L’ ÀLGEBRA I ELS JOCS AMB NOMBRES

Escrit per:
Marta Cubedo
Dept. d’Estadística
Universitat de Barcelona

Per estrany que pugui semblar, la força de la matemàtica està en el seu fugir de tot pensament innecessari i en la seva admirable economia d’operacions mentals.

LORD KELVIN

Una mica d’història

Des dels primers anys d’escola, ens han ensenyat el mecanisme del càlcul amb nombres enters, les fraccions, els nombres negatius, etc.; però potser són pocs qui, impulsats per un interès especial, s’han preguntat què són i què representen els nombres. Podríem dir que els nombres són construccions mentals que poden indicar objectes materials, fins i tot sense tenir cap relació amb les qualitats especificades o característiques d’aquests objectes. Són instruments que permeten dur a terme càlculs i desenvolupar expressions quantitatives d’una manera senzilla i sintètica sense emprar un temps excessiu.

En el curs de la història, els diferents pobles i civilitzacions han adoptat símbols diferents per representar els nombres, com per exemple la numeració grega i romana, però posteriorment van ser substituïdes pels símbols indi-àrabs que són els que usem actualment {1, 2, 3, ...}. Sembla ser que aquesta substitució va ser deguda principalment als mercaders italians i en especial al matemàtic italià Leonardo de Pisa, més conegut com Fibonacci (fill de Bonaccio), qui viatjava freqüentment amb el seu pare al nord d’Àfrica i l’Orient per motius comercials. Fibonacci va tenir així l’ocasió d’assistir a les escoles musulmanes i dominar les tècniques del càlcul, de les quals els àrabs n’eren mestres. A occident, d’entrada, aquest nou sistema numèric no va ser ben acollit, però poc a poc es va anar imposant.

Fibonacci i el problema dels conills

Entre els molts temes matemàtics i algebraics que va tractar en Fibonacci, el de les successions mereix una atenció especial, doncs sobre elles va construir un problema interessant, el dels conills. Suposem, deia en Fibonacci, que tanquem en una gàbia especial una parella de conills adults, mascle i femella, de manera que al final del mes següent hagin engendrat una nova parella de conills, mascle i femella també. Suposem que els fills assoleixin la maduresa sexual a l’edat de dos mesos, així aquests també generaran una parella de conills amb les mateixes característiques, cada un dels mesos següents. Si no morís cap conill, quants conills hi hauria passat un any?

Intentem fer un esquema del problema. Comencem per una parella inicial A en el mes de Gener, al Febrer tindrem dues parelles, la A i la nova nascuda B. Al Març hi haurà una altra nova parella C nascuda també de A i les dues anteriors. Però a l’Abril la cosa es complica: Han passat dos mesos i la parella B també comença a procrear, tindrem llavors a més de les tres parelles del Març, la D nascuda de A i la E nascuda de B. I així consecutivament. Com ajuda, podem considerar el següent gràfic, on cada columna representa un mes amb les diferents parelles de conills que hi conviuen:

$$A \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array} \right. \cdots$$

Si volem representar-ho matemàticament podríem definir una successió de la següent manera: sigui x_n el nombre de conills que tenim al mes n. Suposarem per simplificar-ho que $n = 1$ correspon al mes 1 o Gener, $n = 2$ al Febrer, i així successivament fins a $n = 12$ corresponent al Desembre.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 1 + 2 = 3$$
$$x_4 = 3 + 2 = 5$$
$$x_5 = 5 + 3 = 8$$
$$x_6 = 8 + 5 = 13$$

i, en general podem arribar a l'expressió general
Donades x_1, x_2, $\quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $\quad$ per a $\quad n \geq 3$

Si ens entretenim una mica a calcular aquests termes fins a x_{12} podrem calcular el nombre de conills que tenim al final de l'any. En aquest cas la solució seria $x_{12} = 233$. Lògicament, un cop definida la llei de la successió, aquesta es pot ampliar fins on es vulgui, incloent-hi fins a l'infinit. La llei definida per aquestes successions, anomenades successions de Fibonacci, ha tingut gran aplicació al llarg de la història de la matemàtica, i descriu el comportament de molts fenòmens biològics com, per exemple, el nombre d'espirals existents en la closca de determinades espècies de cargols, el nombre de petites flors existents en una flor de gira-sol, etc.

Jocs d'àlgebra

Veurem ara com amb els nombres també podem crear jocs divertits i sorprenents i que, si intentem esbrinar les lleis que els defineixen, aquests serveixen per exercitar la nostra ment i ajuden a desenvolupar la nostra capacitat de deducció.

La paraula àlgebra prové de l'àrab *al-jabr*, nom amb el qual el matemàtic i astrònom Al-Khuwarismi, que va ser el primer en utilitzar-lo, designava els passos ideats per solucionar aquestes expressions matemàtiques peculiars que reben el nom d'equacions.

En general, una equació algebraica es presenta com una equivalència on apareixen una o més incògnites que es solen notar per x, y, z, ... És la traducció numèrica d'un problema en el qual la solució consisteix en buscar els valors d'aquestes x, y, z, ..., tals que possibiliten la certesa de l'equivalència de les expressions algebraiques indicades. Si per exemple tenim l'equació:

$$5x + 1 = 3(2x - 1)$$

la solució buscada és: $x = 4$. Qui no n'ha resolt alguna!

Però l'àlgebra i les seves lleis han estat sovint una font de trucs i jocs que, a primera vista semblen tenir certa màgia i secret, però que realment resulten molt fàcils d'explicar mitjançant el coneixement de les lleis algebraiques. Imaginem-nos el següent joc:
1) Penseu un número qualsevol,
2) sumeu-li 3,
3) multipliqueu-lo per 2,
4) resteu-li 4,
5) dividiu-lo entre 2,
6) i resteu-li el número que heu pensat al començament.

Sigui quin sigui el número que heu pensat us ha de donar com a resultat el valor: 1. Sorprenent? Doncs l'explicació és molt senzilla a partir d'uns principis algebraics elementals, però no per això poc profunds. Enunciarem ara el joc anterior en forma algebraica:

1) Penseu un número qualsevol: x,
2) sumeu-li 3: $x + 3$,
3) multipliqueu-lo per 2: $2(x + 3)$,
4) resteu-li 4: $2(x + 3) - 4$,
5) dividiu-lo entre 2: $\frac{2(x+3) - 4}{2}$,
6) i resteu-li el número que heu pensat al començament: $\frac{2(x+3) - 4}{2} - x$.

Si desenvolupem tota l'equació veurem que, per a qualsevol valor x que
agafem,

l'expressió $\frac{2(x+3) - 4}{2} - x$ sempre dóna 1

Podeu agafar una altra identitat algebraica i ja tindreu un altre joc, i fins i tot pot ser molt més complicat!
Fem-ne un altre: suposem que volem endevinar el mes i el dia de naixement d'un amic a partir d'una fórmula algebraica. Considerarem m un nombre qualsevol entre els 12 que representen els mesos de l'any, i d un qualsevol dels dies d'un mes, és a dir d pot prendre valors des de 1 fins a 31. Suposarem, per veure que la solució és correcta, que aquest amic va néixer un 20 d'Abril. Heu de donar les següents instruccions al vostre amic:

1) Multipliqueu el número del mes per 5: $5m$, (farà: 5 x 4 = 20),
2) resteu-li 3 al resultat: $5m - 3$, (farà: 20 - 3 = 17),
3) multipliqueu per 2 el número obtingut: $2(5m - 3) = 10m - 6$, (farà: 2 x 17 = 34),
4) multipliqueu ara per 10 el resultat: $10(10m - 6) = 100m - 60$, (farà: 10 x 34 = 340),
5) sumeu-li el dia: $100m - 60 + d$, (farà: 340 + 20 = 360),
6) finalment sumeu vosaltres 60 al número anterior: $100m - 60+d+60 = 100m + d$ (el número resultant és 360 + 60 = 420, que correspon al dia 20 del mes 4 !!!!).

De fet, el món de la matemàtica és ple de jocs i entreteniments, només cal endinsar-s'hi una mica, segur que hi gaudireu!