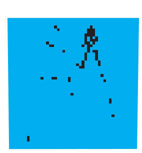
TEMPS DE MATEMÀTIQUES

Coordinat per Gabriel Navarro*

El matemàtic continua essent el més desconegut dels científics. És veritat que no disposem de potents departaments de premsa (com *Science* o *Nature*) que filtren cada setmana els avenços en biologia, medicina, física o astronomia. Ni tan sols tenim un Premi Nobel amb què atraure l'atenció de la societat cada any. Però també és cert que notem alguna millora social. Llegim en algun periòdic que la seguretat en Internet es basa en la criptografia (encara que no es cite la teoria de nombres); que els lectors de *Compact Disc* utilitzen teoria de codis... Qui no ha sentit parlar mai del caos, o dels fractals, avui tan de moda? No són els estadístics els protagonistes de tots els processos electorals? L'últim premi Iberdrola d'Investigació Científica ha estat concedit a un matemàtic (David Nualart). Manuel Valdivia ha estat guardonat amb el premi CEOE a les Ciències. L'últim premi Nobel de Física l'han compartit un físic i un matemàtic. Fins i tot hi ha una pel·lícula titulada *Pi*! D'acord: no se sent parlar d'àlgebra, ni d'anàlisi matemàtica, topologia, geometria... Però pense que això tampoc no ho esperem, sincerament. No és notorietat el que busquem. Potser l'única idea que tenim l'obligació de transmetre és que les societats avançades cultiven les seues ciències bàsiques, i que la més bàsica de les ciències és la matemàtica.

*Facultat de Matemàtiques. Universitat de València



L'APOGEU DE LA INVESTIGACIÓ MATEMÀTICA A ESPANYA

Antonio Martínez Naveira*

The peak of mathematical research in Spain. In this article we give an account of the evolution of mathematical research in Spain during the second half of the twentieth century. Furthermore, we emphasise the important role of Spain in the year 2000 (World Year of Mathematics)

Des de la perspectiva que li puga donar a un humil professor d'universitat la visió històrica de l'evolució de la investigació en matemàtiques a Espanya durant la segona meitat del segle XX, em permetré fer algunes consideracions molt generals de com la veig en aquest moment.

La polèmica sobre la ciència espanyola en general i al voltant de les matemàtiques en particular, que arribà al seu moment culminant a finals del segle passat, ha quedat resolta. Desgraciadament, tenien la raó els qui assenyalaven la inexistència d'una ciència matemàtica espanyola. Molt s'ha escrit i discutit sobre quines van ser les causes del nostre retard científic en matemàtiques. Aquest és un problema de molt difícil solució. Encara que siga molt breument, em permetré recordar alguns pensaments de diverses autoritats en la matèria.

«ESTIC TOTALMENT CONVENÇUT QUE SENSE UN DESENVOLUPAMENT MATEMÀTIC FORT UN PAÍS NO POT ACONSEGUIR UN DESENVOLUPAMENT CIENTÍFIC D'ALT NIVELL NI POT PENSAR EN UN DESENVOLUPAMENT INDUSTRIAL COMPETITIU.»

Amb els anys, el retard existent es va anar fent patent. Aparegueren estudis serens de la nostra aportació a les matemàtiques; per exemple, el de Julio Rey Pastor. La situació creada és estranya i difícil d'explicar, donat el valor que la cultura espanyola té en altres ordres, com ara l'artístic, el literari o l'humà. Aquelles etapes de la història en què els poders públics tractaren d'evitar que es reconeguera el retard científic, perjudicaren greument Espanya. La recuperació és molt difícil, perquè disputem una cursa de fons en què els altres corredors ens porten molts metres d'avantatge, i ells no es pararan. Encara avui dia perdura en part la creença que el progrés científic no és gaire important. Mentre els poders públics no escolten atentament les autoritats competents i no posen els mitjans econòmics suficients, difícilment s'aconseguirà aquest punt crític mínim que permeta el desenvolupament científic en general i el matemàtic en particular que, sens dubte, el geni espanyol podria assolir. En gran mesura, es continua pensant a Espanya que el que necessitem és tècnica i no ciència, i no es comprèn l'absoluta necessitat d'aquests difícils estudis en la ciència bàsica. En els grans centres d'investigació internacionals tenen molt clar que la investigació aplicada és una conseqüència lògica de la potenciació de la investigació bàsica. També, sovint, és difícil i quasi impossible diferenciar aquestes dues línies d'investigació, ja que estan directament interrelacionades i la potenciació d'una comporta necessàriament la potenciació de l'altra.

És possible que la meua apreciació estiga deformada per la meua formació professional; això no obstant coincideix amb la de molts científics més. Estic totalment convençut que sense un desenvolupament matemàtic fort un país no pot aconseguir un desenvolupament científic d'alt nivell ni pot pensar en un desenvolupament industrial competitiu. Pel bé del nostre desenvolupament és necessari ser valent i denunciar les deficiències, com, per exemple, va fer l'eminent matemàtic de la Rioja Julio Rey Pastor, que en la seua obra *Los matemáticos españoles del siglo XVI* escriu:

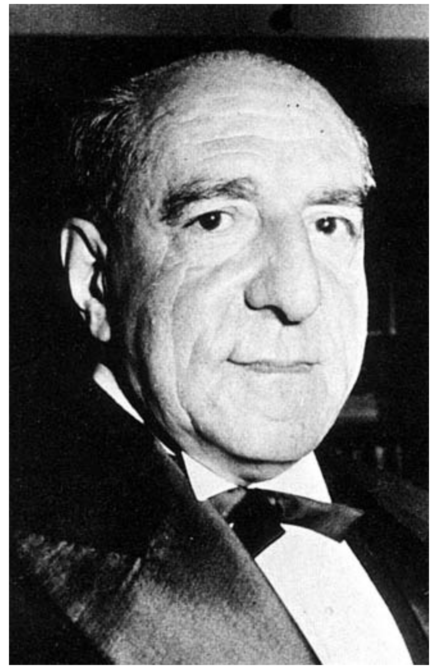
"Ha estat completament nul·la la nostra contribució a la matemàtica en aquella brillant centúria? Ens queden tres noms: una esperança afalagadora, que és Fra Ortega, revelada per uns simples exemples numèrics; i dues realitats brillants, que són Nonmicus i Álvaro Tomás (aquests dos últims eren portuguesos). A aquests noms els segueix un buit de segles."

Les matemàtiques a Espanya, en la primera meitat d'aquest segle, han discorregut per senders pobres i infecunds. Així ho reconeix el mateix Rey Pastor en el seu discurs de contestació al d'ingrés en l'Academia de Ciencias del professor Ricardo San Juan.

Durant la primera meitat d'aquest segle l'aïllament de les matemàtiques a Espanya respecte a les noves idees que estaven d'actualitat en altres països europeus va ser quasi total. Tan sols alguns casos escadussers i, en part, la política científica de la Junta de Ampliación de Estudios intentaren pal·liar aquest aïllament. Per exemple, l'any 1935 el gironí Lluís Àngel Santaló es va desplaçar a Berlín per estudiar la geometria integral, especialitat amb múltiples aplicacions en la vida pràctica; en particular, a la teoria de la probabilitat geomètrica. Santaló abandonà Espanya després de la Guerra Civil i es va instal·lar a l'Argentina. La seua obra sobre geometria integral s'estudia actualment als més prestigiosos centres matemàtics internacionals i és bàsica per a geòmetres aplicats i probabilistes.

Molts matemàtics més realitzaren grans esforços per millorar el nivell de les matemàtiques a Espanya i publicaren molts i interessants treballs, però la majoria (com hem dit anteriorment) estaven basats en les idees del segle XIX. En aquell moment a Europa la ciència matemàtica seguia altres camins, ja que a finals del segle XIX havia aparegut, entre altres, la topologia com una branca bàsica per a diverses disciplines matemàtiques. A Espanya aquesta matèria es va començar a ensenyar tímidament en les dècades dels quaranta i cinquanta. I el mateix podem dir de les modernes teories de la geometria diferencial i de l'àlgebra, que tanta importància han tingut i tenen actualment en el desenvolupament modern de la física teòrica.

Analitzant amb una mica de perspectiva històrica el desenvolupament de les matemàtiques a Espanya durant els últims cinquanta anys podem observar que a partir de la dècada dels cinquanta hi ha a la universitat espanyola un nombre de professors, encara limitat, però significatiu, que comprenen el problema de l'aïllament i es preocupen, d'una banda, d'enviar deixebles als més prestigiosos centres estrangers per a especialitzar-se en les noves teories, i de l'altra d'in-



Esquerra: Foto de Julio Rey Pastor.
Baix: El professor gironí L.A. Santaló amb el seu amic el professor E. Vidal Abascal

vitar a les seues universitats aquells especialistes que les pogueren explicar. Tot això, unit a una encertada política de beques i ajudes per a desplaçar-se a l'estranger a partir de finals dels seixanta, va permetre que, globalment, les matemàtiques a Espanya s'incorporaren als nous corrents matemàtics internacionals.

Des de l'any 1940 s'edita a Boston el *Mathematical Reviews* i, des de 1931, el *Zentralblatt für Mathematik* a Berlín. En aquestes revistes s'analitzen els continguts de totes les publicacions mundials de matemàtiques en llibres, revistes, monografies, etc. Com és sabut, existeix també una classificació que, encara que d'una manera aproximada, avalua la categoria científica de les revistes especialitzades atenent al seu índex d'impacte. A finals del segle XIX es crea la Unió Matemàtica Internacional (UMI), organització que a partir de 1930 concedeix les medalles Fields (equivalents al premi Nobel per a matemàtiques). Tenint en compte els índexs d'impacte de les diverses publicacions matemàtiques, la UMI classifica els països segons la seua producció matemàtica. Aquesta varia entre un mínim d'una i un màxim de cinc estrelles. Segons les dades a què he tingut accés, Espanya va estar, fins la dècada dels noranta, en el grup de països amb dues estrelles. En aquest moment en tenim assignades tres i ocupem el lloc número nou en la classificació mundial. Utilitzant un estudi científic de la producció de les matemàtiques a Espanya en els últims anys, a hores d'ara el comitè espanyol de la Unió Matemàtica Internacional fa les gestions oportunes perquè Espanya passe a engrossir el club dels països amb quatre estrelles.

«LA INEXISTÈNCIA DE CENTRES ESPECÍFICS PER A LA INVESTIGACIÓ MATEMÀTICA RESULTA PARADOXAL SI LA COMPAREM AMB EL DESENVOLUPAMENT DE LA INVESTIGACIÓ MATEMÀTICA UNIVERSITÀRIA.»

La situació actual de la producció matemàtica en la universitat espanyola és bastant bona, encara que, evidentment, sempre es pot millorar. Són ja nombrosos els matemàtics espanyols que publiquen en revistes que figuren en els primers llocs dels índexs d'impacte i que participen en congressos i col·loquis a nivell internacional. Molts dels seus articles i llibres apareixen citats en la bibliografia especialitzada. A més l'ensenyament de les matemàtiques en la universitat s'ha institucionalitzat, de manera que els grups d'investigació importants no desapareixeran quan es retire el seu creador. La raó és que la llavor ha arrelat amb força, i en els equips ja és freqüent trobar joves investigadors disposats a crear nous grups, o bé a continuar la tasca dels seus mestres. Segons un informe de la Comunitat Europea, Espanya representava l'any 1992 l'1,5% de la producció mundial de revistes matemàtiques periòdiques que apareixen en l'Sciences Citation Index (SCI), en comparació amb el 0,3% de l'any 1981. Segons les darreres dades, aquesta progressió s'ha incrementat al 3,9% l'any 1998.

A la matemàtica espanyola encara li queda, però, molt de camí per recórrer, i es veu afectada per diverses mancances que és necessari corregir. Per exemple, a diferència d'altres països, com ara Estats Units, França, Itàlia, Alemanya, Brasil o Mèxic (per citar-ne alguns solament), a Espanya no existeixen dotacions pressupostàries suficients per a beques d'iniciació a la investigació, ni disposa d'instituts d'investigació específics per a matemàtiques. Com a tal centre solament funciona el Centre de Recerca Matemàtica a Barcelona, que, encara que no té una plantilla fixa, aplega un gran nombre de professors invitats d'una alta qualificació científica. Amb l'ànim de corregir tant com siga possible aquests defectes, considerem que la Real Sociedad Matemática Española (RSME) hi té alguna cosa a dir.

L'any 1939 es va crear a Madrid el Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC), que contenia dos instituts relacionats amb les matemàtiques: el Jorge Juan i el d'Estadística. Fins principis de la dècada dels setanta, tots dos instituts realitzaren una activitat científica d'una repercussió acceptable, dins de les limitacions imposades per la realitat matemàtica espanyola del moment. La decadència de l'activitat científica de les matemàtiques en el CSIC començà en els anys setanta i es manté en els nostres dies. De primer va desaparèixer l'Instituto de Estadística i, a continuació, es va suprimir l'Instituto Jorge Juan. En el seu lloc es creà la Confederació de Centres d'Investigació Matemàtica i Estadística (CECIME), una pura entelèquia creada per a confederar centres que no existien com a tals. Aquest projecte fou abandonat en tan sols tres anys. En aquests moments el personal de plantilla (i únic) que treballa en el CSIC en la investigació matemàtica el constitueixen quatre persones. Com a contrast es pot citar, per exemple, l'Institut de Matemàtica Pura i Aplicada de Rio de Janeiro (IMPA), que disposa en aquests moments d'una plantilla fixa de 43 professors, a més de nombrosos invitats de caràcter temporal, i d'una valuosíssima biblioteca.

L'any 1990 es creà a Europa la Societat Europea de Matemàtiques (SEM), a què s'adheriren la pràctica totalitat de societats matemàtiques europees. Una vegada més, amb retard respecte a Europa i a causa d'una sèrie de raons tan sols imputables als espanyols, l'adhesió de la RSME no fou aprovada fins el 28 d'agost de 1998 a Berlín. Actualment tots els membres de la RSME poden ser socis de la SEM i estar així informats puntualment de gran nombre d'activitats científiques que desenvolupen tant les societats membres com la mateixa SEM. És aquest un altre pas més per a evitar una vegada més l'aïllament secular de les matemàtiques a Espanya.

En la "Declaració de Rio de Janeiro sobre matemàtiques" del 6 de maig de 1992, la UMI declarà l'any 2000 com l'any mundial de les Matemàtiques amb els tres objectius següents:

1. Determinar els grans reptes matemàtics del segle XXI.
2. Promulgació de les matemàtiques pures i aplicades com una de les claus fonamentals per al desenvolupament.
3. El reconeixement de la presència sistemàtica de les matemàtiques en la societat de la informació (la imatge de les matemàtiques).

La UNESCO, en l'assemblea general de novembre de 1997, acceptà i féu seua, la proposta de la UMI.

Espanya tindrà un gran protagonisme durant aquest any. Al mes de juliol se celebrarà a Barcelona el III Congrés Europeu de les Matemàtiques. Aprofitant aquest esdeveniment s'organitzaran conferències satèl·lit en diverses universitats espanyoles. Per exemple, en homenatge a la cultura àrab, està prevista a Granada una conferència sobre "Les matemàtiques als països mediterranis".

En aquest moment, Espanya ha fet i continua fent un gran esforç per a integrar-se en la Comunitat Europea. Aquesta integració no sols ha de ser política i econòmica sinó que ha d' abraçar molts aspectes més de la societat, entre els quals evidentment ha de figurar el matemàtic. Una gran majoria dels països de la Comunitat són conscients que una millora en el seu nivell matemàtic repercutirà de manera molt favorable en el desenvolupament científic, tecnològic i social del seu país.

A la vista d'aquesta situació, hauríem de preguntar-nos si els matemàtics espanyols serem capaços de convèncer els nostres governants de la necessitat de potenciar l'ensenyament de les matemàtiques en tots els seus nivells i de crear i consolidar una política científica raonable i moderna en la investigació en matemàtiques, tant pures com aplicades. Si fórem capaços d'aconseguir aquest objectiu, a Espanya hauríem fet un gran pas cap al desenvolupament científic.

La inexistència de centres específics per a la investigació matemàtica resulta paradoxal si la comparem amb el desenvolupament de la investigació matemàtica universitària. És aquest un problema que tard o d'hora (esperem que siga prompte) hauran d'abordar els poders públics, tant a nivell estatal com autonòmic.

*President de la Real Sociedad Matemática Española. Universitat de València

HI HA ALGÚ AQUÍ FORA?

Pilar Bayer*

Is anybody out there? In the paper our aim is to describe some basic facts about prime numbers and the Riemann zeta function. After discussing their importance, we mention some open problems and applications.

CONTACTE

Actualment, ningú no sap si hi ha o no vida intel·ligent o bé, simplement, vida en alguna altra part de l'univers. Amb tot, si n'hi hagués, establir-hi contacte no seria fàcil. Caldria, com a mínim, que alguns extraterrestres emetessin senyals racionals, que nosaltres els interceptéssim i que, a més, fóssim capaços de descodificar-los. No obstant això, en el film de ciència ficció *Contact*, dirigit l'any 1997 per Robert Zemeckis amb l'aval científic de Carl Sagan, la radioastrònoma Ellie Arroway (Jodie Foster) aconsegueix captar per primera vegada senyals intel·ligents procedents de l'espai exterior.

El missatge dels alienígenes de *Contact* és: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, etc. Arroway s'adona que un missatge així no pot ser degut a cap radiació fortuïta, ja que hi reconeix la successió dels nombres primers i, per tant, la intervenció d'una acció intel·ligent. Com que la notícia és rebuda amb l'escepticisme previsible, la científica es veu abocada a defensar el seu parer. Així, en una escena que és força inusual en el cinema, Jodie Foster explica a un comitè d'experts de Washington que "els nombres primers són aquells que només es poden dividir per ells mateixos i per l'1 [...]". Com que l'escena és molt curta, i l'espectador només assisteix a una part del debat, utilitzarem l'ocasió per parlar d'aquests nombres i de com els éssers humans han anat escorcollant les seves propietats.

SOBRE LA QUANTITAT DE NOMBRES PRIMERS

Considerem la successió dels nombres naturals 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. Els nombres primers són els constituents bàsics dels nombres naturals, en tant que tot nombre natural factoritza com a producte de nombres primers. Des del segle III a. C., es coneix que la successió dels nombres primers, a l'igual de la dels nombres naturals, no s'acaba mai. Euclides demostrà que hi ha una quantitat infinita de nombres primers en el capítol IX dels *Elements*. La demostració d'Euclides es fonamenta en propietats elementals de la divisibilitat dels nombres.

L'any 1748, Leonhard Euler redemostrà el teorema d'Euclides d'una manera molt més elaborada. En el seu raonament, Euler utilitzà la identitat:

$$\sum n^{-s} = \prod (1 - p^{-s})^{-1}$$

on el sumatori de l'esquerra s'estén a tots els nombres naturals, el producte de la dreta ho fa a tots els nombres primers i $s > 1$ denota un nombre real. La validesa de la identitat és deguda al fet que tot nombre natural es descompon en factors primers *de manera única* (la qual cosa no seria provada rigorosament fins una cinquantena d'anys més tard per Carl Friedrich Gauss). Euler s'adonà que si el conjunt dels nombres primers fos finit, el producte de la dreta representaria una quantitat finita, per a tot s, mentre que el sumatori de l'esquerra representa una quantitat no finita quan s tendeix cap a 1. Com que les dues afirmacions es contradiuen, el conjunt dels nombres primers és infinit.

Euler lamentà el desconcert imperant en la successió dels nombres primers. Considerava que el comportament d'aquests nombres és tan misteriós que la seva comprensió restaria per sempre fora de l'abast de la ment humana. Euler no podia sospitar, però, que la seva identitat seria el punt de partida d'una intensa recerca que es produiria en el decurs dels segles subsegüents.

SOBRE LA QUANTITAT DE NOMBRES PRIMERS INFERIORS A UNA QUANTITAT DONADA

Més amunt hem escrit tots els nombres primers inferiors a 50. N'hi ha quinze. Si escrivíssim tots els nombres primers inferiors a 100, en trobaríem vint-i-cinc. I d'inferiors a 1.000, cent seixanta-vuit, etc. L'any 1785, Adrien-Marie Legendre introduí una funció, que es designa per $\pi(x)$, que compta el nombre de primers inferiors o iguals a x. Al mateix temps, Carl Friedrich Gauss construí taules molt extenses de primers (fins a sis milions) i comptà el seu nombre en cada miler de nombres naturals. De manera independent, Legendre i Gauss conclogueren que la funció $x/\log x$ aproximava bé, i que ho havia de fer cada cop millor en créixer x, el valor $\pi(x)$. Avui, que tenim tants mitjans de càlcul a l'abast, és interessant comprovar l'encert de les prediccions de Legendre i Gauss. Observem-ho en els resultats continguts a la taula:

x	$\pi(x)$	$x/\log x$
100	25	21.71
1000	168	144.76
10000	1229	1085.74
100000	9592	8685.89
1000000	78498	72382.41

LA FUNCIÓ ZETA DE RIEMANN

L'any 1859, Bernhard Riemann reprengué l'estudi de la successió dels nombres primers en el punt on l'havia deixat Euler. En l'època de Riemann, l'ús dels nombres complexos i la manipulació de sèries eren pràctiques més habituals que no en la d'Euler. D'aquesta manera, Riemann pogué considerar una funció

Bernhard Riemann

$$\zeta(s) = \sum n^{-s}$$

definida per a tots els nombres complexos s de part real més gran que 1. En la memòria *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Riemann estengué la funció anterior a tots els nombres complexos per mitjà d'una representació integral. Riemann intuí que la localització dels seus zeros havia de tenir una forta influència en el nombre de primers inferiors a una quantitat donada, la qual cosa formulà d'una manera precisa. Però les eines disponibles en l'època no li permeteren anar més lluny. La funció en qüestió s'anomenà la funció zeta de Riemann i quedà lligada indefectiblement a l'estudi de les lleis que regeixen el comportament dels nombres primers.

EL TEOREMA DELS NOMBRES PRIMERS

Jacques Hadamard (1865-1963) i Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866-1962), dues vides paral·leles en la història de la matemàtica, provaren l'any 1896, de manera simultània i independentment, l'anomenat teorema dels nombres primers. Veritable fita matemàtica del segle XIX, el teorema afirma que la funció $x/\log x$ és asimptòticament equivalent a la funció $\pi(x)$, d'acord amb les conjectures formulades per Legendre i Gauss. Les demostracions d'ambdós autors són llargues i difícils. Un punt delicat en què es basa el resultat final és la prova que la funció zeta no té cap zero de part real igual a 1. O sigui, que el nombre complex $\zeta(1+bi)$ és sempre diferent de zero. La sola demostració d'aquest fet ocupa en l'article de De la Vallée Poussin més de vint pàgines.

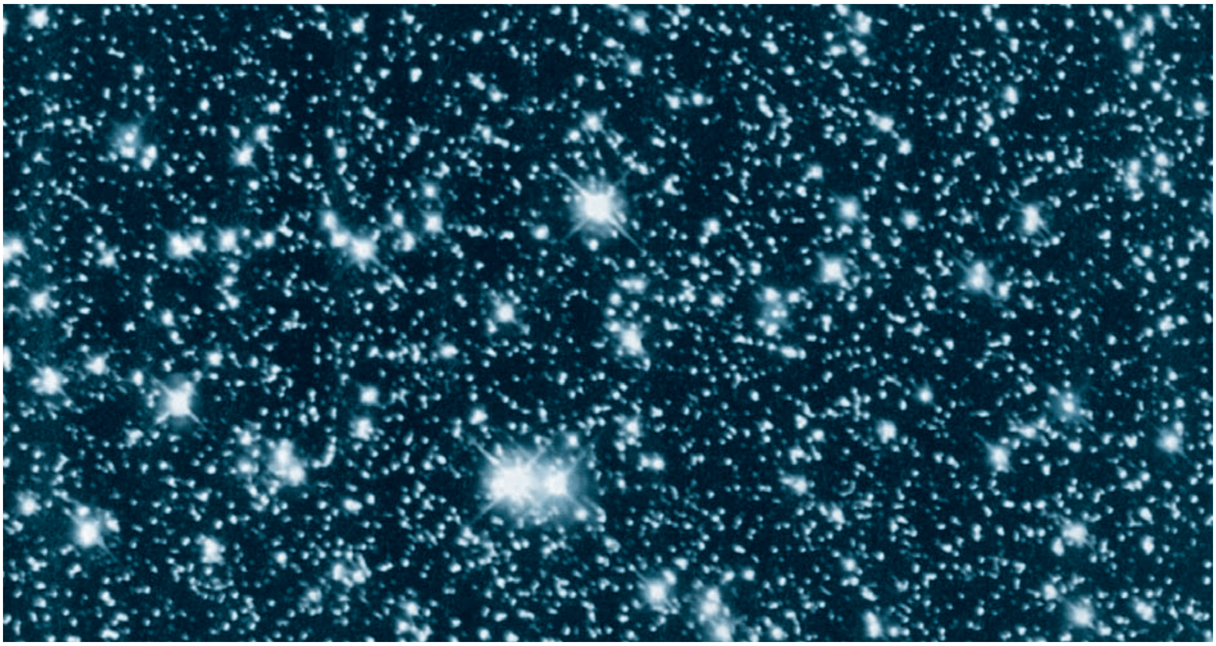
Al llarg del segle XX, diversos autors han intentat simplificar les demostracions del teorema dels nombres primers. L'any 1949, A. Selberg i P. Erdös n'aconseguiren una prova amb recursos elementals, però encara massa llarga per esdevenir popular. Successives simplificacions han conduït, finalment, a una demostració del teorema molt més assequible.

Les simplificacions més recents aconseguides en la demostració del teorema dels nombres primers són degudes, bàsicament, a D. J. Neumann (1980) i D. Zagier (1997). Aquests autors presenten de manera compacta molts recursos deguts als seus predecessors. La demostració que en resulta és analítica i, per descomptat, s'hi empra la funció zeta de Riemann a bastament. Avui, transcorreguts més de cent anys després de les primeres demostracions, el teorema dels nombres primers es pot aprendre en unes quatre o cinc hores de classe.

LA HIPÒTESI DE RIEMANN

En l'*International Congress of Mathematicians*, celebrat a París l'any 1900, David Hilbert presentà una llista de 23 problemes oberts, d'una rellevància especial. Els problemes de Hilbert han esperonat una part molt significativa de la recerca matemàtica del segle XX. El problema número 8 de Hilbert se centra en l'anomenada hipòtesi de Riemann. La hipòtesi de Riemann controla els zeros de la funció zeta en la banda crítica, tal com s'expressà en la memòria de Riemann de l'any 1859. Concretament, el problema demana demostrar que si un nombre complex $a+bi$ és un zero (no trivial) de la funció zeta, $\zeta(a+bi) = 0$ aleshores $a = 1/2$. La seva prova permetria obtenir, entre d'altres, bones fites del terme d'error $\pi(x) - x/\log x$.

Malgrat els nombrosos intents portats a terme durant gairebé 150 anys per provar la hipòtesi de Rie-



Si en una pel·lícula o novel·la de ciència ficció es volgués donar a entendre que una civilització d'alienígenes es troba un punt més avançada que la nostra, n'hi hauria prou que transmetés, a més de la successió dels nombres primers, una prova de la hipòtesi de Riemann

mann, aquesta resta inassequible. En aquest sentit, els matemàtics entrem en l'any 2000 amb els deures proposats per Hilbert inacabats i la hipòtesi de Riemann emergeix com un repte matemàtic per a les noves generacions. Interpretacions espectrals i cohomològiques, fórmules de traces, trencament de simetries, transicions de fase, etc. són recursos que s'han presentat com a probables vies d'atac de la hipòtesi de Riemann i que actualment són objecte d'una intensa recerca. D'altra banda, una forta experimentació numèrica la corrobora.

«INTERPRETACIONS ESPECTRALS I COHOMOLÒGIQUES, FÓRMULES DE TRACES, [...], ETC. SÓN RECURSOS QUE S'HAN PRESENTAT COM A PROBABLES VIES D'ATAC DE LA HIPÒTESI DE RIEMANN I QUE ACTUALMENT SÓN OBJECTE D'UNA INTENSA RECERCA.»

PER A QUÈ ENS CALEN PRIMERS TAN GRANS?

En arribar a aquest punt, algú podria interpretar la tasca exposada com un exercici intel·lectual pur, desconnectat de la *realitat*. El més sorprenent, però, és que l'existència de primers grans s'ha convertit en els darrers anys, i a causa de circumstàncies originades per la tecnologia d'última hora, en salvaguarda dels nostres interessos. En efecte, la circulació d'informació privada en xarxa i el nombre creixent d'usuaris obliga, cada cop més, al maneig de mètodes fiables de codificació de la informació. Un dels mètodes més populars emprats en criptografia és l'anomenat RSA, en honor dels seus creadors R. L. Rivest, A. Shamir, L. Adleman. La seguretat del mètode es basa, precisament, en la dificultat de factoritzar de manera eficient els nombres naturals que són producte de dos nombres primers molt grans. Les implementacions més elaborades del mètode RSA (així com també d'altres similars) utilitzen lleis aritmètiques profundes, el coneixement de les quals seria inimaginable sense el suport teòric que s'ha desenvolupat a l'entorn de la funció zeta.

EPÍLEG

Ara com ara, si en una pel·lícula o novel·la de ciència ficció es volgués donar a entendre que una civilització d'alienígenes es troba un punt més avançada que la nostra, n'hi hauria prou que transmetés, a més de la successió dels nombres primers, una prova de la hipòtesi de Riemann.

*Facultat de Matemàtiques. Universitat de Barcelona

EL NOMBRE D'AUTOENLLAÇ D'UNA CORBA TANCADA EN L'ESPAI

Juan J. Nuño Ballesteros*

The self-linking number of a closed space curve. The self-linking number is a geometrical invariant, which measures the coiling of a curve in space. It is of great interest in biology, where it is applied to the classification of DNA molecules.

Tots hem patit alguna vegada l'odiosa tasca de desenrotllar el nostre cable de telèfon. Al principi, el cable penja ordenadament del nostre aparell, però a mesura que passa el temps, i encara que el cable estiga desnuat, sempre acaba enrotllant-se d'una manera diabòlica. Aquest fenomen de enrotllament, no sols apareix en els cables telefònics, sinó que també es pot trobar, i d'una manera molt més acusada, en les molècules d'ADN, les quals poden arribar a presentar diversos nivells d'enrotllament.

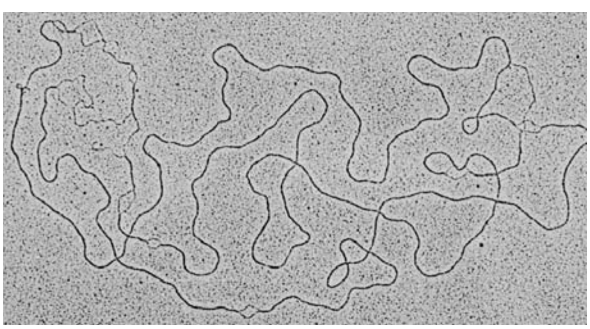


Figura 1: Imatge microscòpica d'una molècula d'ADN.

Per tal d'entendre bé la naturalesa d'aquest procés, podem fer un experiment ben senzill. Agafem un tros de cable pels seus extrems amb les dues mans. Si unim els extrems, aleshores el cable forma una corba tancada sense enrotllar-se. El resultat és ben diferent si abans d'unir els extrems, en subjectem un amb una mà i amb l'altra comencem a retòrcer el cable donant-li moltes voltes, sempre en el mateix sentit. En aquest cas, quan unim de nou els extrems, el cable tendeix a formar una corba molt enrotllada, segons el nombre de voltes que hajam donat al cable. És clar que, per molt que tesem el cable, és impossible desfer aquest enrotllament, si no és que desunim els extrems i tornem a donar-li voltes, aquesta vegada en sentit invers.

En el cas del telèfon, el cable forma una corba tancada quan el telèfon està penjat. Aleshores, quan sona i el despengem estem obrint la corba i és en aquest moment quan estem en perill d'augmentar el seu nivell d'enrotllament. En efecte, suposem que inicialment agafem el telèfon amb la mà esquerra, després el canviem a la mà dreta durant la conversa i finalment acabem penjant-lo amb la mà dreta. Resulta que, sense adonar-nos, hem fet una volta sencera al cable que acabarà produint aquest enrotllament. Les molècules d'ADN estan constituïdes per una doble hèlix que forma una corba tancada amb un alt nivell d'enrotllament. Per tal de separar-les, aquestes molècules són sotmeses a processos de centrifugat, els quals produeixen deformacions contínues de les corbes que deixen inalterat el nombre de voltes característic de cada corba.

Aquest nombre de voltes que produeix l'enrotllament del cable telefònic o de la molècula d'ADN és el que en geometria s'anomena el *nombre d'autoenllaç* d'una corba tancada en l'espai. Es tracta d'un invariant geomètric que va ser definit per Calugareanu a finals dels cinquanta i estudiat amb més profunditat posteriorment per Pohl. Aquest nombre està ben definit sempre que la corba tancada complesca dues condicions:

— És simple, és a dir, no té autointerseccions.
— És diferenciable almenys dues vegades i té curvatura no nul·la en cada punt.

La primera condició és fàcil d'entendre: una autointersecció de la corba seria equivalent a la possibilitat de tallar la corba per algun punt, amb la qual cosa seria possible desfer l'enrotllament. La segona condició és un poc més complicada de veure: des del punt de vista matemàtic, una corba és un objecte geomètric unidimensional, és a dir, és com si tinguérem un fil infinitament fi; aleshores, per tal de donar una certa torsió a la corba és necessari que estiga almenys un poc corbada, ja que si la tesem, aquesta torsió desapareix.

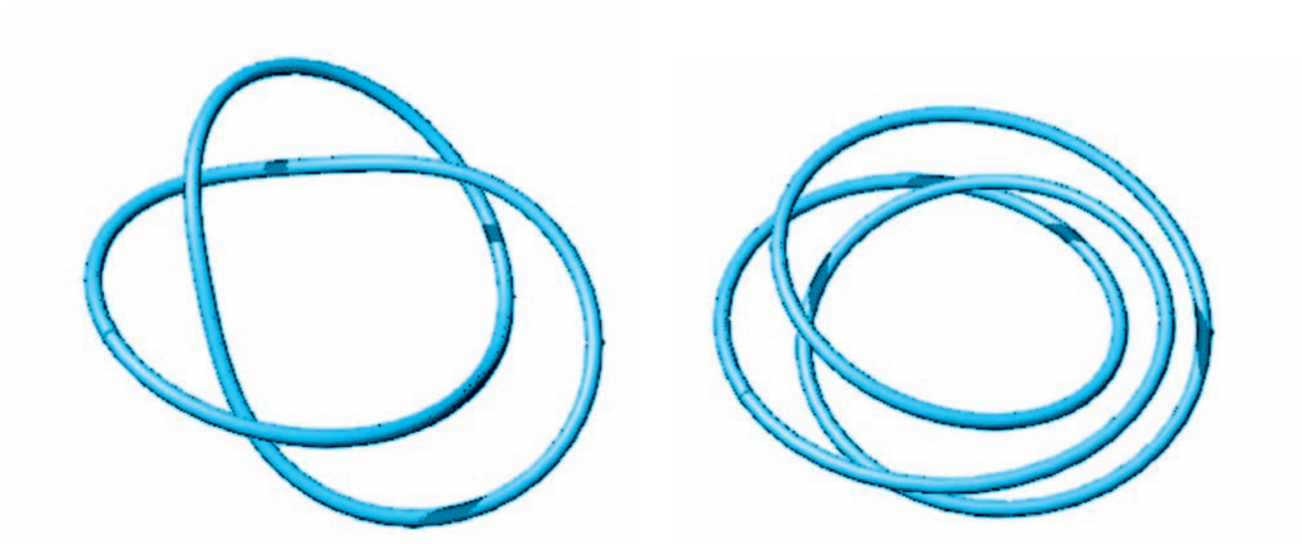


Figura 2: Dues presentacions del nus trèvol amb nombres d'autoenllaç –4 (dreta) i –3 (esquerra).

Encara que és possible calcular el nombre d'autoenllaç d'una corba analíticament mitjançant l'anomenada *integral de Gauss* i la integral de la torsió, explicarem com calcular-lo utilitzant una projecció bidimensional. Quan projectem la corba en un pla, poden aparèixer una sèrie de punts aparents d'autointersecció i de curvatura nul·la. Elegim una orientació qualsevol de la corba i a cadascun d'aquests punts li assignem un signe + o – segons la posició relativa de les branques de la corba al voltant del punt. Banchoff va demostrar que el nombre d'autoenllaç és igual a la suma del nombre d'autointerseccions més la meitat del nombre de punts de curvatura nul·la, comptats amb signe (figura 2).

«AGAFEM EL TELÈFON AMB LA MÀ ESQUERRA, DESPRÉS EL CANVIEM A LA MÀ DRETA DURANT LA CONVERSA I FINALMENT ACABEM PENJANT-LO AMB LA MÀ DRETA. RESULTA QUE, SENSE ADONAR-NOS, HEM FET UNA VOLTA SENCERA AL CABLE QUE ACABARÀ PRODUINT AQUEST ENROTLLAMENT.»

El nombre d'autoenllaç és sempre un nombre enter, que pot ser positiu o negatiu, segons les voltes vagen en un sentit o altre. A més a més, és invariant per isotopies. Això vol dir que si podem passar d'una corba a l'altra mitjançant una família contínua de corbes tancades, simples i amb curvatura no nul·la, aleshores ambdues corbes han de tenir el mateix nombre d'autoenllaç. Cal observar també, que si dues corbes són isotòpiques en aquest sentit, llavors presenten el mateix tipus de nus. La topologia és la branca de les matemàtiques que s'ocupa dels objectes que són equivalents a través de deformacions contínues i, precisament, la teoria de nusos és la part de la topologia que estudia les corbes tancades i simples en l'espai. Per a un topòleg, dues corbes presenten el mateix tipus de nus si és possible passar d'una a l'altra mitjançant una família contínua de corbes tancades i simples (sense tenir en compte la curvatura).

No obstant això, el nombre d'autoenllaç no és un invariant topològic de la corba. És a dir, podem tenir corbes amb el mateix tipus de nus, però amb diferent nombre d'autoenllaç (figura 2). A més a més, l'experiència ens diu que es tracta de conceptes totalment independents. Tornem de nou a l'exemple del cable: si tenim un extrem del cable en cada mà, és clar que podem construir un tipus de nus qualsevol; aleshores, abans d'unir els extrems, també podem donar-li un nombre de voltes qualsevol, la qual cosa no modificarà el tipus de nus.

Per últim, només afegirem que la relació d'aquests conceptes amb les isotopies és ben forta: si dues corbes tenen el mateix tipus de nus i el mateix nombre d'autoenllaç, aleshores són isotòpiques. Encara que alguns autors atribueixen al mateix Pohl una demostració no publicada d'aquest resultat, recentment Gluck i Pan n'han fet pública una.

*Facultat de Matemàtiques. Universitat de València

ALGUNS PROBLEMES D'ÀLGEBRA

Francisco Pérez Monasor*

Some Algebraic problems. We follow mathematical development through the evolution of some classic algebraic problems. These problems were born with human civilisation, reflecting its needs, limitations and sometimes its beliefs.

Seguim el desenvolupament de les matemàtiques a través de l'evolució d'alguns problemes clàssics d'àlgebra. Van ser problemes que nasqueren amb la civilització humana, de les seues necessitats, de les seues limitacions i, de vegades, de les seues creences.

ELS PROBLEMES CLÀSSICS DE CONSTRUCCIONS AMB REGLE I COMPÀS

Segons Plató, les úniques figures geomètriques perfectes són el cercle i la línia recta, i així en l'antiga geometria grega, aquesta creença tingué l'efecte de restringir els instruments vàlids en les construccions geomètriques al regle i al compàs. D'altra banda, sempre és possible trobar a l'abast aquests instruments, i eren dels pocs utilitzables per mesurar grans magnituds i per fer plànols i perspectives. Amb aquests instruments es poden traçar bisecccions d'angles i també rectes paral·leles… però hi ha tres famoses construccions impossibles de fer amb tan poques eines:

- Duplicació del cub: construir un cub el volum del qual és el doble que el d'un cub donat.
- Trisecció d'un angle: donat un angle qualsevol, construir un angle que siga la tercera part de l'inicial.
- Quadratura del cercle: construir un quadrat que tinga l'àrea d'un cercle donat.

Hi ha moltes versions sobre l'origen del problema de la duplicació del cub, com ara l'intent de Minos, rei de Creta, de duplicar la tomba del seu fill Glauc o la petició dels sacerdots d'Apol·lo a Plató perquè els ajudara a resoldre el problema de duplicació de l'altar que havia estat proposat per l'oracle de Delos. Explicacions més raonables podrien ser que una vegada tractat el problema de duplicació del quadrat (construir un quadrat de doble àrea que un donat) i en general la duplicació de polígons, s'intentarà el problema anàleg amb el cub o simplement que es tractara el problema pràctic de construir sòlids de la mateixa forma que un d'inicial però de volum múltiple del primer.

A hores d'ara un alumne de la llicenciatura de matemàtiques pot demostrar per un procediment bastant elemental la impossibilitat de la resolució d'aquests problemes amb els mètodes indicats, atès que els nombres reals, per a ser construïbles, han de ser arrels de polinomis irreductibles sobre els racionals de grau potència de 2, condició que no compleixen ni el nombre real arrel cúbica de 2, arrel del polinomi x^3-2, ni $\cos 20°$ que és arrel de $8x^3-6x-1$, polinomi irreductible sobre Q, ni el nombre π, que no és arrel de cap polinomi racional no nul. Les solucions a aquests problemes es van obtenir a partir de la meitat del segle XIX (Lindemann provà l'any 1882 la transcendència de π).

En conseqüència no és possible duplicar un cub de volum 1, ni trisecar l'angle de 60°, ni quadrar un cercle d'àrea π.

Una qüestió de solució més sofisticada és la següent: per a quins valors de n pot ser construït el polígon regular de n costats mitjançant regle i compàs?

Els antics grecs coneixien la construcció dels polígons de 3, 5 i 15 costats. Aquest problema estava relacionat amb un dels esmentats adés, perquè segons es pogueren dividir els angles en n parts, així es podria construir el polígon regular de n costats. Però no va ser fins 1796 que Gauss, en les seues *Disquisitiones Arithmeticae* resolgué el problema i va provar que el polígon regular de n costats és construïble per regle i compàs si i solament si $n=2^r p_1 \ldots p_s$, on els p_i són primers de Fermat (és a dir, de la forma 2^m+1). Estranyament de primers de Fermat, solament se'n coneixen cinc: 3, 5, 17, 257 i 65.537. També Kepler va participar en la resolució del problema raonant que el polígon regular de set costats no podia ser construït amb regle i compàs. Anecdòticament, segons es cita en el *Manifest geomètric*, plus ultra de la geometria pràctica, obra del mestre en teologia fra Ignacio Muñoz, catedràtic propietari de matemàtiques de la Reial Universitat de l'Imperi Mexicà, el polígon regular de set costats és construïble per regle i compàs, possibilitat que relaciona

Sandro Botticelli és probablement qui més va diversificar els esquemes de la Divina Proporció. Havia après el traçat del pentàgon en el taller del seu mestre Fra Filippo Lippi. En *La Primavera* Botticelli representa un rectangle auri, on queden inscrits dos cercles que enquadren Venus i Cupido, les tres Gràcies, Mercuri, Cèfir i Flora

amb la trisecció d'un angle, i amb aquests arguments construeix una triple invectiva contra l'heretge Kepler.

SEGMENT AURI… I DIVINA PROPORCIÓ

En relació amb les construccions de polígons regulars mitjançant regle i compàs apareix la divina proporció o la proporció àuria, introduïda per Luca Pacioli el 1509. Aquesta proporció és $2\cos(2\pi/5)$ i està relacionada amb el pentàgon regular de diverses maneres, entre altres com ara la relació existent entre una diagonal i un costat o com la proporció existent entre els segments d'una diagonal separats pel punt de tall d'aquesta diagonal i altra sense vèrtex comú amb l'anterior. La definició de la divina proporció sorgeix com el resultat de dividir un segment de longitud arbitrària x en dues parts, una de longitud major b i una altra de longitud $x-b$, de manera que $x/b=b/x-b$.

Aquesta proporció origina polígons i políedres auris i en general figures àuries en què d'alguna manera apareix la divina proporció entre les seues mesures. La influència de la proporció és tal que Kepler escriu: "d'a-

questa proporció geomètrica es va servir el Creador com la idea mitjançant la qual va introduir la generació contínua d'objectes semblants a partir d'objectes donats". És clar que Kepler devia tenir en ment l'explicació. Fibonacci (Leonardo de Pisa) va introduir la successió del seu nom en relació amb estimacions sobre reproducció de conills. En la successió de Fibonacci cada terme a partir del segon és la suma dels dos anteriors i el límit de la successió (f_n/f_{n+1}) és la divina proporció, proporció que també intervé en el creixement d'arbres i plantes. La influència cultural de la proporció àuria va ser considerable durant el renaixement. Luca Pacioli va escriure un llibre sobre les seues propietats i la seua intervenció es pot veure en les imatges que s'adjunten.

Observeu que la proporció àuria és la solució d'una equació de segon grau.

RESOLUCIÓ D'EQUACIONS PER RADICALS

El problema de resolució d'equacions per radicals té dues facetes. La primera és si donada una equació polinòmica d'un cert grau les solucions de la dita equació es poden expressar mitjançant operacions racionals (sumes, diferències, productes i quocients) i radicals (extracció d'arrels) dels coeficients. La segona, si es pot donar una fórmula general per resoldre per radicals una equació polinòmica d'un grau donat.

La resolució d'equacions polinòmiques té també una llarga història. Els antics grecs resolien equacions quadràtiques mitjançant construccions geomètriques. S'afirma que els babilonis (400 a. C.) van ser els primers a resoldre equacions quadràtiques, tanmateix els babilonis no tenien la noció d'equació, més aviat disposaven d'un mètode algorítmic que equivalia en la pràctica a la resolució d'una equació quadràtica.

Sobre la resolució de la cúbica, l'any 1494 Pacioli va acabar la seua *Summa di aritmetica* amb la nota que la solució de les equacions $x^3+mx=n$ i $x^3+n=mx$ era tan impossible en aquell moment com la quadratura del cercle. Són els matemàtics del renaixement establerts a Bolonya els qui troben la solució. Hi va haver molta polèmica sobre qui va ser el primer, si Scipio del Ferro o Niccolo Fontana (Tartaglia), encara que el primer a publicar la solució va ser Cardano en la seua *Ars Magna* apareguda el 1545; en la dita obra apareix també un mètode per a resoldre la quàrtica per reducció a una cúbica.

Era el moment de passar a l'equació quíntica. La primera persona a afirmar que l'equació de grau 5 no es podia resoldre va ser Ruffini l'any 1799, en un treball en què també introdueix els grups de permutacions. Això no obstant Lagrange, a qui Ruffini va enviar la seua obra, no va llegir aquesta demostració, que, per altra part, presentava alguns errors. L'any 1824 Abel va donar la primera demostració acceptada d'irresolubilitat de l'equació de grau 5, utilitzant també el llenguatge de la teoria de grups de permutacions. Però realment va ser Galois, el 1831, el primer a relacionar la resolubilitat d'una equació amb l'estructura del grup de les permutacions de les arrels de la dita equació. I a trobar que el grup simple no abelià més petit és d'ordre 60. Evariste Galois va morir en un duel, als 21 anys, el 31 de maig de 1832. Se sol dir que ell va ser l'únic matemàtic que va passar la seua darrera nit escrivint tot el que sabia de teoria de grups. El seu genial descobriment va ser també motivació del naixement de la teoria de grups. De fet aquesta teoria semblava embolcallar-ho tot. Klein, el 1872, va proposar en el seu Programa d'Erlangen la classificació en geometria a través dels invariants pels seus grups de transformacions. 1872 és un any famós pels resultats obtinguts en teoria de grups, d'aquest any són els teoremes de Sylow. Però hi ha altres anys importants: 1927 pels teoremes de Hall, 1963 pel teorema de Feit i Thompson, 1981 per la classificació de grups simples.

Les aplicacions de la teoria de grups són considerables, encara que això es quedarà per a un altre article. De fet, cursos de grups apareixen en facultats de química, física, informàtica i algunes de matemàtiques, tot i que, amb massa freqüència, aquestes aplicacions se solen oblidar.

«LA DEFINICIÓ DE LA DIVINA PROPORCIÓ SORGEIX COM EL RESULTAT DE DIVIDIR UN SEGMENT DE LONGITUD ARBITRÀRIA x EN DUES PARTS, UNA DE LONGITUD MAJOR b I UNA ALTRA DE LONGITUD x–b, DE MANERA QUE x/b=b/x-b.»

Com a conseqüència d'aquestes ratlles es podria deduir que els problemes de matemàtiques que són importants, és a dir, els naturals, els que hi van existir des de sempre, els que justifiquen que es faça servir la paraula teorema, són problemes per als quals s'ha trobat solució definitiva mitjançant teoremes algebraics. Que haja conclós aquest article destacant la rellevància de la teoria de grups té com a justificació el meu interès personal en la matèria. Per això i per la limitació d'espai, no he tractat altres aspectes tan decisius i importants en àlgebra com la teoria de grups, com ara la geometria algebraica, amb la seua resolució de singularitats i les seues implicacions tant en àlgebra commutativa com en la teoria de nombres; o la teoria de nombres, amb el seu teorema de Shafarevich, o el famós teorema de Fermat. Això no obstant, problemes de tanta transcendència com els esmentats apareixen en tots els camps de les matemàtiques. Des d'ací vull manifestar el meu respecte per tots i pels qui gaudeixen treballant amb il·lusió en tots els seus aspectes, molt especialment pels qui han sabut i els qui saben, amb els seus coneixements i el seu exemple, dirigir i convèncer d'altres perquè seguesquen aquest camí.

*Facultat de Matemàtiques. Universitat de València

UN PROBLEMA D'INTERPOLACIÓ D'IMATGES

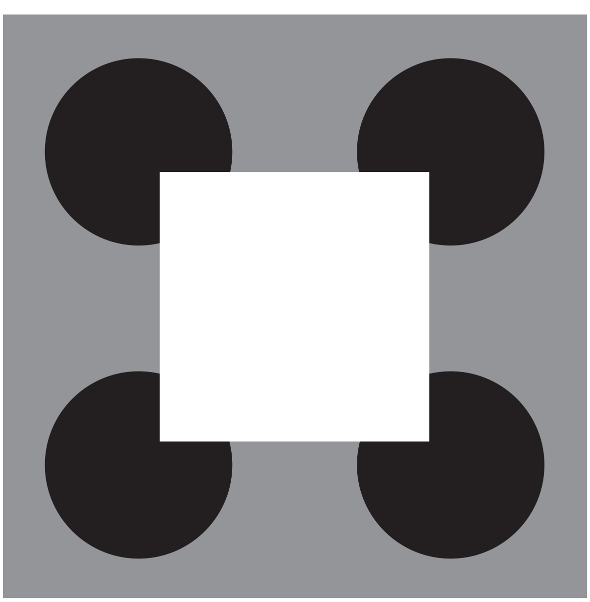
Vicent Caselles*

A problem of image interpolation. We discuss the problem of perceptual amodal completion as an interpolation problem. A proposed solution is minimising the energy functional associated to the geometric configuration of image data.

Tots sabem que Stalin feia desaparèixer els seus enemics polítics dels documents escrits i de les fotografies. Avui en dia hagués tingut al seu abast la tecnologia digital. Sense entrar en propostes tan truculentes, el problema del que voldríem parlar és fàcil de descriure. Suposem que en una fotografia o imatge hem perdut o destruït una part (vegeu les Figures 2 i 3). Com podem reconstruir la part que manca a partir de la informació exterior a la taca de manera que tinguem la sensació d'estar davant d'una imatge natural, sense cap alteració aparent? En certa mesura, hem d'imitar l'art del restaurador. Ja podem imaginar les aplicacions possibles, entre elles la restauració de pel·lícules antigues.

Podem plantejar aquest problema com un problema d'interpolació dintre de la taca (la regió mancant), coneguda la informació exterior. En el contexte més general de la psico-física, aquest problema està lligat al procès de completació amodal, el qual és un procès fonamental de la percepció visual. En una escena natural, rara vegada un objecte és completament visible, normalment està parcialment ocult, ja que sempre hi ha altres objectes devant que impedeixen la seva visió completa. Malgrat això, el nostre sistema visual es capaç, sota certes condicions geomètriques, de reconstruir o imaginar la part oculta perllongant artificialment els contorns dels objectes: és el que s'anomena completació amodal. Aquest procès l'hem il·lustrat a la Figura 1, on el nostre sistema visual reconstrueix una bola que, a priori, no existeix.

La capacitat del sistema visual per reconstruir la informació que manca ha estat estudiada dintre del camp de la psico-física i de la psicologia de la Gestalt, en particular per Gaetano Kanizsa. És important destacar que tant per Kanizsa com per l'escola de psicologia de la Gestalt aquesta reconstrucció visual es fa de manera independent de tot coneixement a priori sobre el contingut semàntic de la imatge. Està basada única-



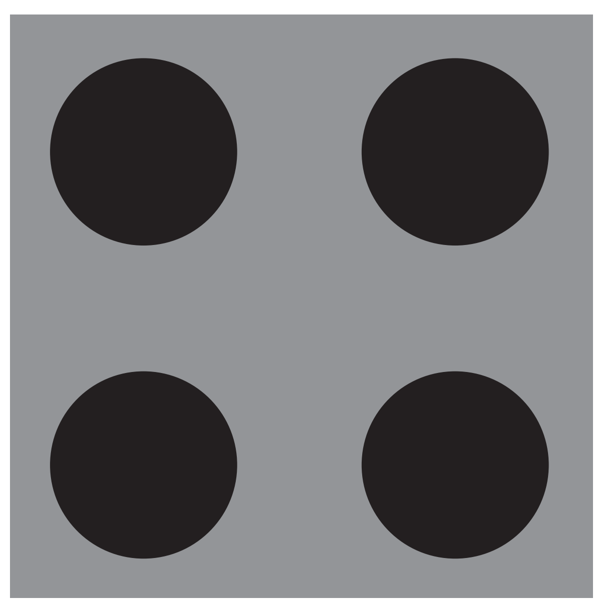


Figura 2: Com podem reconstruir la part que manca a partir de la informació exterior a la taca de manera que tinguem la sensació d'estar davant d'una imatge natural, sense cap alteració aparent?

ment en les estructures geomètriques del camp d'intensitat lluminosa (més, eventualment, el color) que dóna lloc a la imatge: és a dir, en les formes presents a la imatge.

Els psicòlegs de la Gestalt han demostrat experimentalment el paper de certs principis organitzadors de la percepció a l'hora de constituir la percepció de les formes geomètriques, en particular, la forta influència dels indexos d'oclusió tals com la presència en la frontera de l'oclusió d'elements localitzats anomenats Juncions en T. Les Juncions en T són punts de la frontera d'oclusió on la configuració dels contorns dels objectes és semblant a una T (vegeu els punts de la Figura 1 on conflueixen el blanc, el gris i el negre). Els investigadors de la percepció han mostrat com la presència de juncions en T permet al nostre sistema visual la reconstrucció de la part mancant. Es tracta de crear artificialment contorns que unèixen les juncions en T. Aquí intervé un altre dels principis organitzadors de la psicologia de la Gestalt: el principi de la bona continuació. Segons aquest principi, els contorns o línies artificials que uneixen les juncions en T han de ser continuació dels contorns existents a l'exterior de la taca, perllongant-se de manera regular, sense canvi de direcció. Aquest principi de bona continuació admet una interpretació matemàtica variacional, és a dir, la solució adoptada minimitza una certa energia associada a la configuració geomètrica proposada. A la dreta de la Figura 2 veiem la solució obtinguda corresponent a la part esquerra de la Figura, en consonància amb els principis que hem explicat. A la Figures 3 (original) i 4 (reconstruïda) mostrem un exemple d'aplicació d'aquesta metodologia a un problema, diguem-ne, més pràctic.

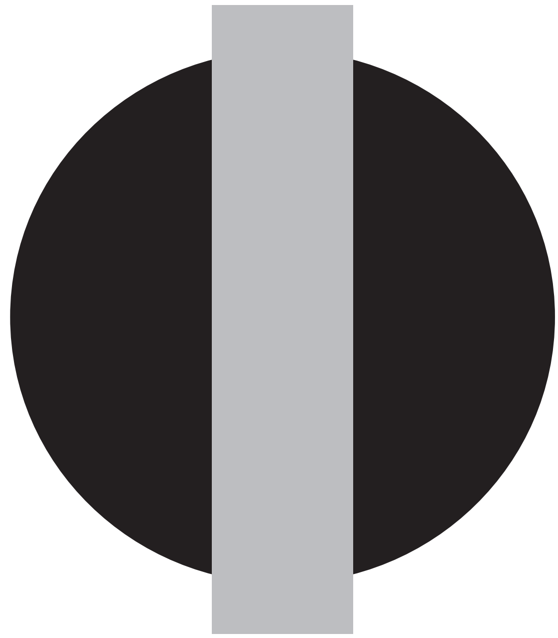


Figura 1: El nostre sistema visual reconstrueix una bola que, a priori, no existeix

Aquesta filosofia ha estat duta a la pràctica per diversos grups de recerca i és inspiradora d'una filosofia a l'hora de plantejar els problemes dintre de l'àrea de processament d'imatges i visió per ordinador: incorporar els principis organitzadors de la percepció per a formular matemàticament els problemes de processament d'imatges i dissenyar algoritmes el més universals possibles per a cada problema específic.

*Departament de Tecnologia. Universitat Pompeu Fabra

Figures 3 i 4: Exemple d'aplicació de la metodologia d'interpolació d'imatges a un problema pràctic

MÈTODES ESTADÍSTICS CONTEMPORANIS EN LA INVESTIGACIÓ CIENTÍFICA: ANÀLISI BAYESIÀ

José M. Bernardo*

Contemporary Statistical Methods in Scientific Research: Bayesian Analysis. An extremely powerful paradigm to analyse the results of scientific experimentation, which is firmly based on axiomatic foundations, is gradually substituting the traditional recipe-based techniques which have been dominant in statistics for most of this century. The new paradigm, usually referred to as the Bayesian methodology, uses a probability concept which closely matches that used in ordinary language, directly solves the more relevant scientific questions on data analysis, and may be applied to complex, richly structured problems, fairly inaccessible to traditional statistical methods.

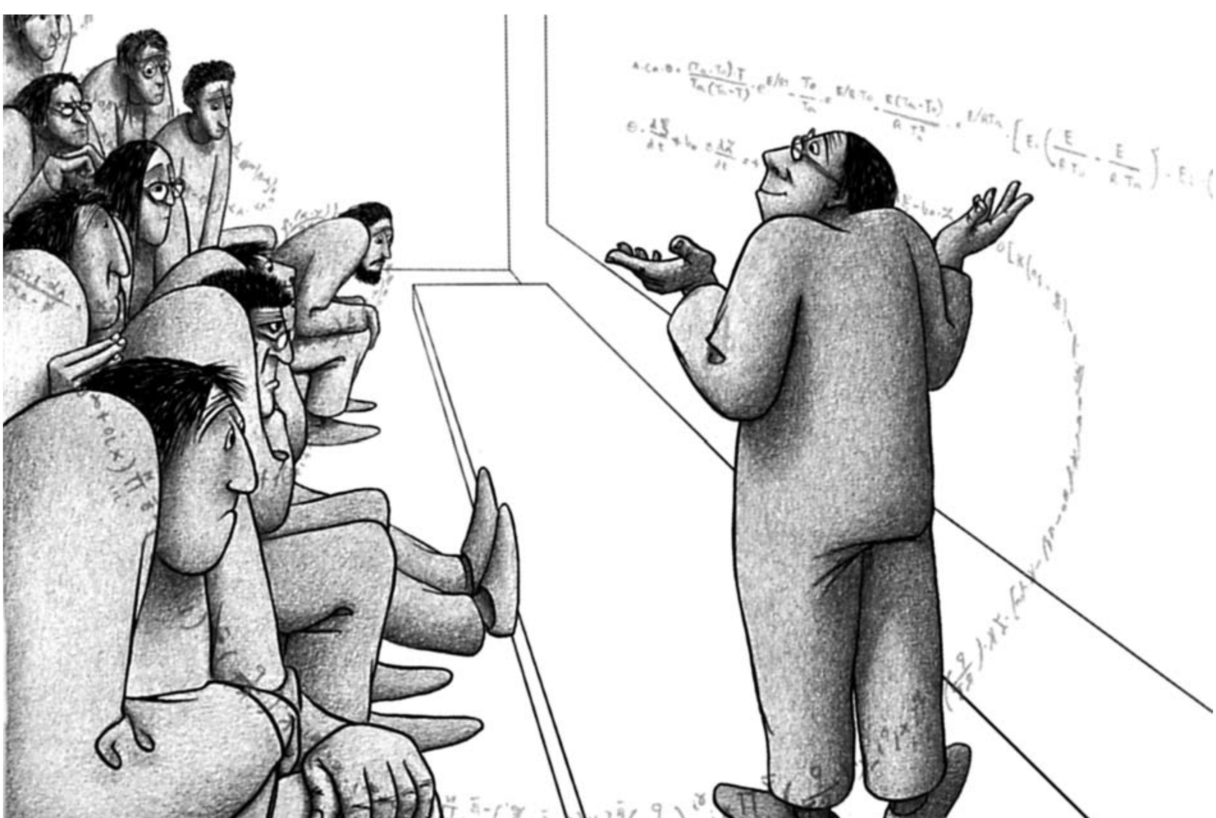
Els metodes estadístics convencionals han estat durant generacions una font d'insatisfacció per als qui, interessats en una anàlisi adequada dels resultats experimentals, no se senten especialment atrets per una col·lecció de receptes mancades d'una estructura lògica que les relacione. Òbviament, científics o enginyers troben útils formularis que els resumesquen els procediments d'ús més freqüent, però, entrenats en un raonament lògic, exigeixen que se'ls oferesca una justificació convincent. Convencionalment, la formació en probabilitat i estadística dóna començament al batxillerat amb exemples elementals de probabilitat, que certament resulten raonables, però que semblen limitar-se a problemes relacionats amb els jocs d'atzar. Naturalment, els alumnes amb aspiracions a una feina científica o tècnica es mostren interessats per aprendre a analitzar dades experimentals; tanmateix, molts se senten decebuts quan, ja a la universitat, se'ls comença a parlar d'inferència estadística. En efecte, encara que els procediments que se'ls exposen semblen assenyats per separat, no se'ls posa de manifest (perquè no existeix) cap principi bàsic que els estructure. El que rarament s'explica als estudiants és que existeix un paradigma alternatiu amb sòlids fonaments lògics, la metodologia bayesiana, que únicament requereix les matemàtiques d'una teoria general de la probabilitat perfectament justificada, i el concepte de probabilitat que correspon a l'ús convencional d'aquesta paraula en el llenguatge quotidià.

«ELS PROCEEDINGS DEL DARRER CONGRÉS MUNDIAL D'ESTADÍSTICA BAYESIANA, CELEBRAT FA UNS MESOS SOTA EL PATROCINI DE LA UNIVERSITAT DE VALÈNCIA, PROPORCIONEN UNA VISIÓ DE CONJUNT TANT SOBRE LES NOVES LÍNIES D'INVESTIGACIÓ COM SOBRE LES NOVES APLICACIONS DEL PARADIGMA BAYESIÀ.»

L'element més característic del paradigma bayesià és precisament el seu concepte general de probabilitat com a mesura d'incertesa. Per exemple, l'observació dels resultats de proves d'immunodeficiència realitzades a 200 persones triades a l'atzar els resultats dels quals han estat negatius per a tots, permet afirmar que la proporció de persones seropositives en la població és probablement menor del 0,5%; més precisament, que la probabilitat que aquesta proporció siga menor del 0,5% és 0,84. Observeu que el concepte de probabilitat utilitzat en aquesta frase és el d'una mesura d'incertesa (basada en els resultats experimentals), sobre l'ocurrència d'un determinat succés, el que no requereix l'existència de simetries (com en la probabilitat clàssica, basada en la relació de casos favorables a casos possibles), ni tampoc requereix l'existència de possibles repeticions (com en l'estadística convencional, basada en freqüències relatives).

La teoria de la probabilitat permet garantir que si les dades estan constituïdes per un conjunt d'observacions homogènies, llavors existeix un model probabilístic que descriu la relació entre les dades obtingudes i la naturalesa del procés estudiat, i existeix una distribució inicial de probabilitat que descriu la informació de què es disposa sobre la naturalesa del procés. En problemes d'investigació complexos, la determinació d'un model probabilístic adequat pot ser un problema difícil que requeresca la col·laboració entre científics que coneguen bé les característiques del problema i matemàtics capaços de formalitzar-les adequadament; això no obstant, en problemes elementals, el model probabilístic pot ser directament deduït del context experimental. És important subratllar que l'elecció d'un model probabilístic adequat és una condició indispensable per a la validesa de l'anàlisi estadística, qualsevol que siga el paradigma des del qual s'analitzen les dades. La distribució inicial ha de descriure la informació de què inicialment es dispose sobre els possibles estats de la naturalesa. Sovint, però, no es disposa d'informació inicial rellevant, o la informació inicial de què es disposa és de caire subjectiu, i es desitja limitar l'estudi a les conclusions objectives que puguen ser deduïdes basant-se exclusivament en el model probabilístic acceptat i en les dades experimentals efectivament obtingudes; en aquest cas, és necessari recórrer a l'anàlisi de referència, que fa servir la teoria de la informació per a determinar la forma matemàtica d'aquella distribució inicial que descriu una situació en la qual no es disposa d'informació inicial sobre el vertader valor de l'estat de la naturalesa.

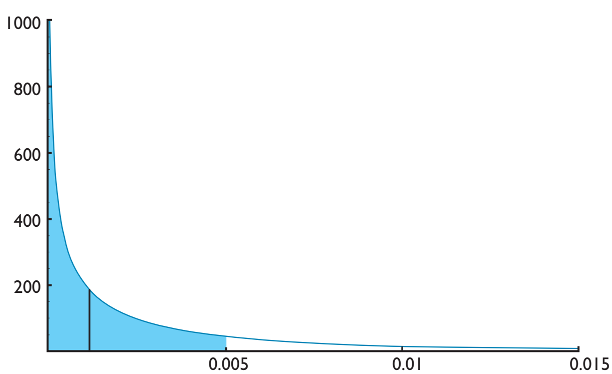
El teorema de Bayes, un dels resultats bàsics de la teoria de la probabilitat, permet quantificar el procés d'inferència i establir la relació existent entre la distribució inicial, que descriu la incertesa de la qual es parteix sobre el vertader valor de l'estat de la naturalesa, i la distribució final que descriu la incertesa residual sobre aquest valor, una vegada observades i analitzades les dades experimentals. La distribució final resumeix totes les conclusions (necessàriament probabilístiques) que poden ser deduïdes de les dades


Il·lustració: Riu Serra

observades sobre el vertader valor de l'estat de la naturalesa. Intuïtivament, el teorema de Bayes afirma que la informació final de què es disposa sobre el vertader estat de la naturalesa és la suma de la informació de què inicialment es parteix (que pot, ser nul·la) més la informació que proporcionen les dades; el seu ús sistemàtic justifica el nom de metodologia bayesiana amb què generalment es coneix aquest paradigma.

Quan l'estat de la naturalesa és una magnitud contínua, la seua distribució final es descriu mitjançant una densitat de probabilitat, és a dir, una funció no negativa que tanca una àrea unitat, de manera que la probabilitat que el vertader estat de la naturalesa se situe entre dos límits qualsevulla és l'àrea tancada per la funció de densitat entre aquests límits.

Per exemple, en l'anàlisi de la proporció θ de persones seropositives en una població, basant-se en els resultats obtinguts amb una mostra aleatòria de n persones entre les quals se n'han observat r de seropositives, la distribució final de θ corresponent a una situació en la qual no se suposa cap informació inicial sobre θ resulta ser una distribució Beta de paràmetres $r+\frac{1}{2}$ i $n-r+\frac{1}{2}$ la funció de densitat de probabilitat del qual es reprodueix en la figura per al cas particular $n = 100$ i $r = 0$. Aquesta funció conté tota la informació



Conclusions sobre la proporció q de seropositus en la població basades en proves d'immunodeficiència realitzades a 200 persones elegides a l'atzar, que han resultat totes negatives

que les dades proporcionen sobre el valor de θ; en particular, com es pot observar en la figura, l'observació de 200 proves negatives permet afirmar, pràcticament amb certesa, que la proporció θ de seropositius en la població és menor de 0,015, atès que la probabilitat associada a valors majors és pràcticament zero. A més, la probabilitat que θ siga, per exemple, menor que 0,005 és 0,84 (àrea de la part ombrejada), i la probabilitat que θ siga menor que 0,0011 (valor assenyalat per una línia) resulta ser 0,5. Conseqüentment, una descripció aproximada, de les conclusions sobre el valor de θ que el paradigma bayesià permet extraure de les dades (descrites en la seua totalitat per la funció de densitat de probabilitat reproduïda en la figura), és que la proporció de persones seropositives és certament menor de l'1,5%, probablement menor del 0,5%, i que és igual de probable que siga major o que siga menor del 0,11%

En síntesi, la metodologia bayesiana és una conseqüència matemàtica de la teoria de la probabilitat i per tant (a diferència de l'estadística convencional) és lògicament consistent. La solució bayesiana a un problema d'inferència és una distribució de probabilitat, la distribució final de la magnitud objecte d'estudi (no un simple estimador o un interval de confiança), que en el cas continu es descriu mitjançant una funció de densitat de probabilitat, la interpretació gràfica de la qual és intuïtivament immediata. Quan no es disposa d'informació inicial objectiva, s'utilitza la distribució final de referència, que solament depèn del model probabilístic acceptat i de les dades efectivament observades.

Una descripció aproximada de la solució descrita per la distribució final és la proporcionada per les probabilitat associades a un conjunt d'intervals apropiadament escollits. La idea recorda la noció convencional d'interval de confiança, però és conceptualment molt diferent: un interval de confiança freqüentista solament permet afirmar que si es repetira el mateix procediment amb moltes mostres, els intervals corresponents contindrien el vertader valor de la magnitud estudiada en una determinada proporció dels casos. Òbviament, però, aquesta no és la qüestió rellevant per al científic, interessat en canvi en la probabilitat que, en aquest cas concret, el vertader valor de la magnitud estudiada estiga contingut en un determinat interval, probabilitat que el paradigma bayesià permet deduir immediatament a partir de la distribució final.

La metodologia bayesiana permet abordar amb èxit problemes d'estructura complexa, com ara els que presenten els models jeràrquics, totalment inaccessibles per a la metodologia estadística convencional; els *Proceedings* del darrer congrés mundial d'estadística bayesiana, celebrat fa uns mesos sota el patrocini de la Universitat de València (Bernardo *et al.*, 1999, *Bayesian Statistics 6,* Oxford University Press), proporcionen una visió de conjunt tant sobre les noves línies d'investigació com sobre les noves aplicacions del paradigma bayesià.

*Facultat de Matemàtiques. Universitat de València

LES MATEMÀTIQUES DELS MERCATS FINANCERS

David Nualart*

Mathematics in the Financial Market. We present an introduction to the stochastic models used in financial markets and, in particular, we discuss the Black-Scholes formula for option pricing and Merton's result on portfolio optimisation.

Models aleatoris basats en el moviment brownià i en el càlcul estocàstic d'Itô s'utilitzen usualment per tal de descriure l'evolució dels preus a la borsa.

Durant els darrers 25 anys s'ha produït un creixement espectacular de l'activitat dels mercats financers. L'enorme quantitat de dades que generen aquests mercats, així com la complexitat i varietat dels productes financers que s'hi negocien, han donat lloc a l'aparició de models i tècniques matemàtiques específics.

LES OPCIONS DE COMPRA

Els preus de les accions tenen un comportament molt irregular amb un gran nombre d'oscil·lacions. Per tal de cobrir el risc que comporta la manca d'estabilitat dels preus de les accions, s'han creat els anomenats *derivats*, que són contractes o instruments financers que depenen del valor d'una acció o actiu subjacent. Els derivats més simples són les anomenades *opcions de compra (stock options)*. Recentment, les opcions de compra sobre accions de Telefònica han donat guanys astronòmics als directius d'aquesta companyia i per això han estat motiu de debat públic. Malgrat aquest fet, les opcions de compra són instruments financers força útils.

Històricament els mercats de derivats o mercats financers secundaris apareixen de forma organitzada als Estats Units a principis dels anys 70. El 26 d'abril de l'any 1973 s'obria el primer mercat d'opcions a Chicago i es negocien 911 opcions de compra. Un any més tard es negociaven 20.000 contractes diaris i aquesta xifra va pujar a 700.000 l'any 1987. El mercat espanyol de derivats va començar a operar l'any 1990 i té dues seus, una a Barcelona i l'altra a Madrid.

Una opció de compra és un contracte que dóna al seu propietari el dret (però no l'obligació) d'adquirir accions a un preu K, fixat en el contracte, en un instant futur T. Si al temps T el preu d'una acció al mercat S_T és superior a K, el propietari del contracte comprarà accions al preu K i les vendrà al mercat fent un benefici igual a $S_T - K$, per cada acció. Si el preu del mercat S_T és inferior a K, el propietari del contracte no tindrà interès a comprar accions a un preu superior al del mercat. D'aquesta manera, el propietari d'una opció de compra farà un benefici per acció igual a $\max(S_T - K, 0)$. Es planteja aleshores el problema següent:

Quina quantitat hauríem de pagar en l'instant inicial per tal de posseir aquest contracte?, és a dir, quin és el valor present d'una determinada opció de compra?

La determinació del valor de les opcions es pot fer si es disposa d'un model matemàtic adequat per la corba de preus S_t de les accions al llarg del temps.

EL MODEL DE BLACK-SCHOLES

El primer intent de donar un model matemàtic per descriure l'evolució dels preus a la borsa el va donar Louis Bachelier a la seva tesi *Théorie de la Spéculation*, l'any 1900. Bachelier va considerar que el preu S_t d'un actiu financer en un instant t és una variable aleatòria i per tant $\{S_t, t \geq 0\}$ serà una família de variables aleatòries o procés estocàstic. D'aquesta manera la corba de preus $t \rightarrow S_t$ s'interpreta com la gràfica dels valors observats d'una família de variables aleatòries.

El caràcter irregular de la corba de preus $t \rightarrow S_t$ és semblant al caràcter irregular de l'anomenat procés de moviment brownià que és el moviment de les partícules de pol·len en suspensió observat pel botànic Robert Brown l'any 1828. En Norbert Wiener va establir un model matemàtic per al moviment brownià segons el qual si B_t representa la posició de la partícula a l'instant t en una dimensió, els increments $\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t$ són variables aleatòries normals, centrades, independents, i amb variància proporcional a Δt. Aquests increments corresponen als impulsos deguts als xocs de les partícules de pol·len amb les molècules del líquid.

Tenint en compte la similitud de les corbes de preus amb el movimient brownià, Fisher Black i Myron Scholes van introduir un model per a la corba de preus imposant que els rendiments o increments relatius del preu $\Delta S_t / S_t$ fossin del mateix tipus que els increments del moviment brownià, és a dir, variables aleatòries independents i amb lleis normals $N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$, de mitjana i variància proporcionals a Δt. El paràmetre μ representa la tendència a créixer, i el paràmetre σ s'anomena la *volatilitat* i mesura la desviació típica dels rendiments. En termes dels increments del moviment brownià podem escriure $\Delta S_t / S_t = \mu\Delta t + \sigma\Delta B_t$. Si substituïm els increments per diferencials, obtenim

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t),$$

que és un exemple d'una equació diferencial estocàstica. Als anys 40 en Kiyosi Itô va desenvolupar una teoria per tal de donar sentit a les equacions d'aquest tipus: *El càlcul estocàstic*. En forma integrada i utilitzant el càlcul estocàstic d'Itô, el model de Black-Scholes per a la corba de preus s'escriuria:

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t),$$

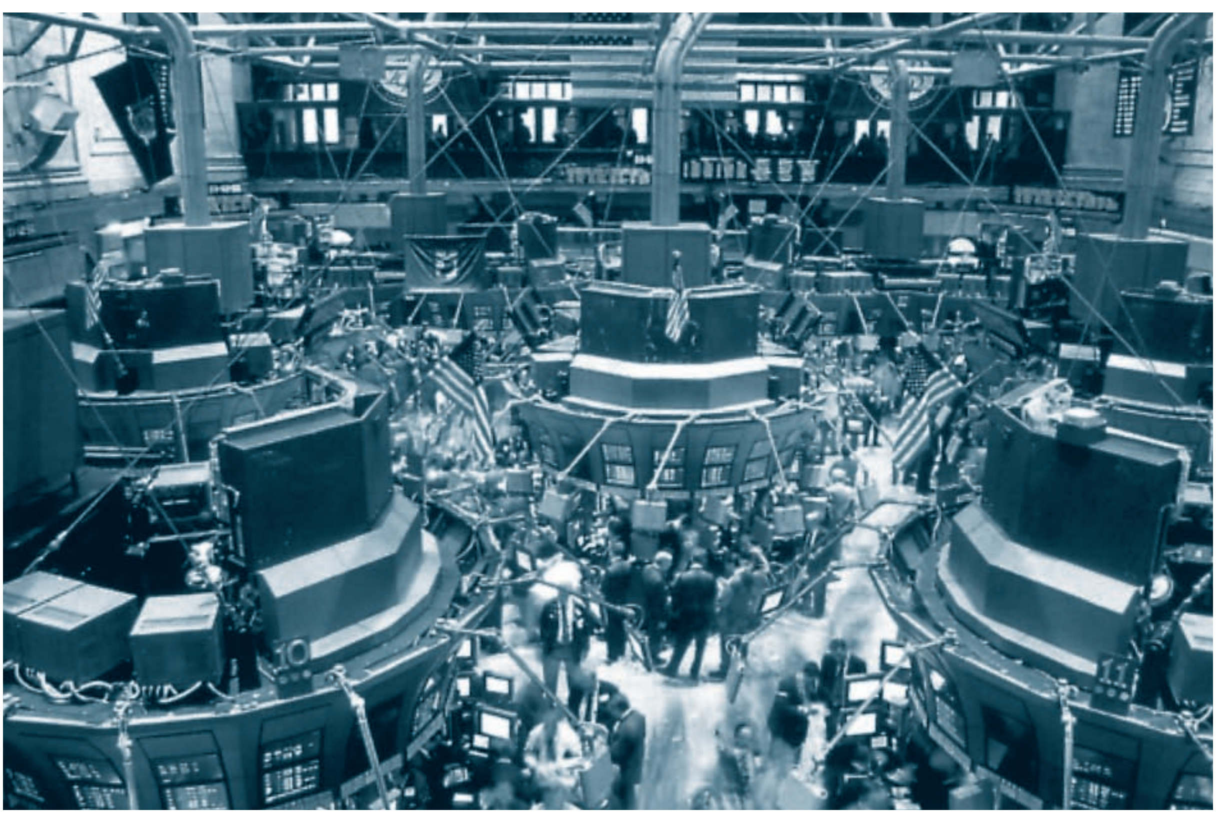
on S_0 és el preu inicial. Aquest model s'anomena el moviment brownià geomètric. Observem que l'esperança matemàtica de S_t és igual a $S_0 e^{\mu t}$, ja que B_t és una variable aleatòria amb llei normal centrada de variància t.

El model de Black-Scholes per a la corba de preus d'una acció permet calcular el valor d'una opció de compra. Suposem que hi ha un tipus d'interès fix r, és a dir, un capital inicial C_0 es transforma en $C_0 e^{rt}$ en l'instant t. Aleshores, el valor d'una opció de compra de venciment T, i preu d'exercici K, sobre un actiu financer amb preu inicial S_0 es calcula mitjançant la fórmula:

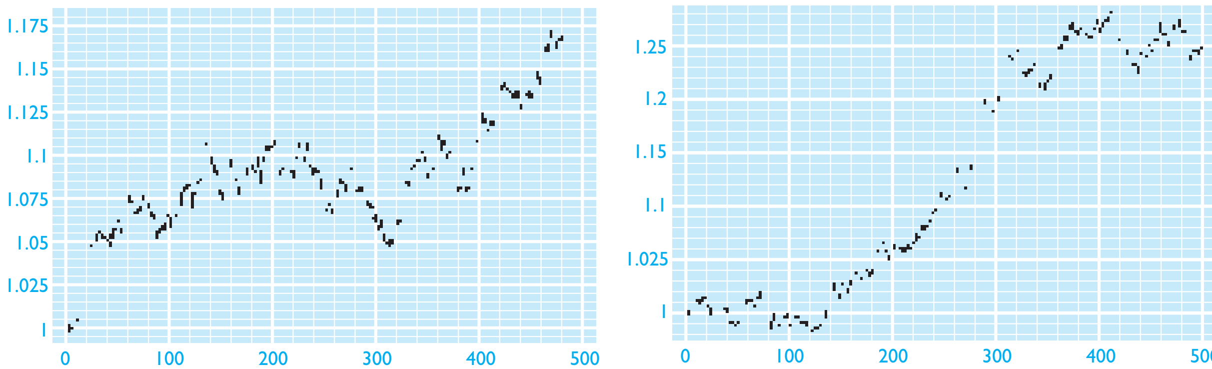
$$V_T = S_0 \Phi(d) - K e^{-rT} \Phi(d - \sigma\sqrt{T}),$$

on Φ és la funció de distribució de la llei normal $N(0,1)$ i d és una funció dels paràmetres S_0, K, T, r i s:

$$\delta = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} (\log \frac{S_0}{K} + T(\mathrm{r} + \frac{\sigma^2}{2})).$$



Durant els darrers 25 anys s'ha produït un creixement espectacular de l'activitat dels mercats financers



Simulació del moviment brownià geomètric

Aquesta és l'anomenada fórmula de Black-Scholes. Per tal de deduir aquesta fórmula només cal imposar que el valor de l'opció és igual a l'esperança matemàtica del benefici actualitzat $e^{-rT}\max(S_T-K,0)$ respecte una probabilitat Q que s'anomena probabilitat neutra. Sota aquesta llei de probabilitat el preu S_t segueix un model de Black-Scholes de tendència m igual al tipus d'interès r.

Tots els paràmetres en la fórmula anterior són coneguts excepte la volatilitat que usualment es calcula implícitament a partir de la cotització en borsa de l'opció i de la fórmula de Black-Scholes.

OPTIMITZACIÓ DE LA CARTERA DE VALORS

Un altre problema important en matemàtiques financeres és el de l'optimització de la inversió. En el cas d'un mercat amb un sol actiu financer de preu S_t, l'inversor pot posar a cada instant t una fracció γ_t del seu capital C_t en accions i la resta al tipus d'interès r. Això és un exemple molt simple d'una cartera de valors. Es tracta, aleshores, de determinar γ_t de manera que l'esperança matemàtica $E(h(C_T))$ sigui màxima, on h és una funció estrictament còncava anomenada funció d'utilitat. Una de les funcions d'utilitat que s'acostuma a prendre és $h(x)=x^\alpha$, on a és un paràmetre entre 0 i 1. L'any 1973 en Robert Merton va donar la solució a aquest problema d'optimització, pel model de Black-Scholes:

$$\gamma_t = \frac{\mu - r}{(1-\alpha)\sigma^2}$$

Observem que γ_t és constant, proporcional a la diferència $\mu - r$ (se suposa $\mu > r$) i inversament proporcional a la volatilitat.

Aquest resultat es pot generalitzar a un context més realista on hi hagi més d'una acció, i es tinguin en compte les despeses originades per les transaccions i l'existència d'un procés de consum.

PROBABILITATS I FINANCES

Els treballs fonamentals de Black i Scholes i de Merton van aparèixer l'any 1973 quan precisament es va obrir el mercat de Chicago. Aquests treballs van revolucionar els mètodes utilitzats per a l'avaluació i cobertura de derivats i van obrir les portes a la utilització de mètodes estocàstics en finances.

Els dos problemes que hem plantejat representen una petita mostra de la varietat de qüestions que es tracten en les matemàtiques financeres. Cal indicar que hi ha una correspondència força estreta entre nocions d'economia financera i del càlcul de probabilitats. Per exemple, la noció d'absència d'oportunitats d'arbitratge en un mercat financer es correspon amb la propietat de martingala dels preus actualitzats respecte a una certa probabilitat. Una altra correspondència d'aquest tipus és la relació entre el problema de la cobertura d'un cert benefici en un instant futur i la representació d'una variable aleatòria com una integral estocàstica respecte el moviment brownià. Aquesta relació entre probabilitats i finances s'ha manifestat molt fructífera per a ambdues àrees i ha donat lloc a una línia d'investigació molt activa.

«AQUESTA RELACIÓ ENTRE PROBABILITATS I FINANCES S'HA MANIFESTAT MOLT FRUCTÍFERA PER A AMBDUES ÀREES I HA DONAT LLOC A UNA LÍNIA D'INVESTIGACIÓ MOLT ACTIVA.»

* Facultat de Matemàtiques. Universitat de Barcelona