l’àmbit matemàtic amb la realitat de l’entorn en què vivim, natural, social… és un indici de creativitat en ambdós sentits. D’una banda, en l’aplicació del saber matemàtic. De l’altra, en la inspiració que per fer matemàtiques podem trobar en la realitat. En el primer sentit, hom observa la realitat buscant-hi símbols, conceptes, objectes, figures, relacions matemàtiques. En l’altre, hom crea idees, conceptes, relacions i problemes matemàtics inspirant-se en la realitat.

Fer una fotografia matemàtica és un procés creatiu. Les bones fotografies matemàtiques fan veure aspectes matemàtics del nostre voltant que a la majoria de la gent passen desapercebuts. Un exemple d'això és la foto reproduïda a la figura 12. Qui no ha vist ous bullits tallats en meitats o quarts? El que il·lustra la foto és l'equivalència de les fraccions d'ous bullits. La balança fa de jutge i n'estableix l'equivalència del pes, del volum, de les fraccions numèriques. Al plat esquerre, hi ha sis quarts d'ou; al plat de la dreta, n'hi ha tres meitats. La balança fa evident l'equivalència d'ambdues fraccions numèriques: 6/4 = 3/2.

FIGURA 12

Fraccions equivalents



FONT: Ona Aguilera, 3r premi de 1r cicle d'ESO al Concurs de Fotografia Matemàtica de l'ABEAM, 2013.

L'entorn és ric. La figura 13 mostra una arqueta enmig de l'asfalt que els operaris deixaren mal posada, ja que la pintura blanca del metall va quedar lluny de la línia guixada a l'asfalt. Però l'error és productiu si som capaços de veure que gràcies a l'errada podem assegurar que l'arqueta metàl·lica és quadrada. Si no ho fos, si fos rectangular, no hauria encaixat en el forat i l'errada hauria estat impossible. El matemàtic creatiu treu un teorema d'aquest gir de 90° a l'esquerra. Sense moure's del lloc, pot assegurar que l'arqueta és quadrada i no rectangular.

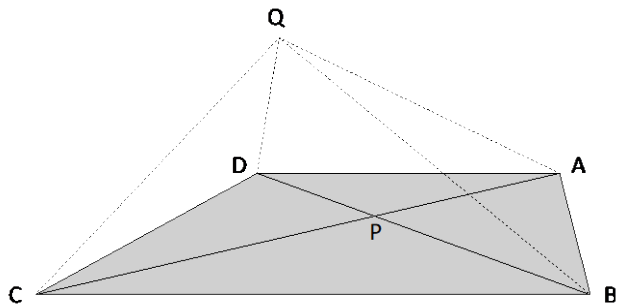
FIGURA 13

L'arqueta quadrada fa possible l'errada

El de la mirada creativa és un enfocament cabdal en matemàtiques. Molts problemes geomètrics es resolen veient o dibuixant línies no traçades en l'enunciat. Si ens mirem la figura 3 des d'una altra perspectiva, la veurem com si d'una representació plana d'un poliedre tridimensional es tractés: una piràmide de base el quadrilàter ABCD enmig del qual es troba P, el punt de tall d'ambdues diagonals. Veient així les coses (figura 14) resulta evident que la suma de les longituds de les arestes que connecten Q als vèrtexs de la base és menor que la suma dels segments que les connecten a P.

FIGURA 14

Una altra mirada a la figura 3



També es posa de manifest la creativitat matemàtica quan veiem relacions que inspiren noves preguntes. Per exemple, en mirar el mostrador d'una sabateria ens podem preguntar si la relació que hi ha entre les talles d'unes sabates de taló alt ha de ser la mateixa que la que hi ha entre les altures dels talons. La figura 15 mostra dues sabates de talles 40 i 37, però tenen la mateixa altura de taló. Això fa que, atesa la inclinació més gran que ha d'adoptar el peu, el parell de la talla 37 resulti força més incòmode que el de la talla 40.

FIGURA 15

Elegància incòmoda: sabates de les talles 40 (esquerra) i 37 (dreta), però amb la mateixa altura de taló

Matemàtiques inspirades extramurs: viatge a les ciutats invisibles d'Italo Calvino (2012)

Que les matemàtiques s'han utilitzat en àmbits llunyans del científic no representa cap novetat. Al *Quixot* de Cervantes trobem alguns problemes i paradoxes matemàtiques; *El Llibre del Tao* de Lao Tse conté una sèrie d'expressions que sintonitzen amb conceptes matemàtics, i Paul Klee, Vassili Kandinski i Pablo Picasso utilitzen formes geomètriques i perspectives espacials simultànies però diferents per representar les seves abstraccions. Moltes composicions musicals de la primera meitat del segle XX prengueren idees matemàtiques com a recurs per a la composició (Schönberg, Berg, Webern, Stockhausen). Alguns temes musicals populars permeten escoltar melodies simètriques, com ara la popular *Singing in the rain* d'Arthur Freed. També alguns escriptors més moderns com Italo Calvino i Umberto Eco fan ús d'idees matemàtiques en les seves obres.

Però ara ens interessa més la perspectiva oposada. És a dir, la de la creació matemàtica arrelada en altres àmbits. Albertí (2006) s'ha inspirat en la lectura de *Les ciutats invisibles* d'Italo Calvino per a crear algunes relacions i problemes matemàtics. L'autor italocubà fa servir mots geomètrics i numèrics per a descriure les ciutats que un imaginari Marco Polo descriu a un imaginari Khublai Kan. A continuació es presenten tres problemes matemàtics, cadascun d'ells inspirat per una ciutat "invisible".

La ciutat de Dorotea inspira un problema topològic en el qual no importen les distàncies ni les àrees, sinó la forma ((taula 2).

TAULA 2

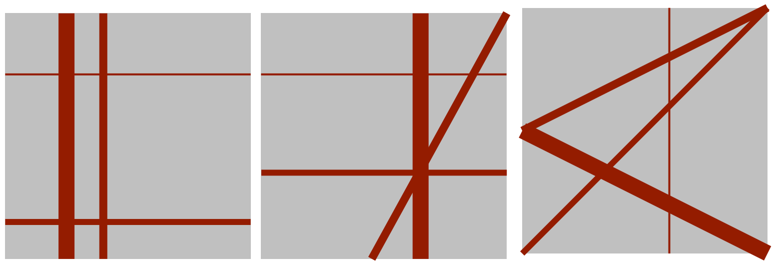
Problema matemàtic inspirat per la ciutat de Dorotea

Ciutat	*Text*	*Problema matemàtic*	*Raonament i solució analítica*
Dorotea	...el fossat les aigües del qual alimenten quatre verds canals que travessen la ciutat i la divideixen en nou barris...	¿Quin és el nombre màxim de recintes amb els quals queda dividit un quadrat travessat per *n* rectes?	El màxim nombre de recintes o barris *B(n)* es crea si cada canal nou talla tots els anteriors: $B(n) = B(n-1) + n = 1 + \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n+2}{2}$

La comprensió d'aquest problema passa, d'una banda, per adonar-se de què amb la mateixa quantitat de rectes es poden crear diferents quantitats de recintes (figura 16).

FIGURA 16

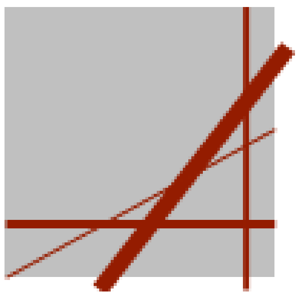
Formes vàries en què quatre canals poden seccionar Dorotea en nou barris



D'una altra banda, el nombre màxim de recintes s'obté quan cada recta talla totes les altres. Això s'aconsegueix traçant-ne una i fent que cadascuna de les següents talli totes les precedents (figura 17).

FIGURA 17

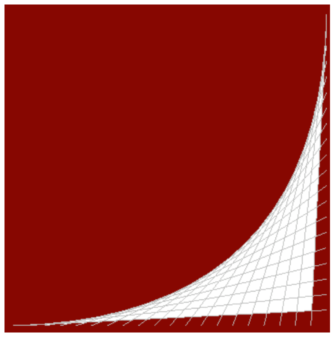
Quatre canals poden crear fins a onze barris



Augmentant el nombre de rectes el problema adopta un caràcter general. Aleshores, dels perfils dels recintes creats per les rectes apareix la idea d'una corba hiperbòlica (figura 18).

FIGURA 18

L'envolupant dels barris B(n) que el creixent nombre de canals va creant a Dorotea és la hipèrbola $x^2+y^2+2xy-4y=0$



La ciutat de Cloe inspira un problema clàssic de combinatòria (taula 3).

TAULA 3

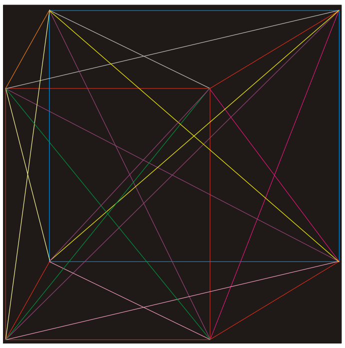
Problema matemàtic inspirat per la ciutat de Cloe

Ciutat	*Text*	*Problema matemàtic*	*Raonament i solució analítica*
Cloe	Quelcom corre entre ells, un intercanvi de mirades com línies que connecten una figura amb una altra i dibuixen fletxes, estrelles, triangles, fins que en un instant totes les combinacions s'esgoten…	¿Quants segments es poden traçar entre *n* punts de l'espai?	Des de cadascun dels *n* punts es poden dirigir n–1 segments als restants, però en el total *S(n)* s'han comptat dos cops: $S(n) = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$

La figura 19 il·lustra el fragment del text de Calvino, però el problema matemàtic plantejat té caràcter general: el nombre de punts és arbitrari.

FIGURA 19

Una versió de Cloe: els 8 · 7/2 = 28 segments que es poden establir entre 8 punts de l'espai



La ciutat d'Olinda inspira un problema sobre el cercle (taula 4).

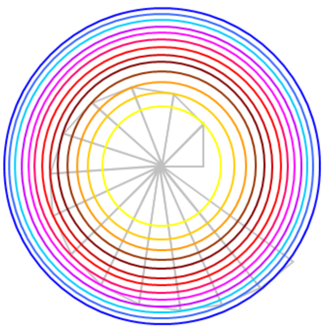
TAULA 4

Problema matemàtic inspirat per la ciutat de Dorotea

Ciutat	*Text*	*Problema matemàtic*	*Raonament i solució*
Olinda	Olinda no és l'única ciutat que creix en cercles concèntrics, com els troncs dels arbres que cada any augmenten un anell… les velles murades es dilaten emportant-se amb elles els barris antics que creixen… mantenint llurs proporcions en un perímetre major; aquests envolten barris un xic menys vells, tot i que de major perímetre i menor espessor per deixar lloc als més recents que empenyen des de dins…	¿Quina relació hi ha entre els radis de cercles concèntrics les corones entre els quals conserven l'àrea?	Les àrees de dues corones circulars consecutives seran iguals si el quadrat del radi d'una corona és la mitjana aritmètica dels quadrats dels radis de les seves dues corones veïnes: $r_n^2 = \frac{r_{n+1}^2 + r_{n-1}^2}{2}$

FIGURA 20

Un model per als barris concèntrics d'Olinda que van conservant l'àrea amb radis que són les arrels quadrades dels nombres naturals



Referents per a la creació matemàtica

Des d'una perspectiva àmplia, els aspectes generals que caracteritzen la creativitat matemàtica són els d'àmbit psicològic compartits per tot procés creatiu: fluïdesa d'idees, flexibilitat, originalitat i sensibilitat pels problemes. Aquests representen el marc des del qual s'encetà aquest treball. Des d'una perspectiva específica, i analitzant de prop la manera en què s'incita la creativitat, hem vist els aspectes que en la creació matemàtica tenen un paper ben destacat: l'heurística, el canvi de representació, la mirada matemàtica, la pràctica situada i el diàleg filosòfic.

L'heurística serveix d'orientació per trobar la manera d'enfocar matemàticament una situació per a convertir-la en un problema matemàtic o buscar una solució d'un problema. El canvi de representació és, en si mateix, una creació. Més rellevant és com més productiva resulta. La mirada matemàtica representa un canvi de perspectiva de la mirada corrent, ja que suposa adreçar els pensaments que hom té quan veu o mira fenòmens no gaire corrents per la majoria de les persones. En la pràctica situada es posen de manifest habilitats de pensament que en un àmbit teòric podrien passar desapercebudes. El diàleg filosòfic concreta el paper que poden desenvolupar els altres en el desenvolupament de processos creatius. Amb tot plegat, podem afirmar que es pot aprendre a ser matemàticament creatiu, almenys en un nivell bàsic propi de l'educació secundària obligatòria. L'educació constructivista per competències pot facilitar el fet d'aprendre a ser matemàticament creatiu.

Més enllà d'això val la pena observar que el recurs cabdal de la creació és l'establiment de noves relacions. Els més grans resultats matemàtics (definicions, conceptes i teoremes) s'han obtingut mitjançant relacions que fins aleshores haurien resultat insòlites. En un nivell prou elemental, això és el que una fotografia matemàtica assenyala: una relació entre un objecte o fet quotidià del nostre entorn i un fet matemàtic. Així aprenem a mirar matemàticament i ens fem conscients d'haver après matemàtiques. Per aprendre a ser creatiu matemàticament ens poden servir com a referents:

1) *Modelització matemàtica*. Aquest és un pas fonamental de tota creació matemàtica. La majoria d'idees matemàtiques són de tipus visual. La modelització matemàtica es la primer procés creatiu i consisteix en relacionar un fenomen de qualsevol mena

amb les matemàtiques. Això s'ha fet aquí amb fenòmens tan diversos com unes sabates de taló alt, una arqueta o alguns textos literaris d'Ítalo Calvino.

2) *Canvi de representació*. El simple fet d'expressar una idea ja és un procés creatiu. I no resulta gens fàcil, sovint és més difícil del que sembla. Una expressió diferent del garbell d'Eratòstenes ens ha permès comprendre més a fons la natura dels nombres primers. Un cop fet el canvi, sembla molt senzill. Però no ho era gens abans de dur-lo a terme.

3) *Plantejament de bones preguntes*. En observar un fenomen o un objecte, hi ha una pregunta directa que ens adreça de seguida a l'àmbit matemàtic: quant? En la quantificació rauen la majoria dels processos matemàtics. Després d'aquesta, la segona pregunta a fer-se possiblement sigui: què es conserva mentre la resta canvia? S'entén aquí que el canvi fa referència a la quantificació.

4) *Generalització*. Passar d'un cas particular o interpretar un fenomen com a cas particular d'un de més general és corrent dins de l'àmbit matemàtic. Aquesta és l'estratègia que incita el desenvolupament de teoremes.

5) *Habilitats de pensament*. Fer-les servir essent-ne conscient ens farà aprendre a aprendre i a crear: organitzar la informació en una llista o taula de dades, caracteritzar, definir, elaborar contraexemples, fer conjectures, fer proves…

6) *Acceptar la part creativa de la lògica*. Hom podria pensar que aquest és un acte d'obediència. Però fa falta ser creatiu per acceptar alguns resultats als quals ens condueixen els axiomes matemàtics i les aplicacions de la lògica. Per exemple, acceptar que $2^0 = 1$ o que el conjunt que no consta de cap element és també un conjunt, són creacions matemàtiques imposades per la lògica.

7) *Mirada matemàtica*. En mirar, procurar veure coses que no són davant dels ulls: imaginar línies addicionals a través de les quals establir relacions.

8) *Pràctica situada*. Està relacionada amb el canvi de representació, atès que en la praxi es produeix un canvi de representació en tots els àmbits, tant el conceptual (implicat per l'ús d'eines i materials) com en el metodològic (la pràctica té la última paraula).

9) *Diàleg filosòfic*. És gràcies al diàleg filosòfic que els altres poden contribuir al desenvolupament de la nostra creativitat. Així pren sentit l'aspecte social de la construcció de l'aprenentatge de Vygotsky (1978).

10) *Establir relacions*. La modelització matemàtica es la primera relació que hom necessita fer per relacionar un fenomen qualsevol amb les matemàtiques. El segon nivell consisteix en relacionar diferents fenòmens dins de les matemàtiques. Com en el problema inspirat per la ciutat de Dorotea on es relacionen una sèrie de segments amb una corba cònica. s

11) *Gosar adoptar noves perspectives*. Atrevir-se a proposar nous punts de vista sense tenir por d'equivocar-se i valorar l'error com a punt de partida de la millora suposa una incitació al procés creatiu que l'educació basada en la transmissió de coneixement impedeix desenvolupar. En aquest sentit, l'educació per competències ofereix entorns d'aprenentatge molt més afins a la creativitat.

Igual que els jugadors primerencs d'escacs, els matemàticament iniciats pensen que l'obeïment de les normes, tant les dels escacs com les de les matemàtiques, impedeixen el desenvolupament creatiu. Però un cop s'és expert i les normes s'han incorporat al pensament i al caràcter de la persona, es posa de manifest que no són obstacle per a la creativitat. A ningú se li acudiria pensar que un pintor veu la seva creativitat limitada per la forma o mida del quadre, per les games de colors disponibles o pel pinzell amb què fa la seva obra. La paradoxa és que la creativitat necessita límits i que és dintre dels límits on i quan hom esdevé vertaderament creatiu.

Nota final: totes les figures, taules i fotografies són d'elaboració pròpia excepte quan s'indiquen altres fonts.

Bibliografia

Albertí, M. (2006). En las ciudades invisibles. *Suma, 53*, 83-91. Recuperat de https://revistasuma.es/IMG/pdf/53/083-091.pdf

— (2007). *Interpretació matemàtica situada d'una pràctica artesanal*. (Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Catalunya). Recuperat de https://www.tdx.cat/handle/10803/4712

— (2010). Situated Mathematical Research: the Interaction of Academic and Non-academic Practices. *For the Learning of Mathematics, 30*(2), 32-39.

— (2016). Què és més rodó? *Revista 9Biaix, 38*, 43-66.

Albertí, M. i Hernández, M. (2018). *L'INSiTU, un projecte metodològic obert*. Actes del Simposi d'Aprenentatge Globalitzat i per Projectes, ICE de la UAB, Bellaterra. Resum recuperat de https://www.uab.cat/doc/simposi_aprenentatge_globalitzat_i_per_projectes_2018

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza editorial.

Calvino, I. (2012). *Les ciutats invisibles*. Barcelona: Labutxaca editorial.

Courant, R. i Robbins, H. (1996). *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford: Oxford University Press.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philoshphy of Mathematics*. Albany, NY: Sunne Press.

Euclides (1994). *Elementos*. Madrid: Editorial Gredos.

Galileu, G. (1994). *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*. Madrid: Alianza Editorial.

Hadamard, J. (1954). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Hararap, B. i Negoro, S. (1998). *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia. Anggota IKAPI.

Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones*: *La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Every Day Life*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lipman, M. (2016). *El lugar del pensamiento en la educación*. Barcelona: Octaedro Editorial.

Matusek, P. (1977). *La creatividad: Desde una perspectiva psicodinámica*. Barcelona: Editorial Herder.

Newell, A., Shaw, J. C. i Simon, H. A. (1963). Empirical Explorations with the Logic Theory Machine: a Case Study in Heuristics. Dins Feigenbaum i Feldman (eds.), *Computers and Thought*. Nova York, NY: McGraw-Hill, Inc.

Penrose, R. (2011). *La nueva mente del emperador.* Barcelona: Editorial Debolsillo.

Piaget, J. (1970). *The Science of Education and the Psychology of the Child.* Nova York, NY: Grossman.

Pinillos, J. L. (1981). *Principios de Psicología*. Madrid: Alianza Editorial.

Platón (1960). *Diálogos: Filebos: Timaios: Kritias*. Madrid: Ediciones Ibéricas.

Polya, G. (1988). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton: Princeton University Press.

Singh, S. (1998). *El enigma de Fermat: La historia de un teorema que intrigó durante más de trescientos años a los mejores cerebros del mundo*. Barcelona: Editorial Planeta.

Taylor, C. W. (1964). *Creativity: Progress and Potential*. Nova York, NY: McGraw-Hill, Inc.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wenger, E. (1999). *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Altres referències consultades

Barriga, S. (1982). *Psicología general*. Barcelona: Ediciones CEAC.

Per citar aquest article:

Albertí, M. (2019). Referents per a la creació matemàtica. *Revista Catalana de Pedagogia, 16*, 73-102.

Publicat a *http://www.publicacions.iec.cat*