FONS I FORMA

MATEMÀTIQUES EN LA CREACIÓ ARTÍSTICA ACTUAL

Coordinat per Olga Gil Medrano*

Al llarg de la història i en totes les cultures, l'art i les matemàtiques han estat profundament relacionats. Això no té res d'estrany perquè beuen de les mateixes fonts i prenen de la naturalesa els elements de què es nodreix la seua inspiració. El tractament d'aquests elements està en ambdós casos subjecte als vaivens entre allò concret i allò abstracte, la idealització i el realisme, que les distintes tendències van marcant.

És cert que els esforços dels matemàtics pretenen prioritàriament comprendre i modelitzar la naturalesa i que els dels artistes van més dirigits a estimular estats d'ànim, però no pot negar-se que una obra d'art amaga quasi sempre una gran dosi de tècnica i que els avenços matemàtics deuen molt a la intuïció, inspiració i preocupació estètica.

En l'actualitat aquesta relació viu un dels seus bons moments. Com no podia ser d'una altra forma, i encara a risc de destruir l'idil·li, artistes i matemàtics últimament fixen la seua atenció en aquesta relació amb l'objectiu d'entendre-la millor i refermar-la.

La influència de les matemàtiques en la forma d'una obra d'art, en particular quan de les arts plàstiques es tracta, sol ser fàcil de detectar. Per aquesta raó hem centrat ací l'atenció en l'obra d'alguns artistes contemporanis que utilitzen conceptes matemàtics en el fons: és a dir, en el procés de creació. Les matemàtiques són en aquest cas font d'inspiració i no sols instrument per a la construcció de l'obra. Aquest ha estat el fil conductor de tots els articles.

*Departament de Geometria i Topologia, Universitat de València

En algunes de les obres de l'escultor Andreu Alfaro l'efecte estètic s'aconsegueix amb un grapat de barres metàl·liques, col·locades de tal manera que, vistes en conjunt, suggereixen una superfície suaument corbada. Aquestes superfícies que es poden construir com a unió de línies rectes es coneixen com a superfícies reglades, i han despertat, des de fa molt, l'interès dels matemàtics i dels arquitectes, perquè una construcció relativament senzilla permet d'obtenir una gran varietat de formes geomètriques.
En l'escultura de la portada i d'aquesta doble pàgina, situada en un dels extrems de l'avinguda d'Aragó, a València, Alfaro ha construït la superfície d'un paraboloide hiperbòlic, també coneguda com a sella de muntar.
(Fotografies de la portada i d'aquesta pàgina: Miguel Lorenzo.)

UN MÓN A LA BUTXACA: LA GEOMETRIA PLEGABLE DE SANTIAGO CALATRAVA

Olga Gil Medrano*

A World in your Pocket: Santiago Calatrava's folding Geometry. In Santiago Calatrava's work the mathematical ideas do not just appear in the computations needed to carry out the projects. These ideas are the foundation of his creative process, greatly influenced by his doctoral thesis, in which he explores the geometric principles applied to constructions with folding structures.

Fa ja alguns anys, els estudiants d'un dels meus cursos de geometria es queixaven envejant la sort d'aquells que seguien un curs de botànica i que rebien la classe a l'aire lliure: en efecte, un petit grup deambulava mentre atenia les explicacions que el seu professor anava donant sobre les plantes que es troben al voltant dels edificis. Ells, mentrestant, entre fórmula i fórmula, només tenien ocasió d'entreveure el seu objecte d'estudi a través dels dibuixos que, amb millor voluntat que art, jo m'esforçava a traçar a la pissarra i d'alguna enllaunada i freda imatge d'ordinador. Davant aquella queixa, se'm va acudir que nosaltres també podíem eixir al camp: podíem anar d'excursió a la Ciutat de les Arts i de les Ciències. Entrant al museu podíem interessar-nos per la relació entre el pèndol de Foucault i la teoria del transport paral·lel en superfícies, observar que la naturalesa té una certa inclinació a enroscar-se, a compondre espirals, hèlixs i entretenir-nos amb alguns jocs. Però no era aquest el nostre veritable objectiu; a la Ciutat de les Arts i de les Ciències hi ha moltes matemàtiques, però no precisament dins del museu. Aquí el continent supera amb escreix el contingut: el veritable bosc geomètric són les construccions, i en aquell moment encara era més palpable, perquè molts dels edificis mostraven els seus esquelets.

«AQUÍ EL CONTINENT SUPERA AMB ESCREIX EL CONTINGUT: EL VERITABLE BOSC GEOMÈTRIC SÓN LES CONSTRUCCIONS»

Sembla innecessari recordar aquí que, darrere d'una obra d'arquitectura o d'enginyeria de tanta envergadura, per força ha d'haver-hi una quantitat impressionant de càlculs matemàtics i de consideracions físiques que hagen permès la realització tècnica, la consecució de l'aparent miracle que fa que uns esbossos, que en ocasions semblen trets d'un somni, o almenys d'un somieig d'artista, prenguen cos i se sostinguen.

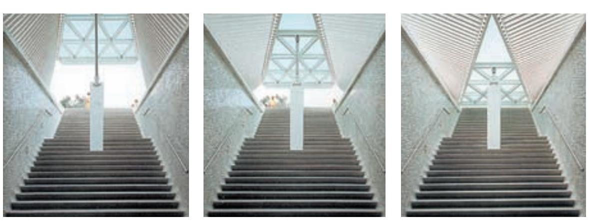
© Paolo Rosselli

La seqüència de plegatge d'una estructura inclou el que es coneix com a moviments rígids, que són combinacions de rotacions i translacions. Procés de plegatge de les portes d'accés a la estació del metro de l'Albereda a València des de l'exterior.

El que ja no és tan fàcil de descobrir és que en la base del procés creatiu no sols es troben aquestes formes somiades, poèticament imaginades i inspirades per formes de la naturalesa, sinó que en aquest procés creatiu intervé en gran manera l'interès de Santiago Calatrava per dos problemes que li han atret des de sempre. Es tracta, d'una banda, del problema de com representar el moviment d'estructures complexes, i, d'una altra, de com representar superfícies corbades amb formes intricades. Tampoc no és fàcil endevinar que abans de llançar-se a construir aquests universos geomètrics, passara anys lliurat a la realització dels estudis teòrics i abstractes necessaris per a resoldre aquests problemes que van ser el centre de la seua tesi doctoral i ho continuen sent de les seues investigacions actuals.

UNA TESI DOCTORAL

La tesi doctoral va culminar el 1981 un llarg període de formació que havia començat a la Universitat Politècnica de València, a l'Escola d'Arquitectura de la qual va acabar els seus estudis el 1975. Aquell mateix any es va traslladar a l'ETH (Institut Federal de Tecnologia) de Zuric, on, després de finalitzar els estudis d'enginyeria, va començar la seua investigació "Sobre la plegabilitat d'estructures", recentment publicada en anglès[1]. Llegint-la es té la sensació d'haure-se-les amb un treball d'alguna de les especialitats més



© Paolo Rosselli

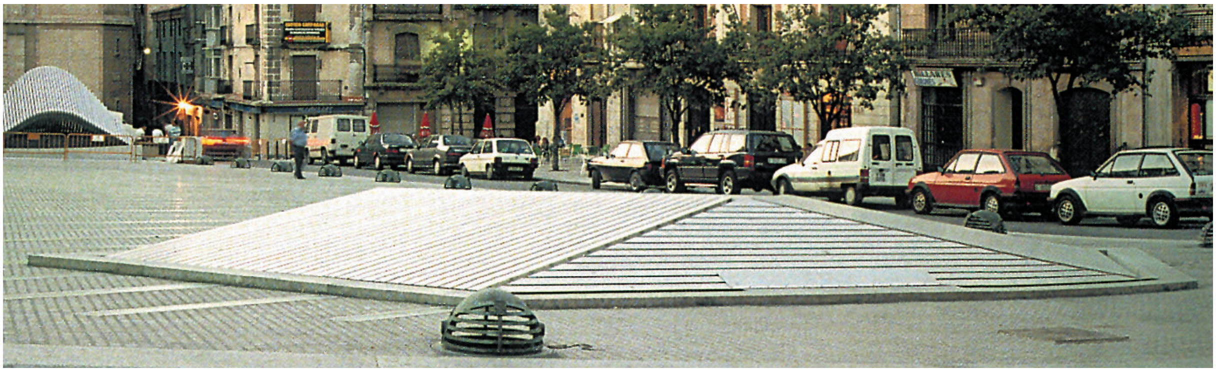
Procés de plegatge de les portes d'accés a l'estació del metro de l'Albereda a València, vist des de l'interior.

abstractes de les matemàtiques: definicions precises, abstracció dels problemes concrets, raonaments i fórmules generals adreçades a obtenir un protocol de resolució dels problemes, i estudi concret de models simples que combinats poden donar lloc a incomptables casos particulars.

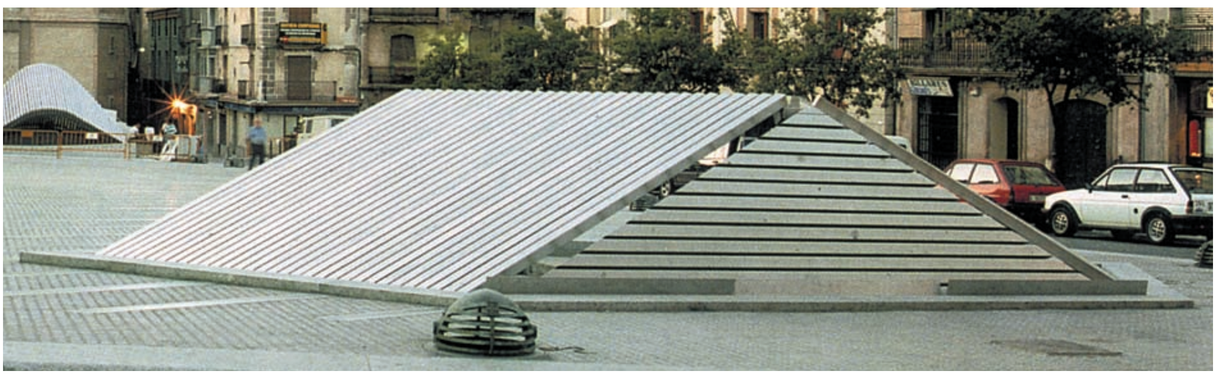
En paraules de l'autor mateix "el treball descriu els principis geomètrics que s'apliquen a la construcció d'armadures plegables", i és el seu objectiu "formular les relacions geomètriques i investigar sistemàticament tant aquelles relacions com les seues aplicacions a les estructures compostes per barres i articulacions per a obtenir estructures plegables". El treball se centra en "la investigació d'elements modulars bàsics per a la formació d'aquestes estructures. L'organització d'aquests elements en reticles plans o espacials permet la formació d'armadures que, a més de la seua funció primària de ser estructures que suporten les càrregues, estiguen dissenyades també per a plegar-se".

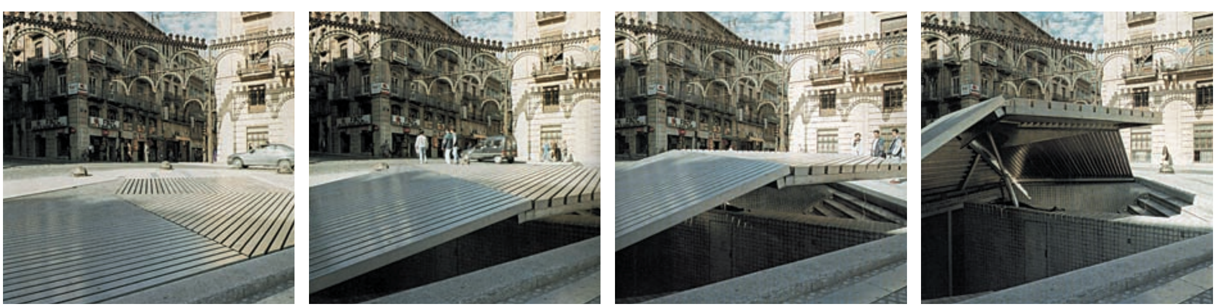
Una armadura és constituïda per barres connectades per articulacions o punts nodals. Si totes les barres són paral·leles a un únic pla, es diu que l'armadura és plana i en cas contrari es diu que és espacial. Des del punt de vista estàtic, la resistència i l'estabilitat dimensional són les propietats més importants. La resistència requereix un disseny apropiat de totes les components d'acord amb la càrrega aplicada, mentre que l'estabilitat dimensional exigeix que es conserve la forma en tot el sistema. Aquesta estabilitat es calcula amb una fórmula senzilla en termes del nombre de barres i el d'articulacions.

El plegatge, com un mitjà per a canviar la forma d'una armadura, contradiu el principi d'estabilitat en tant que aquesta és la capacitat de retenir la forma. Així una estructura plegable necessàriament ha de ser inestable. Es diu, doncs, que una armadura o estructura és plegable si és possible realitzar un moviment relatiu entre les barres, afluixant, de manera intencio-



© Paolo Rosselli





© Paolo Rosselli

En la seqüència de fotos s'explica el procés de plegatge de les portes d'accés a la sala subterrània de la plaça de l'Ajuntament d'Alcoi.

nal, les articulacions. La seqüència de plegatge inclou el que es coneix com a moviments rígids, que són combinacions de translacions i rotacions. Aquest tipus d'estructures han de dissenyar-se atenent no sols a condicionaments estàtics sinó també cinemàtics, és a dir, són en realitat mecanismes que al final de la transformació tornarien a ser estructures estables, frenant les articulacions.

És indubtable que resulta útil que una estructura arquitectònica tinga parts mòbils i formes que li permeten adaptar-se a les diferents necessitats, però la seua construcció planteja greus problemes de tipus mecànic i, per descomptat, també d'estabilitat. Un antecedent llunyà d'estudis teòrics sobre aquestes estructures plegables es pot trobar a les màquines voladores de Leonardo da Vinci, qui, al seu torn, s'inspirava en les ales de rates penades, ocells i insectes. Un exemple ja més pròxim són les estructures dissenyades per als components tecnològics que s'usen en l'equipament espacial: penseu en els panells solars i en les antenes. Han de ser fàcils de transportar i de modificar pel que fa a forma i posició per control remot, però, a més, la geometria que han de tenir una vegada desplegades és completament determinada pels objectius que han de complir.

És clar que igual com per a les estructures plegables, el primer repte és la resolució del problema geomètric de visualitzar la transformació que experimenta la forma de l'estructura des que està en la posició plegada fins que arriba a la posició desplegada. Aquest primer problema és el que ataca Calatrava en la seua tesi doctoral, i ho fa dividint-lo en dues parts. La primera és la de modelitzar les transformacions geomètriques de les estructures de suport tridimensionals

en ordenaments més compactes, i la segona és la d'articular la connexió mecànica.

Per aconseguir-ho va optar per considerar la qüestió de manera general i abstracta, un enfocament que li servira per a obtenir un gran nombre d'esquemes alternatius de manera ordenada; per això va tornar els ulls cap a les matemàtiques, en particular a la teoria de les transformacions, que tracta de les construccions geomètriques, i a l'estudi d'una família de dispositius mecànics que es coneixen com a sistemes articulats i que estan fets amb barres connectades en punts on pivoten amb certs graus de llibertat. "Així, mentre les barres de longitud fixa es mouen als límits que els permeten les restriccions de les juntes, la seua topologia continua constant encara que varie la configuració geomètrica."

> «CALATRAVA VA OPTAR PER CONSIDERAR LA QÜESTIÓ DE MANERA GENERAL I ABSTRACTA, UN ENFOCAMENT QUE LI SERVIRA PER A OBTENIR UN GRAN NOMBRE D'ESQUEMES ALTERNATIUS DE MANERA ORDENADA; PER AIXÒ VA TORNAR ELS ULLS CAP A LES MATEMÀTIQUES»

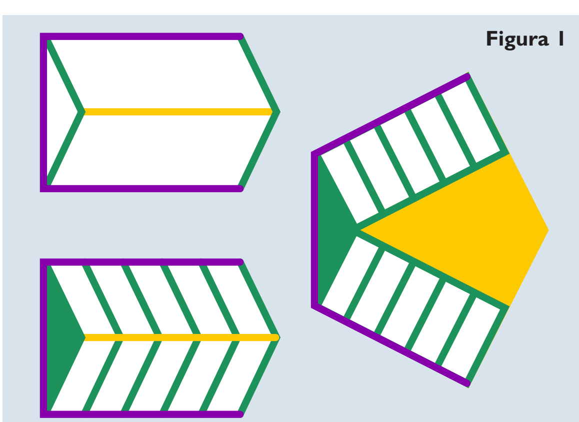
Un sistema articulat senzill és un compàs que a més permet dibuixar circumferències; altres instruments més complicats permeten dibuixar corbes més complexes: paràboles, hipèrboles, cardioides, epicicloides. Un altre exemple és el procediment descrit en l'article de J. Monterde per a la construcció del paraboloide hiperbòlic: un sistema format per dues barres i una família de làmines els extrems de la qual s'uneixen mitjançant articulacions a cada una de les barres. Els sistemes articulats de Calatrava produeixen superfícies molt més complicades que aquesta. El seu repertori d'estructures plegables es pot veure com una espècie de joc de compassos, capaços de descriure un gran nombre de superfícies corbades complexes i facilitar així el procés necessari per a dissenyar-les.

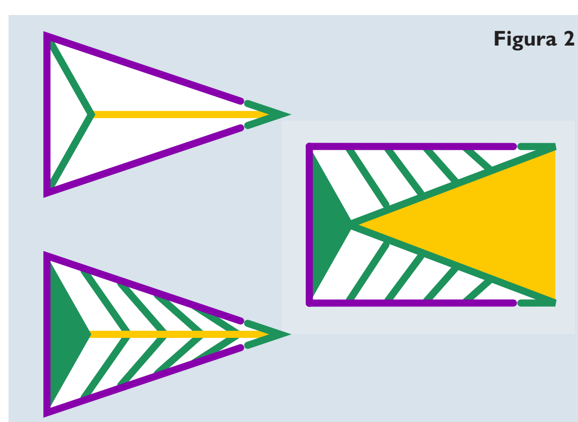
UN EXEMPLE SENZILL I PRÒXIM

El conjunt dels edificis que componen la Ciutat de les Arts i de les Ciències té en la seua arquitectura un element particular comú, a banda de les característiques materials i formals. Es tracta del fet de disposar d'una sèrie d'elements plegables bàsics diferents els uns dels altres. Aquests elements són el teló de la gran sala de música d'òpera i les portes reixades de l'edifici del planetari, entre altres.

Comencem per un exemple senzill: disposem sobre un pla horitzontal unes barres com es mostra en la figura 1. Suposem que els vèrtexs són articulats i les tres arestes de color violeta s'han fixat al pla. Si prenem el vèrtex del triangle i el fem girar 90 graus al voltant de la base, haurem produït en les barres verdes un gir igual, fins deixar-les en plans verticals, i en la barra central groga un desplaçament en què s'ha mantingut horitzontal. El resultat final és l'armadura d'una teulada a dues aigües.

En compte d'una simple armadura amb juntes articulades, podem pensar en una cosa una miqueta més elaborada: reomplint el triangle, recobrint els dos quadrilàters amb làmines paral·leles a les barres verdes articulades en ambdós extrems, i realitzant el gir del vèrtex (o de qualsevol punt de la barra groga) amb algun





Esquema del funcionament de les portes d'entrada a la sala subterrània de la plaça de l'Ajuntament d'Alcoi (figura 1) i a l'estació de metro Albereda de València (figura 2). Durant l'obertura, els segments marcats en violeta es queden fixos, les zones de color verd realitzen un gir i les grogues es desplacen horitzontalment.

El conjunt dels edificis que componen la Ciutat de les Arts i de les Ciències té en la seua arquitectura un element particular comú, a banda de les característiques materials i formals. Es tracta del fet de disposar d'una sèrie d'elements plegables bàsics diferents els uns dels altres.

© Javier Yaya

Fotografies de l'Hemisfèric: Javier Yaya

Procés de plegatge de la porta de l'Hemisfèric a la Ciutat de les Arts i de les Ciències.

mecanisme, tenim una coberta plana plegable molt semblant a la que Calatrava va utilitzar a la plaça de l'Ajuntament d'Alcoi. Hem de pensar que el segment groc pot ser substituït per una altra figura geomètrica, cosa que variaria la forma de l'objecte però no el principi de funcionament: a Alcoi és substituït per un quadrilàter que dóna a l'estructura plegada la forma d'un pentàgon com es veu en la figura 1.

Les quatre portes de l'estació de metro de l'Albereda de València es basen en el mateix principi, encara que en aquest cas l'esquema inicial correspondria al de la figura 2 en què les làmines tenen distinta longitud: una vegada obert, les parets laterals, encara que constituïdes per làmines, com abans, ja no són plans. La projecció de cada làmina en el segment groc, que és ortogonal a l'eix de rotació, és sempre la mateixa, i és clar que ha de ser l'altura del triangle que pivota. L'angle que cada làmina forma amb el seu eix de rotació ha de romandre constant en tot el procés d'obertura, alhora que varia per a cada làmina entre els quasi 90 graus de les primeres i l'angle del triangle que pivota. El segment horitzontal es pot substituir per una altra figura geomètrica, que en el cas de les portes del metro és un triangle.

Per a acabar vegem com les descriu el mateix arquitecte:

"Portes d'entrada a l'estació de metro Albereda: estructura laminar plegable de tancament pla. La raó de la creació d'aquesta porta és el desig de dissenyar una estructura mòbil que siga capaç d'adaptar-se al terreny passant de l'estat pla a l'estat tridimensional i que permeta, d'una banda, marcar l'entrada a l'estació de metro, i, d'una altra, donar una cobertura als escalons d'aquesta en la seua part interior. Per a això s'ha ideat una porta mixta consistent en elements plans d'una part i làmines d'obertura articulades convenientment amb els elements plans d'obertura i amb els cantells fixos de l'accés… A través d'una rotació respecte a un eix horitzontal la porta s'obre, cada una de les làmines té un gir relatiu al voltant d'un eix paral·lel d'igual magnitud… El mecanisme d'obertura funciona mitjançant un cilindre hidràulic que ataca el centre de gravetat de la superfície triangular; a través de la força procedent del cilindre hidràulic, el pla del triangle superior es desplaça en una sèrie de plans paral·lels a l'horitzontal i produeix l'obertura del conjunt".

* Departament de Geometria i Topologia, Universitat de València.

NOTES

1 *Santiago Calatrava's Creative Process. Part I: Fundamentals. Part II: Sketchbooks* [edició i introducció de L. Lefaivre i A. Tzonis], Basilea, Birkhäuser Publishers for Architecture, 2001.

ARQUITECTURA I MATEMÀTIQUES

LA GEOMETRIA AL SERVEI DE L'ART: DE GAUDÍ A GEHRY

Juan Monterde*

Architecture and Mathematics, Geometry and Art: from Gaudí to Gehry. Architecture has been indebted to geometric surfaces since ancient times, as books of descriptive geometry are witness: "Any architectonic creation is Geometry". However, such geometries have evolved from classical surfaces to those designed with the help of a new discipline: Computer Aided Geometric Design (CAGD). The author reviews pre-computer geometric design exemplified by the use of hyperbolic paraboloids (Gaudí and Candela), its origin in the automotive industry and how it has been used brilliantly by Gehry in the Guggenheim Museum, Bilbao.

No estranya a ningú el fet que les matemàtiques tinguen una aplicació directa en arquitectura. Tots ens podem imaginar que, abans de posar mans a l'obra, l'arquitecte ha de comprovar que l'estructura que vol construir és realitzable tenint en compte la resistència dels materials a emprar, les càrregues que han de suportar i potser també el cost econòmic. Sembla, però, que aquesta aplicació es redueix només a això, al càlcul d'estabilitats, de tensions, etc., però de cap manera al disseny de l'objecte arquitectònic mateix. Pensem, i és ben cert, que pel que fa a la creació artística, l'arquitecte aparta de la seua taula de treball les matemàtiques i deixa volar la imaginació en la recerca de la forma desitjada.

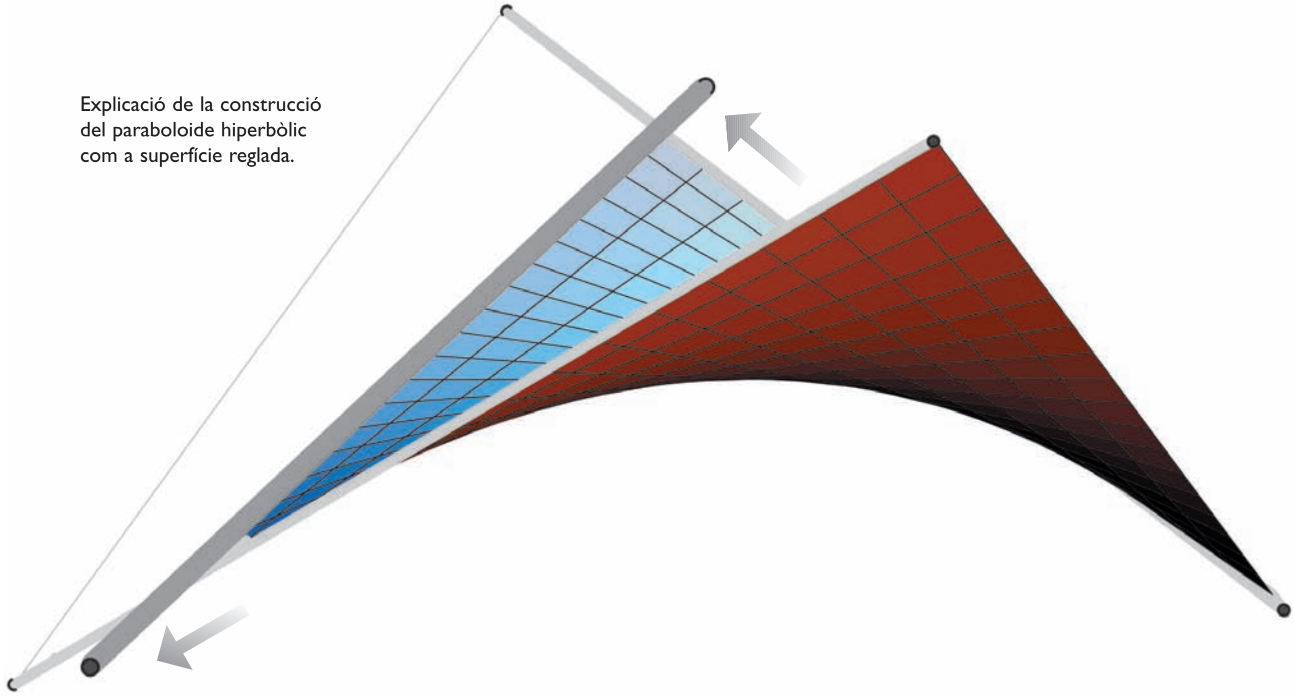
Doncs bé, això no és ben bé així.

Allò que potser resulta desconegut és que les matemàtiques també poden ajudar, i de fet ho fan, si no en el mateix moment màgic de creació artística, sí en l'immediatament posterior. "Tota creació arquitectònica és geometria" és una màxima que es pot trobar en els tractats de geometria descriptiva. Des de sempre, els arquitectes han aprofitat superfícies de les que poden qualificar-se de clàssiques i les combinaven encertadament. I en els nostres dies, també ho continuen fent. Una nova teoria, la de les superfícies de Bézier i les seues generalitzacions, engendrada a principis de la dècada dels 60 en diverses empreses automobilístiques i de construcció aeronàutica, permet ajudar l'arquitecte a dissenyar superfícies de manera arbitrària amb senzillesa i elegància. Permeteu-me que us intente explicar com l'arquitectura ha aprofitat en l'últim segle no sols les tècniques matemàtiques, sinó també les idees. Farem un recorregut visitant-hi des de la Sagrada Família de Gaudí fins al Guggenheim de Gehry, passant per l'obra mexicana de Félix Candela i per l'estadi olímpic de Munic. Un recorregut que paral·lelament ens portarà des de les superfícies clàssiques utilitzades en arquitectura a les modernes superfícies generades per ordinador.

«TOTA CREACIÓ ARQUITECTÒNICA ÉS GEOMETRIA»

GEOMETRIA I ARQUITECTURA ABANS DE L'ORDINADOR

Una de les superfícies que més s'han fet servir en arquitectura és la batejada amb el pompós nom de paraboloide hiperbòlic. Gaudí va ser un dels que la van emprar, però qui més l'ha treballada ha estat Félix Candela. Dins de la fauna de les superfícies, el paraboloide hiperbòlic és un espècimen ja conegut pels grecs. Allò que les corbes còniques (l'el·lipse, la paràbola i la hipèrbole) són per a la dimensió dos, en dimensió tres ho són les superfícies quàdriques. Els noms d'aquestes superfícies tenen a veure amb les corbes que apareixen com a seccions amb plans. En el paraboloide hiperbòlic, una de les superfícies quàdriques, aquestes seccions són paràboles i hipèrboles.

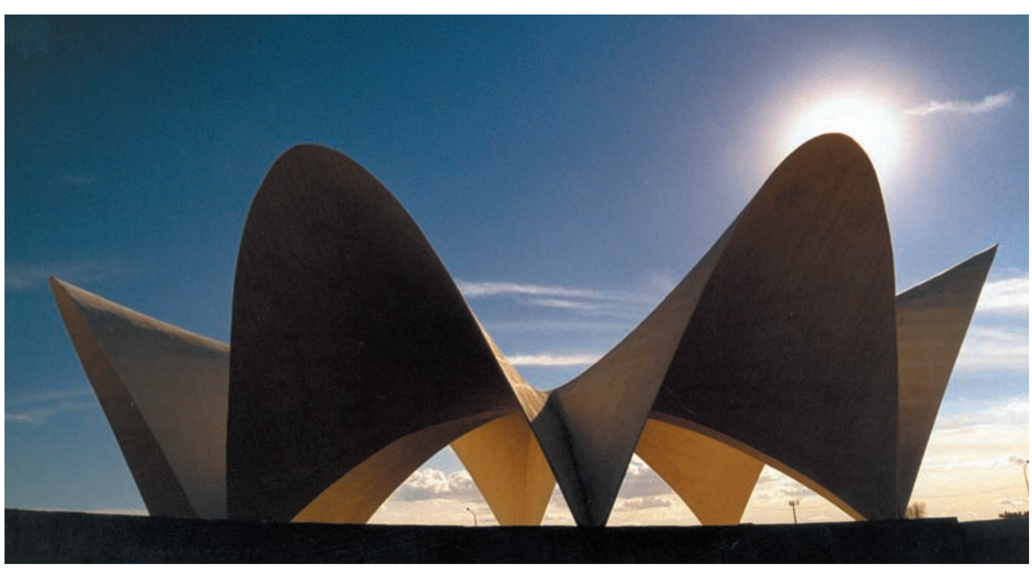


Explicació de la construcció del paraboloide hiperbòlic com a superfície reglada.

La propietat important, però, la que va motivar l'interès tant de Gaudí com de Candela, és el fet que el paraboloide hiperbòlic, tot i ser una superfície corbada, es pot construir amb línies rectes. L'únic que s'ha de fer és anar variant l'angle d'inclinació d'una recta que es mou damunt una altra corba. Aquest tipus de superfícies els geòmetres les anomenem superfícies reglades i en tenim exemples a bastament en una altra art, l'escultura. És de suposar que aquesta propietat és la que permetia a Gaudí donar les instruccions precises als seus obrers i al capatàs, quan aquests havien de bastir un paraboloide hiperbòlic en el sostre de la Sagrada Família (iniciada l'any 1883).

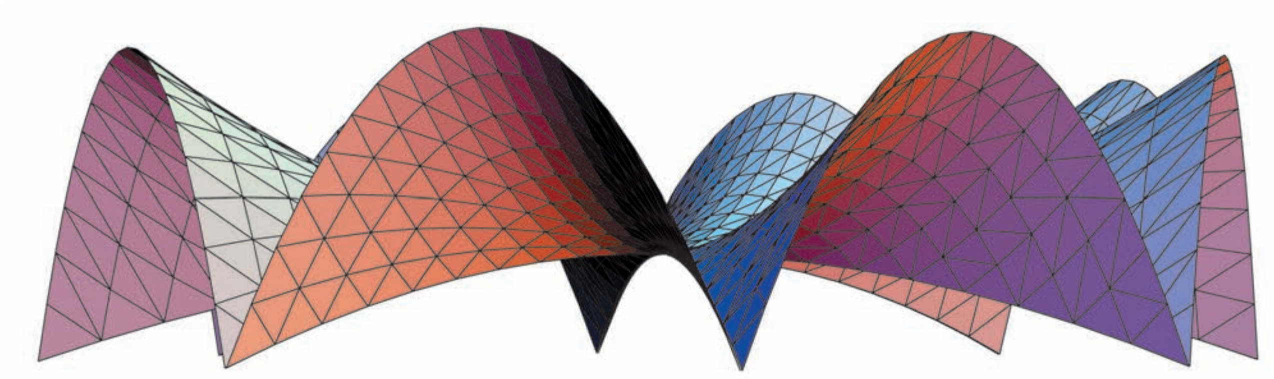
Vejam exactament com bastir-ne un. Donats quatre punts en l'espai que no estiguen en un mateix pla, hi ha un únic paraboloide hiperbòlic que passa precisament per aquests quatre punts. Aquesta és la mateixa propietat que diu que dos punts determinen una única recta. El que havien de fer els obrers era unir amb sengles barres un dels parells de punts per una banda, i l'altre parell oposat per l'altra. Després només s'ha de deixar relliscar una altra barra sobre les dues anteriors mantenint una velocitat constant en els extrems.

Gaudí va utilitzar el paraboloide hiperbòlic i també unes altres superfícies doblement reglades com l'hiperboloide de revolució. Qui va mostrar un mestratge sublim en la seua utilització va ser l'arquitecte d'origen espanyol, exiliat a Mèxic i després nacionalitzat nord-americà, Félix Candela. El millor exemple es pot trobar en el restaurant Los Manantiales (1958) del parc



© Javier Yaya

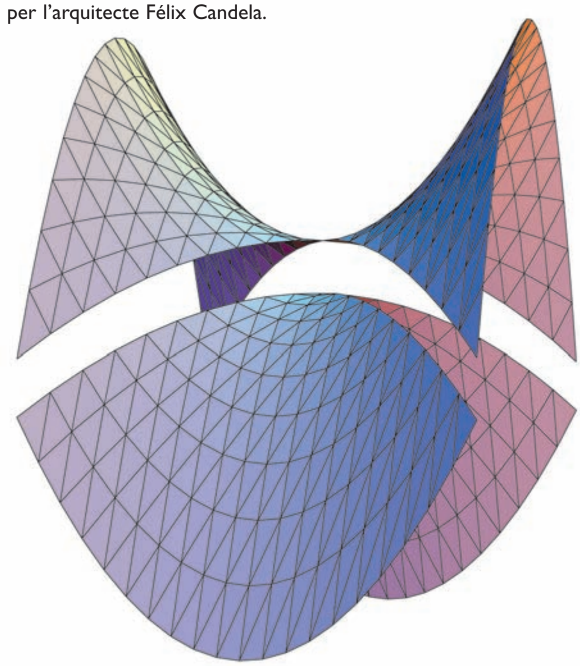
Dalt, fotografia del restaurant Los Manantiales en la ciutat de Mèxic. A la dreta, l'Oceanogràfic, fotografiat durant la seua contrucció, tot mostrant la seua estructura.



de Choximilco a la ciutat de Mèxic. El sostre és format per vuit paraboloides hiperbòlics. La mateixa estructura es pot trobar ara en el nou Parc Oceanogràfic (2002) de la Ciutat de les Arts i les Ciències.

Tant Gaudí com Candela van aprofitar superfícies matemàtiques prèviament definides i estudiades, amb unes equacions perfectament determinades i una manera de construir-les totalment establerta. Això implica una manca de llibertat en el disseny de la forma desitjada. Només podien fer servir una determinada família de superfícies depenent d'uns pocs paràmetres. L'única variació permesa consisteix a jugar amb diferents valors dels paràmetres. El geni dels dos arquitectes i l'experiència assolida després de moltes proves amb maquetes va suplir aquest defecte.

Dalt, representació com a unió de parts d'un paraboloide hiperbòlic de la coberta de l'edifici de recepció de l'Oceanogràfic. A sota, descripció explícita de la part del paraboloide hiperbòlic utilitzada per l'arquitecte Félix Candela.



SUPERFÍCIES MÍNIMES EN ARQUITECTURA

El següent exemple d'utilització d'un determinat tipus de superfície en arquitectura el podem trobar en dos dels edificis del complex olímpic de Munic (1972). Tant la coberta de les graderies de l'estadi olímpic com la de la piscina són exemples de les anomenades superfícies mínimes. Aquestes superfícies, conegudes en geometria des del segle XVII, tenen la propietat de ser, entre totes les que tenen la mateixa frontera, les que tenen àrea mínima. La propietat de minimitzar l'àrea és la que va aprofitar el seu arquitecte, l'alemany Frei Otto, per tal d'enlairar, mitjançant un sistema de suports i cables, una estructura sorprenentment lleugera on les tensions interiors s'anul·laven, permetent alhora una economia de material i una forma agosarada.

Les superfícies mínimes, encara que permeten més graus de llibertat que l'ús exclusiu dels paraboloides hiperbòlics, continuen tenint restriccions. Bàsicament, aquestes restriccions apareixen pel fet que, donada la frontera, la superfície mínima està totalment determinada. Per tant, els dissenyadors de superfícies només poden actuar sobre la frontera i esperar que la superfície mínima resultant presente la forma desitjada.

Imatge de la coberta de l'estadi olímpic de Munic.

LA GÈNESI DEL DISSENY GEOMÈTRIC ASSISTIT PER ORDINADOR

Aquest problema, la manca de llibertat en el disseny, que apareix amb la utilització de superfícies quàdriques o mínimes, és el mateix que es va plantejar en l'origen d'una nova disciplina: obtenir corbes i superfícies de formes diverses però amb un procediment senzill. Això no es pot aconseguir amb equacions, ja que la intuïció, mal que ens pese als geòmetres, es perd quan substituïm una superfície per una equació. Cal un procediment geomètric simple que permeta construir formes complicades. En aquestes estaven en el centre de disseny de l'empresa automobilística Citroën quan, cap a les acaballes de la dècada dels 50, van contractar un jove matemàtic. En paraules del mateix matemàtic "ni ell sabia què podia fer en aquella empresa, ni, el que és pitjor, l'empresa sabia què podia fer amb un matemàtic". El cas és que li van plantejar un problema relacionat amb el disseny i la resposta que va donar és ara coneguda com l'inici del disseny geomètric assistit per ordinador. El seu cognom era DeCasteljau; ara, però, les corbes i superfícies que va idear es coneixen amb el nom de corbes i superfícies de Bézier, en honor d'un altre matemàtic que, de manera independent i alternativa, va arribar a la mateixa solució treballant per a una empresa de la competència, la Renault. L'explicació d'aquest canvi de nom és alhora senzilla i cruel: la política de propietat intel·lectual de la Citroën era molt més restrictiva amb els seus treballadors que la de la Renault. DeCasteljau no va obtenir el permís per a publicar el seu treball en revistes científiques amb tot el que comporta de difusió internacional dels resultats, cosa que sí que va poder fer Bézier.

La idea de DeCasteljau per construir superfícies té com a germen el mateix paraboloide hiperbòlic. Ja hem vist que amb quatre punts determinem un paraboloide hiperbòlic. D'alguna manera podem dir que aquests punts controlen la superfície. La idea consisteix a utilitzar una xarxa de punts que controlen la superfície, i construir la superfície amb un procediment semblant al que fan servir els obrers, matemàticament anomenat interpolació lineal, de manera recursiva. Cal assenyalar que un dels ingredients fonamentals que els informàtics, i també els matemàtics, fan servir quan dissenyen un algorisme és la recursivitat. Per tant, la construcció de DeCasteljau està totalment adaptada a la nova eina de treball que representava l'ordinador en aquells primers anys de la seua aparició.

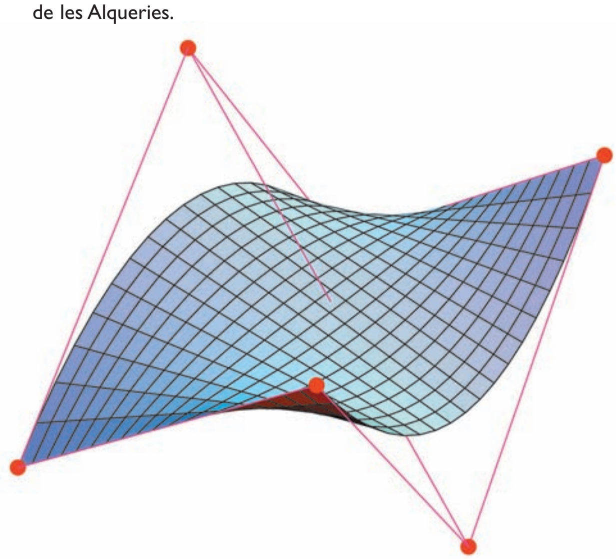
CAGD EN L'ARQUITECTURA

A les Alqueries, a la Plana Baixa, es podia contemplar a principis d'estiu com vora carretera començava a enlairar-se una estructura que cridava poderosament l'atenció. Eren les quadernes de fusta que suportarien el sostre d'un nou restaurant. L'edifici és de planta rectangular, amb parets sense cap ornament, tot ben clàssic. L'element cridaner, però, és la forma de la coberta. En contrast amb la utilització de línies rectes i parets totalment planes, la coberta gairebé volava mostrant una estructura corbada gràcilment. Gairebé com si una

© J. Monterde

© J. Monterde

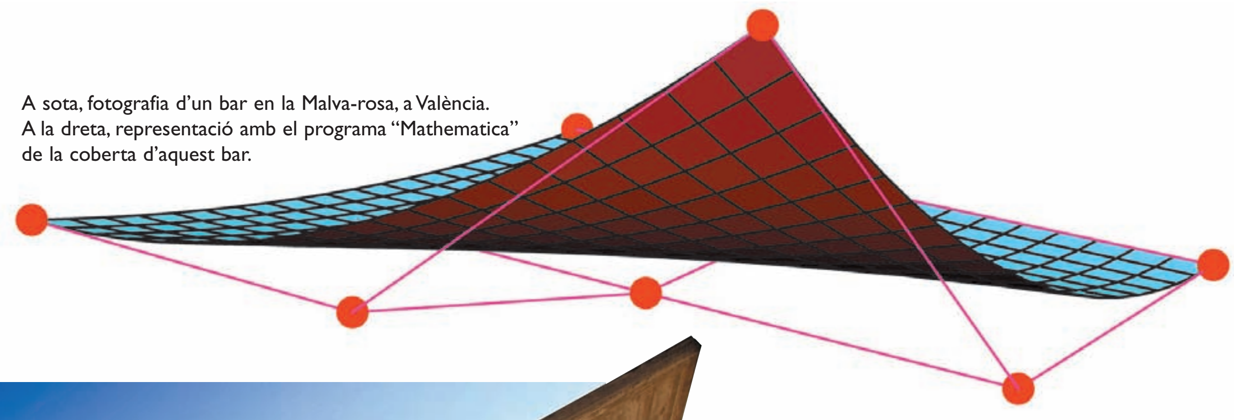
Fotografies (a l'esquerra) del restaurant de les Alqueries en construcció, on es pot veure la seua estructura, i ja acabat. A sota, representació com a superfície de Bézier de la coberta del restaurant de les Alqueries.



© Miguel Lorenzo

© Miguel Lorenzo

A sota, fotografia d'un bar en la Malva-rosa, a València.
A la dreta, representació amb el programa "Mathematica" de la coberta d'aquest bar.



màgica estora voladora s'haguera posat com a sostre. Les parets de vidre contribueixen a fer més palesa aquesta sensació. Doncs bé, la coberta no és altra cosa que una de les més senzilles superfícies de la nova disciplina.

La coberta que es podia contemplar a principis d'estiu, totalment acabada al començament de la tardor de 2002, és l'exemple de superfície de Bézier més senzill a banda del paraboloide hiperbòlic mateix. Continua sent una superfície reglada. Dos dels costats de la superfície són paràboles, una de còncava i l'altra de convexa. Els altres dos són segments rectilinis. Podem pensar en la superfície com en una família de segments rectilinis, recolzats en el seus extrems sobre ambdues paràboles. És a dir, els obrers de Gaudí haurien fet relliscar la barra amb els extrems sobre les dues paràboles.

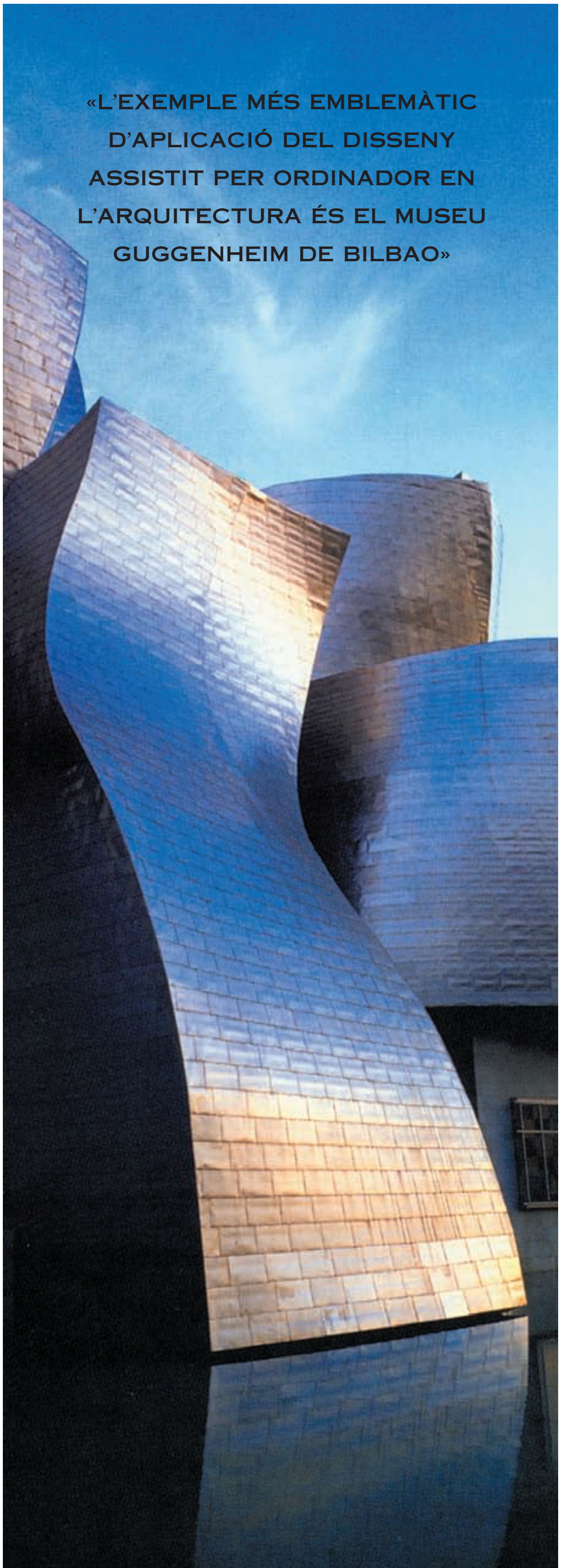
«EN PARAULES DEL MATEMÀTIC DECASTELJAU 'NI ELL SABIA QUÈ PODIA FER EN AQUELLA EMPRESA, NI, EL QUE ÉS PITJOR, L'EMPRESA SABIA QUÈ PODIA FER AMB UN MATEMÀTIC'»

Aquesta superfície encara conserva una de les propietats del paraboloide hiperbòlic, encara és una superfície reglada. Les dimensions de la seua xarxa de control son 3 per 2. Un exemple de superfície de Bézier amb un grau més de complexitat es pot bastir amb una xarxa de control del tipus 3 per 3. Doncs bé, resulta que també podem trobar una materialització arquitectònica a la mateixa ciutat de València, concretament a l'extrem nord de la platja de la Malva-rosa.

L'exemple més emblemàtic d'aplicació del disseny assistit per ordinador en l'arquitectura el tenim també a prop, el Museu Guggenheim (1997) de l'arquitecte

Fotografies de la coberta de l'estació del Cabanyal, a València.

«L'EXEMPLE MÉS EMBLEMÀTIC D'APLICACIÓ DEL DISSENY ASSISTIT PER ORDINADOR EN L'ARQUITECTURA ÉS EL MUSEU GUGGENHEIM DE BILBAO»



Fotografies del museu Guggenheim, a Bilbao, de l'arquitecte canadenc Frank O. Gehry.

canadenc Frank O. Gehry. Les seues arestes corbades, la forma sinuosa de les parets recobertes de titani, els volums gens uniformes, la geometria irregular, en definitiva, són producte de la voluntat d'integrar l'edifici en l'entorn que l'envolta i de l'ajuda que el seu creador ha tingut dels programes informàtics de disseny basats en els conceptes de corbes i superfícies de Bézier i de les seues generalitzacions.

L'embrió del disseny del Museu són uns pocs gargots. Només amb informació addicional podem relacionar l'esbós amb el resultat final. Malgrat això, l'espurna creativa és allà. Tot el que ve després és tècnica. Ara bé, la noció de superfícies de Bézier va ajudar l'arquitecte a passar amb facilitat de les muses al paper. En paraules de l'arquitecte mateix: "Després l'ordinador fa els models i jo els utilitze com a revisió visual final. Aleshores, amb l'ordinador… crec que canvia l'equació entre arquitecte i construcció." Ens podem imaginar l'estudi d'arquitectura amb l'arquitecte treballant amb un programa de disseny assistit per ordinador en marxa (concretament, era un anomenat CATIA, d'una empresa aeroespacial francesa) fent-hi proves i més proves, canviant de lloc els punts de control, fins que allò que mostrava el monitor reflectira el que ell tenia en ment.

Si visiteu alguna vegada el museu de Bilbao, recordeu que el mateix embolcall del museu, l'edifici, tant l'exterior com l'interior, és també una obra d'art producte d'un arquitecte del seu temps, un Vitruvi electrònic, que va aprofitar les eines matemàtiques en el mateix procés de creació. Eines que van permetre transformar les visions escultòriques en un projecte factible.

* Departament de Geometria i Topologia, Universitat de València

ENTRE LES MATEMÀTIQUES I LA MÚSICA

Rafael Ríos* i Mario García**

MUSIC AND MATHEMATICS. THE IMPORTANT LINK BETWEEN MUSIC AND MATHEMATICS HAS VARIED THROUGHOUT HISTORY. DURING THE XX CENTURY, SOME COMPOSERS HAVE SOUGHT INSPIRATION USING MATHEMATICS AS A PRIME SOURCE, AS SHOWN BY, FOR INSTANCE, THE DEVELOPMENT OF FRACTAL MUSIC IN RECENT YEARS.

L'evolució de la música i les matemàtiques al llarg de la història ha marcat el tipus de relació existent entre totes dues matèries en cada moment del seu desenvolupament. A pesar que el substrat subjacent a cada una d'aquestes disciplines es remunta als orígens de l'ésser humà, no és possible parlar de l'existència de nexes d'unió fins que apareixen els primers signes de teorització tant en les matemàtiques com en la música.

És a Grècia on els principis unificadors, que constitueixen el nucli tant de les matemàtiques, d'una banda, com de la música, d'una altra, aconsegueixen un grau suficient de maduresa perquè s'establesquen les primeres relacions. Ambdós termes procedeixen respectivament dels vocables grecs *musiké,* “de les muses”, i *mathema,* que significa “allò que s'aprèn”.

«NO ÉS POSSIBLE PARLAR DE L'EXISTÈNCIA DE NEXES D'UNIÓ ENTRE LES MATEMÀTIQUES I LA MÚSICA FINS QUE NO HI APAREIXEN ELS PRIMERS SIGNES DE TEORITZACIÓ»

La concepció clàssica de la música com un subconjunt de les matemàtiques va perdurar durant l'edat mitjana, i no va ser fins al segle XII quan es va crear una nova divisió de les ciències, anomenada escolàstica divina, que no la incloïa específicament. Paral·lelament, compositors i executants van començar a separar-se de la tradició pitagòrica creant nous estils i tipus de música. El canvi de paradigma musical es pot veure en l'evolució del cant monòdic gregorià, que a poc a poc es va anar transformant en música polifònica amb diferents instruments i veus. D'altra banda, l'execució d'obres més complexes va portar a experimentar amb mètodes d'afinació alternatius que van donar lloc a una variació de l'afinació pitagòrica anomenada *afinació justa*. En el nou mètode es continuaven utilitzant les matemàtiques com a eina per a calcular els intervals, però oblidant els principis pitagòrics, amb la qual cosa s'abandonava el model de bellesa clàssic i la música es dissociava dels nombres. Aquest canvi d'actitud va causar desacord entre els matemàtics, que volien una adhesió estricta a les seues fórmules, i els músics, que buscaven regles fàcils d'aplicar.

L'ús de les matemàtiques per a la formalització i el càlcul de certs aspectes de les composicions fomenta l'aparició i permanència de dos tipus de situacions entre matemàtiques i música, ja considerades com a disciplines. D'una banda, continuant en certa manera amb la tradició pitagòrica, el músic a vegades estableix un esquema matemàtic per a la creació de les seues composicions que sobrepassa l'ús habitual donat a les matemàtiques; d'una altra, el músic crea l'obra de manera intuïtiva utilitzant cànons estètics, mancats aparentment de component formal, i és el matemàtic el que busca a *posteriori* un nexe entre l'obra i les matemàtiques.

Un element matemàtic que il·lustra els dos tipus de situació és la successió de Fibonacci. Els nombres de Fibonacci són els que formen la successió 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., en la qual a partir del tercer terme cada un d'ells és la suma dels dos anteriors. Aquesta successió té diverses propietats interessants; per exemple, la successió formada per les raons entre cada nombre de Fibonacci i l'anterior, 1, 2, 3/2, 5/3, 8/5,..., té com a límit la *raó àuria* (1.618...). Aquesta proporció es pot trobar àmpliament tant en l'art com en estructures naturals.

Hi ha diferents autors, com és el cas de Béla Bartók (1881-1945), que han utilitzat la dita successió

Dalt, fotografies de Béla Bartók (1881-1945), qui va utilitzar la successió de Fibonacci com a patró per a determinar certs elements de les seues composicions. Aquest autor va desenvolupar una escala musical basant-se en la successió que va denominar *escala fibonacci*. Així mateix, en la seua obra *Música per a instruments de corda, percussió i celesta*, una anàlisi de la fuga mostra l'aparició de la sèrie i de la raó àuria.

com a patró per a determinar certs elements de les seues composicions. Aquest autor va desenvolupar una escala musical basant-se en la successió que va denominar *escala fibonacci*. Així mateix, en la seua obra *Música per a instruments de corda, percussió i celesta*, una anàlisi de la fuga mostra l'aparició de la sèrie i de la raó àuria. D'altra banda, estudis realitzats sobre la Cinquena Simfonia de Beethoven (1770-1827) mostren que el tema principal inclòs al llarg de l'obra és separat per un nombre de compassos que pertany a la successió. També en diverses sonates per a piano de Mozart (1756-1791) la proporció entre el desenvolupament del tema i la seua introducció és la més pròxima possible a la raó àuria.

Relacions matemàtiques d'aquest estil s'han trobat també en la coral situada al final de *Kunst der Fuge* de Johan Sebastian Bach (1685-1750). Determinats motius s'hi repeteixen, per disminució a escales menors, una vegada i una altra amb distintes variacions dins d'una regió major de la peça. Així, per exemple, diverses veus repeteixen al doble de velocitat la melodia de la veu principal. Aquest és un exemple de peça musical autosemblant, que, com veurem més endavant, és una característica de la geometria fractal, un concepte matemàtic de finals del segle XX. Hi ha treballs que analitzen la manifestació d'aquestes característiques fractals en altres obres, com en el tercer moviment de la sonata número 15 de Beethoven i el triangle de Sierpinski, o l'analogia entre el conjunt de Cantor i la primera *Ecossaisen* de Beethoven.

EL SEGLE XX, MÚSICA D'AVANTGUARDA

Cal dir que tant els músics com els matemàtics a partir del segle XIII no han viscut aquestes situacions d'una manera representativa. Únicament s'han donat casos aïllats de músics que, com a entreteniment o curiositat, han utilitzat desenvolupaments formals a les seues obres, o d'alguns matemàtics que han buscat relacions matemàtiques en obres ja escrites. No és fins al segle XX quan la necessitat de noves mescles de sons impulsa, de la mà de músics d'avantguarda, la recerca de noves matèries primeres per a la inspiració dins de l'univers conceptual de les matemàtiques.

«LA NECESSITAT DE NOVES MESCLES DE SONS IMPULSA LA RECERCA DE NOVES MATÈRIES PRIMERES PER A LA INSPIRACIÓ DINS DE L'UNIVERS CONCEPTUAL DE LES MATEMÀTIQUES»

Un primer exemple de músic contemporani que se serveix de les matemàtiques el trobem en Joseph Schillinguer. Aquest músic teòric rus, emigrat a Estats Units, va desenvolupar, durant la dècada dels vint i trenta, un detallat sistema de composició musical basat en principis científics. A pesar que aquests estudis de Schillinguer encara no gaudeixen de reconeixement massiu, la seua obra ha influït enormement en la música del segle XX, especialment en músics com George Gershwin, Glenn Miller o Benny Goodman, entre altres.

La base del sistema de Shillinguer és geomètrica i es fonamenta en el concepte de relacions de fase de moviments periòdics simples. Schillinguer va trobar distintes formes de projectar aquestes relacions en el ritme, però també en àrees molt menys òbvies com el to, l'escala, els acords, la progressió harmònica, i fins i tot en els aspectes semàntics i emocionals de la composició musical.

Minuet

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Trio

	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	72	6	59	25	81	41	89	13	36	5	46	79	30	95	19	66
2	56	82	42	74	14	7	26	71	76	20	64	84	8	35	47	88
3	75	39	54	1	65	43	15	80	9	34	93	48	69	58	90	21
4	40	73	16	68	29	55	2	61	22	67	49	77	57	87	33	10
5	83	3	28	53	37	17	44	70	63	85	32	96	12	23	50	91
6	18	45	62	38	4	27	52	94	11	92	24	86	51	60	78	31

Alguns autors han elaborat tècniques basades en algorismes de molt fàcil maneig que permeten compondre obres sense tenir nocions de música o de composició. Una d'aquestes tècniques és la proposada per Mozart, la qual descriu un joc, *Musikalisches Würfelspiel*, que permet compondre un breu vals de 16 compassos jugant amb dos daus. Per a això, Mozart va compondre 176 melodies diferents d'un compàs de duració cada una i dissenyà dues taules que codifiquen les melodies corresponents a la primera i la segona part del vals. Les columnes de cada taula es numeren amb nombres romans corresponents als vuit compassos de què està composta cada part del vals, els números del 2 al 12 a les files corresponen a la suma dels resultats i els nombres en la matriu corresponen a cada un dels 176 compassos. Per a determinar la melodia de cada un dels 16 compassos es llancen els dos daus i s'anota la suma del resultat.
Amb aquest mètode es poden compondre vora 750 trilions de valsos diferents.

Hi ha qui considera que el sistema de Schillinguer va anticipar la música per ordinador abans que existiren els ordinadors, i que va introduir moltes tècniques algorítmiques de composició, fins i tot la utilització de sèries numèriques autosemblants.

L'exponent principal d'aquesta nova forma de composició és, sens dubte, la música de Iannis Xenakis (1921-2001). L'obra d'aquest autor contemporani és plena de traduccions de conceptes matemàtics al pla musical. Una de les seues composicions més conegudes és *Metàstasi* (1954). Aquesta peça és basa en el desplaçament continu d'una línia recta, model que es representa en la música com un *glissando* continu. La contracció i expansió del registre i la densitat a través del moviment continu il·lustren les lleis estocàstiques.

Dins del ventall de possibilitats que ha despertat el creixent interès pels conceptes matemàtics, es troba la música fractal. El naixement d'aquest nou corrent ha estat possible gràcies al desenvolupament de les noves tecnologies, utilitzades tant per a la generació per ordinador d'aproximacions a fractals amb alts graus de resolució, com per al modelatge dels primers esbossos de composició que s'obtenen en aquest procés creatiu.

El principi fonamental de la música fractal està en la projecció del comportament dinàmic o l'estructura d'un fractal sobre un espai musical. El músic fractal és ara el que s'apropia de les matemàtiques com a font d'inspiració per a la seua obra, buscant traslladar al pla musical una sèrie de traços propis dels conjunts fractals.

Les propietats essencials dels fractals utilitzats en la composició de música fractal són l'autosemblança i l'autoreferència. L'autosemblança implica invariança d'escala, és a dir, l'objecte fractal presenta la mateixa aparença independentment del grau d'ampliació amb què el mirem. Per més que s'amplie qualsevol zona d'un fractal, sempre s'aprecia una estructura complexa, en la qual apareix moltes vegades l'objecte inicial. L'autoreferència es refereix a la forma de construir el fractal. Aquests conjunts són el límit d'un procés recursiu que parteix d'un altre conjunt inicial diferent amb una expressió més simple.

El procés de traducció dels conceptes d'autosemblança i autoreferència al pla musical suposa ja un primer esforç creatiu per a l'autor de música fractal, el qual ha d'identificar arbitràriament elements de l'una i de l'altra disciplina. En el cas dels atractors estranys, una fórmula prou utilitzada a aquest efecte és la següent: una vegada seleccionat un sistema caòtic en un programa de música fractal, aquest genera aleatòriament valors per als paràmetres del sistema i comença a dibuixar els punts de l'atractor resultant. A mesura que els punts es van dibuixant, es reprodueixen les notes que li corresponen. Aquesta correspondència s'estableix dividint l'espai en què es dibuixa l'atractor amb una reixeta formada per regions quadrades i assignant

FRACTALS. UN BREU RECORDATORI

Els fractals, amb el nom de corbes no derivables o no rectificables, van aparèixer en les matemàtiques cap a finals del segle XIX. En un principi, a causa del seu caràcter eminentment patològic que desafiava els fonaments de la geometria de l'època, aquests monstres matemàtics van ser presos com a meres curiositats. Eren corbes o superfícies infinitament plegades, línies de longitud infinita confinades en una regió delimitada, superfícies no derivables en cap punt.

És a partir dels anys 70 del segle XXquan comencen a albirar-se les primeres aplicacions en la modelització d'estructures reals. Mentre la geometria diferenciable assumeix que a petita escala l'estructura de qualsevol objecte se suavitza, la geometria fractal aborda l'estudi de formes geomètriques no diferenciables, o trencades a qualsevol escala. La geometria fractal ofereix un model alternatiu que busca una regularitat en les relacions entre un objecte i les seues parts a diferents escales, de manera que l'objecte en qüestió no perd complexitat per molt petit que siga l'entorn que considerem d'aquest. Algunes estructures naturals susceptibles d'una modelització més fidel mitjançant geometria fractal són l'estructura dels nostres pulmons, les línies de costa, els flocs de neu o el creixement urbà. El terme *fractal* (del llatí *fractus*, "fragmentat" o "irregular") amb què avui es designa aquest tipus de conjunts va ser encunyat per Benoit Mandelbrot.

«EL TERME 'FRACTAL' (DEL LLATÍ *FRACTUS*, 'FRAGMENTAT' O 'IRREGULAR') AMB QUÈ AVUI ES DESIGNA AQUEST TIPUS DE CONJUNTS VA SER ENCUNYAT PER BENOIT MANDELBROT»

A pesar de l'ampli espectre de conjunts que engloba la definició donada pel mateix Mandelbrot en el seu llibre *The Fractal Geometry of Nature*, els fractals més utilitzats en la creació de música fractal són els atractors estranys. Els atractors estranys són invariants de sistemes dinàmics caòtics. Un exemple de sistemes dinàmics considerats caòtics són aquells que presenten un comportament aperiòdic (és a dir, resultat d'oscil·lacions regulars que no es repeteixen mai, de període infinit) resultat d'un model totalment determinista i que presenta gran sensibilitat a les condicions inicials. La sensibilitat a les condicions inicials implica que hi ha una divergència exponencial de trajectòries inicialment molt pròximes en l'espai de fases. D'altra banda, el fet que la regió de l'espai de fases ocupada per l'atractor siga delimitada a causa del caràcter dissipatiu d'aquests sistemes, provoca també que dues trajectòries llunyanes s'acosten molt en alguna regió.

Si representem el diagrama de fases d'un sistema dinàmic, les dues forces anteriors generen una estructura confinada en una regió de l'espai de fases que es coneix com a atractor estrany. Com que la regió en què s'ubica l'atractor és acotada, es té, en continuar una trajectòria qualsevol, una corba de longitud infinita tancada en una àrea finita. Com a conseqüència, un atractor estrany posseeix estructura fractal.

Alguns dels resultats més espectaculars obtinguts amb la iteració d'un sistema dinàmic es donen en considerar funcions de variable complexa. El conjunt de Julia d'un polinomi de variable complexa es defineix com la frontera del conjunt de punts que escapen a l'infinit en iterar l'esmentat polinomi. Això significa que l'òrbita d'un element del conjunt de Julia no escapa a l'infinit, però hi ha punts arbitràriament prop d'ell que sí que ho fan.

Dins dels polinomis de variable complexa, han suscitat especial interès els polinomis quadràtics de la forma $f(z) = z \cdot z + c$, on c i z són nombres complexos. Julia va provar que l'òrbita del punt crític $z = 0$ representa un paper essencial a l'hora de saber si un conjunt de Julia és o no connex. Si aquesta òrbita escapa a l'infinit, el conjunt apareix fragmentat com a pols fractal. En cas contrari el conjunt de Julia és connex.

Donada aquesta divisió dels conjunts de Julia, cal preguntar-se pel conjunt de valors de c que generen conjunts d'un o un altre tipus. Aquesta qüestió no va ser totalment resolta fins a 1978, quan Mandelbrot va representar en un pla tots els valors de c que produïen conjunts de Julia connexos i va aconseguir la primera representació del conjunt que avui porta el seu nom. Dit conjunt té estructura fractal igual com els conjunts de Julia.

R. R. / M. G.

© R. Rios i M. Garcia

La important relació entre música i matemàtiques ha variat al llarg del temps. Durant el segle XX, alguns compositors han buscat en les matemàtiques matèries primeres per a la inspiració, com es posa de manifest, per exemple, en la música fractal desenvolupada en els últims anys.

a cada regió una nota. Per exemple, pot utilitzar-se la coordenada x per a decidir l'altura de la nota i la coordenada y per a decidir-ne la durada. L'òrbita o trajectòria d'un sistema caòtic va dibuixant, segons avança el temps, un atractor estrany en l'espai de fases. Aquesta evolució temporal en l'espai de fases es pot aprofitar per a obtenir una melodia que evolucione amb l'atractor.

«TANT LA MÚSICA FRACTAL, COM ELS MÈTODES DE COMPOSICIÓ DE SCHILLINGUER O LA MÚSICA DE XENAKIS SÓN EXEMPLES DE COM EN L'ÚLTIM SEGLE LA MÚSICA S'HA SERVIT DE LES MATEMÀTIQUES PER A ENRIQUIR-SE»

En el cas de la utilització del conjunt de Mandelbrot com a generador de música fractal, la idea és la mateixa que la utilitzada amb atractors estranys. Triem un punt z del pla complex i realitzem successives iteracions mitjançant l'equació $f(z)=z\cdot z+c$. Aquest procés iteratiu produirà una seqüència de punts complexos a què s'aplicarà una determinada transformació, convertint-los en notes musicals. Quan el mòdul del punt de la trajectòria siga superior a 2 (condició que garanteix que la trajectòria escaparà a l'infinit), la trajectòria i la melodia començaran de nou des del punt inicial.

Aquests programes tenen en compte una sèrie de consideracions que fan que el producte obtingut arran d'un d'aquests processos resulte tan agradable a l'orella com siga possible. Exemple d'això és que de l'enorme rang de freqüències que pot percebre l'oïda humana, pel que fa a la música preferim escales discretes. La majoria de les composicions musicals utilitzen tan sols vuit vuitenes (les mateixes que té un piano convencional), i la major part de les melodies usen només un petit subconjunt d'aquestes notes. També es té en compte que la resolució de la música és molt menor que la d'una imatge fractal, per la qual cosa utilitzar tota la informació disponible en un fractal produiria una composició excessivament llarga i complicada.

A pesar de les consideracions del programa, la informació musical proporcionada a partir d'un fractal concret sol resultar rara i desconcertant; per això el músic ha de realitzar una labor d'emmotllament que tinga com a producte final una composició agradable a l'orella humana. És principalment en aquest últim procés on l'artista desplega la seua faceta creativa.

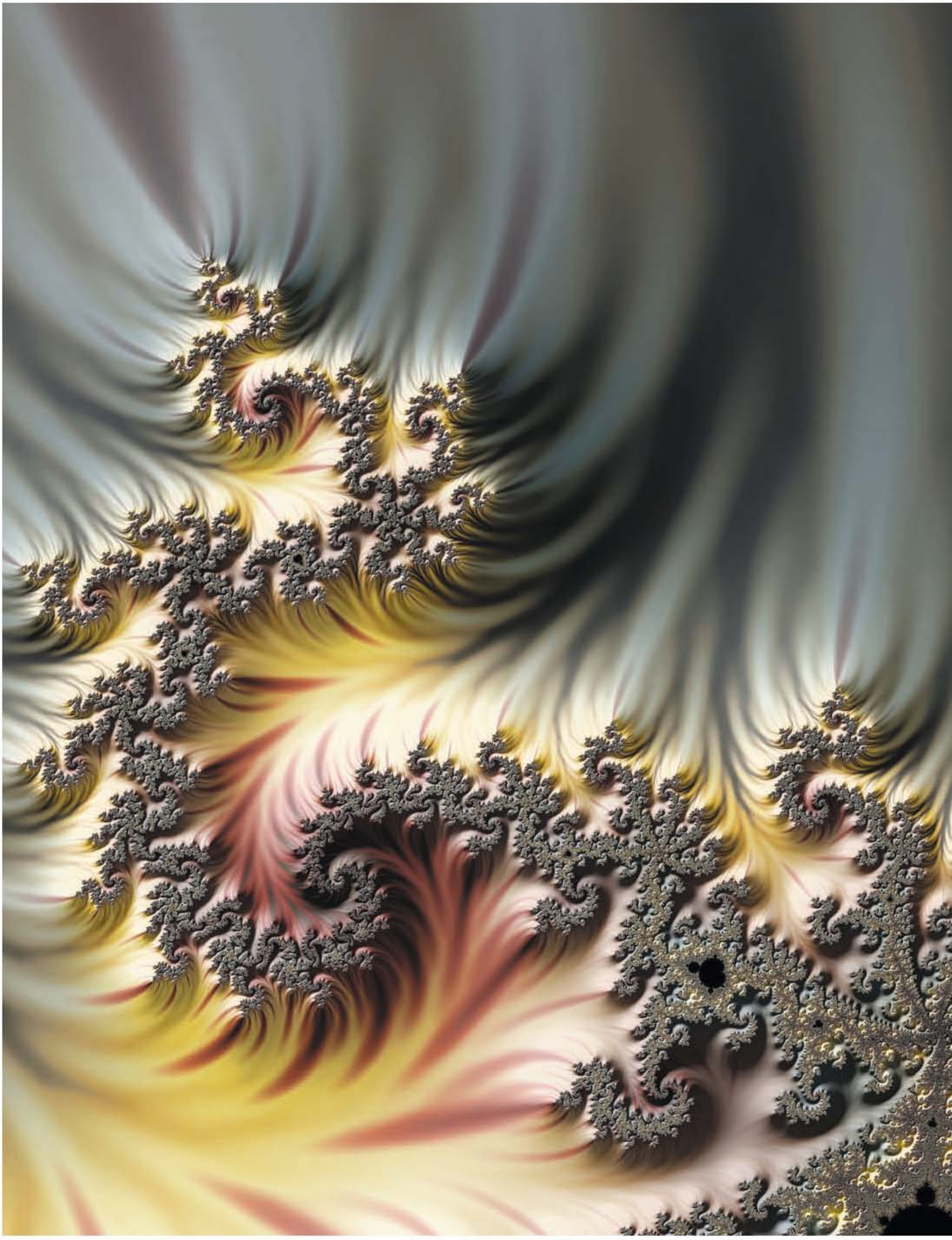
Tant la música fractal, com els mètodes de composició de Schillinguer, o la música de Xenakis, són exemples de com en l'últim segle la música s'ha servit de les matemàtiques per a enriquir-se. D'igual manera, aquesta relació ha tingut lloc en l'altra direcció en forma d'estudis enfocats a trobar una mesura de certs traços estètics d'una composició basant-se en modelitzacions matemàtiques.

---

* Pianista i estudiant de tercer curs de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de València.
** Estudiant de tercer curs de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de València.

URL CONSULTADES
http://campus-llamaquique.uniovi.es/virtual/docència/musica/
http://www.elements.buap.mx/núm44/htm/212.htm
http://www.filomusica.com/tall11/paula.html
http://www.anarkasis.com/pitàgores/
http://www.invdes.com.mx/suplement/anteriors/Març2000/htm/musica.html

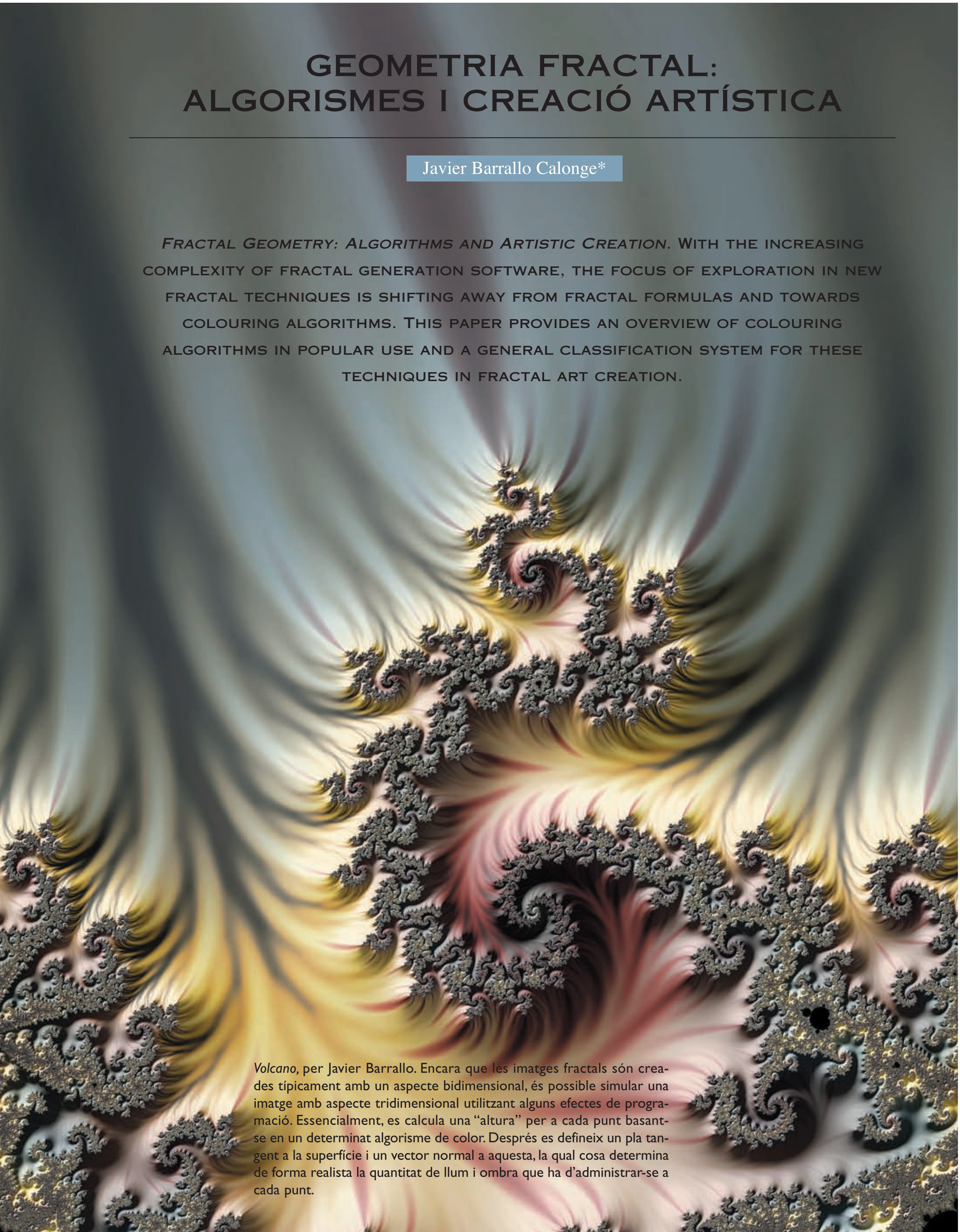
PROGRAMES GENERADORS DE MÚSICA FRACTAL
http://globalia.net/janc/
http://www.dlsi.ua.es/~japerez/fractal/



GEOMETRIA FRACTAL: ALGORISMES I CREACIÓ ARTÍSTICA

Javier Barrallo Calonge*

Fractal Geometry: Algorithms and Artistic Creation. With the increasing complexity of fractal generation software, the focus of exploration in new fractal techniques is shifting away from fractal formulas and towards colouring algorithms. This paper provides an overview of colouring algorithms in popular use and a general classification system for these techniques in fractal art creation.



Volcano, per Javier Barrallo. Encara que les imatges fractals són creades típicament amb un aspecte bidimensional, és possible simular una imatge amb aspecte tridimensional utilitzant alguns efectes de programació. Essencialment, es calcula una "altura" per a cada punt basant-se en un determinat algorisme de color. Després es defineix un pla tangent a la superfície i un vector normal a aquesta, la qual cosa determina de forma realista la quantitat de llum i ombra que ha d'administrar-se a cada punt.

LES IMATGES FRACTALS

Els sistemes dinàmics són una de les branques de les matemàtiques més desenvolupades avui, però fins a l'arribada dels ordinadors, l'elevat nombre de càlculs que implicava el seu ús els feia impracticables en la vida real. Actualment, la capacitat de l'ordinador per a efectuar operacions a gran velocitat permet condensar milions de càlculs en resultats que podem interpretar numèricament o visualment. Benoit Mandelbrot va ser el primer a utilitzar els ordinadors per a produir representacions gràfiques de sistemes dinàmics en el pla complex, basant-se en les fórmules descrites pel matemàtic francès Gaston Julia a començament de segle.

«LA MAJOR INNOVACIÓ ARTÍSTICA NO ES PRODUEIX BUSCANT NOVES EQUACIONS FRACTALS, SINÓ CREANT NOVES FORMES D'ACOLORIR LES JA EXISTENTS»

Durant la dècada dels 80, els primers estudiosos dels fractals van començar a explorar-los pel seu valor estètic, més que no per la seua significació matemàtica. Mentre que la matemàtica era l'eina, l'objectiu era l'art. Com que les equacions fractals són l'element matemàtic més obvi, els artistes fractals van experimentar amb noves equacions, introduint centenars de nous tipus fractals. Elegint acuradament paràmetres per a refinar el color, la forma i l'enquadrament, aquests pioners van introduir el concepte d'art fractal.

Després de 1995, pràcticament s'havia esgotat la possibilitat de crear nous tipus fractals d'especial rellevància. Llavors la major innovació no es produeix canviant les equacions fractals, sinó creant noves formes d'acolorir les equacions ja existents. A mesura que aquests nous algorismes d'acoloriment es fan més complexos, els artistes fractals tornen a les equacions fractals més simples i clàssiques, ja que la flexibilitat d'aquests sofisticats algorismes de color proporciona, en si mateixa, una major versatilitat i possibilitat d'expressió artística personal.

ALGORISMES DE COLOR

Cada sistema dinàmic produeix una seqüència de valors $z_0, z_1, z_2, z_3, ... z_n$. Les imatges fractals es creen generant una d'aquestes seqüències per a cada píxel (punt de la pantalla) en la imatge. Posteriorment, l'algorisme de color és l'encarregat d'interpretar la seqüència numèrica per produir un color final que la represente.

Típicament, l'algorisme de color produeix un únic valor per a cada píxel. Atès que el color és interpretat als ordinadors com un espai tridimensional RGB (*red, green, blue*), aquest valor unidimensional ha de ser expandit per a poder produir un color. El mètode més comú és la creació d'una paleta, una seqüència de valors de color 3D, definits per una línia (denominada gradient) que recorre l'espai tridimensional.

La selecció del gradient és una de les decisions artístiques més crítiques a l'hora de crear una imatge

The eyes of the beholders (Els ulls dels vigilants) per Domenik Anuzzi. Aquesta imatge constitueix un exemple de com l'ús de diferents capes pot ser utilitzat per a buscar i ressaltar una determinada forma o efecte.

fractal. Un gradient de color pot emfasitzar parts de la imatge o ocultar-ne altres. En casos extrems, dues imatges fractals amb els mateixos paràmetres però diferents esquemes de color poden semblar completament diferents.

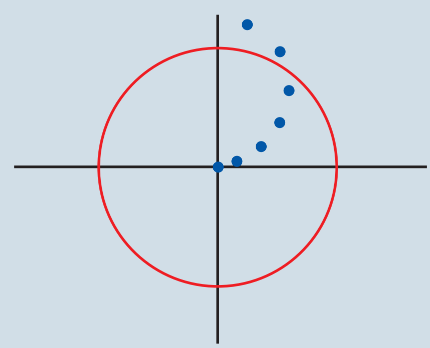
Podem efectuar una primera divisió entre els algorismes de color: els que produeixen valors discrets i els que produeixen valors continus. Els valors discrets mostren salts o bandes en la transició del color. Fins fa uns anys açò no era important, ja que les targetes gràfiques de 8 bits produïen, en qualsevol cas, un escalonament en la imatge. No obstant això, l'arribada massiva de les targetes gràfiques de 24 bits va fer que els algorismes continus cobraren una especial preponderància, ja que permeten interpolar un color qualsevol del gradient amb la precisió desitjada.

La creixent importància dels algorismes de color en les imatges fractals ha donat lloc a centenars de nous algorismes, d'entre els quals podem destacar els que es detallen tot seguit.

ALGORISME DE TEMPS DE FUGA

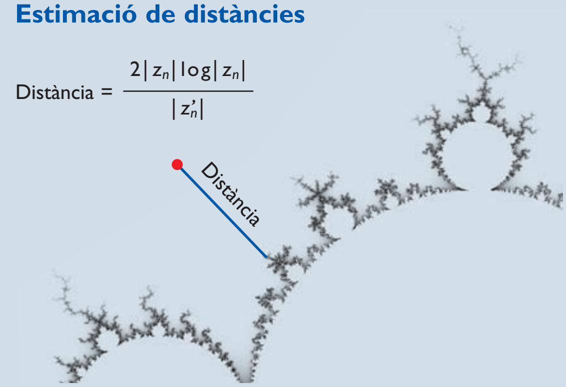
L'algorisme de temps de fuga és un dels més antics i per a molts programes fractals l'única opció disponible. La seua simplicitat el converteix en el favorit d'aquells que s'inicien en la programació fractal, però, des del punt de vista artístic es considera menys important, atès que produeix valors discrets i s'ha vist àmpliament superat pels algorismes de color continus.

Algorisme de temps d'escapament



Aquest algorisme es basa en el nombre d'iteracions necessari per a determinar si la seqüència iterada pel sistema dinàmic tendeix a infinit o no. Pot demostrar-se estrictament que quan l'òrbita de qualsevol valor $z_0, z_1, z_2, z_3,... z_n$ excedeix una regió frontera R sempre divergeix cap a l'infinit. La forma i la grandària míni-

Estimació de distàncies



ma de la regió *R* són, per descomptat, diferents per a cada fórmula fractal. La seqüència iterada és interrompuda tan prompte com z_n sobrepassa la regió frontera *R*, llavors el valor d'acoloriment per a l'algorisme de temps de fuga és simplement la longitud de la seqüència, és a dir, *n*.

Tradicionalment, *R* es defineix com un cercle, centrat en l'origen i amb radi 2. Això ve donat perquè en el conjunt de Mandelbrot està provat que tan prompte com $|z|>2$ la iteració divergeix. I encara que matemàticament *R* ha d'incloure un cercle de radi 2 per a verificar la divergència de forma precisa, això no ha impedit a alguns artistes fractals experimentar amb altres radis diferents.

L'algorisme de temps de fuga pot ser considerat com una mesura no euclidiana de la distància d'un punt qualsevol z_0 a la frontera del conjunt. L'ús d'un valor discret (el nombre d'iteracions és sempre un sencer) produeix una aparença de bandes semblant a la d'un mapa topogràfic.

Taupensky, per Janet Parke. El moviment brownià, el moviment pseudocaòtic que es produeix en les partícules de pols suspesa en l'aire o a l'aigua tèrbola, ha estat transportat al camp dels algorismes de color amb gran èxit. Gràcies a aquest efecte s'aconsegueixen trames de gran realisme que són profusament utilitzades com a fons de les imatges o com a textures del motiu principal.

L'ús creatiu dels gradients pot en algun cas traure profit d'aquestes bandes (també denominades "ratllat de tigre"), però la majoria dels artistes han desenvolupat algorismes que oculten aquest efecte. Clarament, l'objectiu final és crear funcions contínues per mesurar aquestes distàncies. Encara que els algorismes emprats no proporcionen una distància euclidiana exacta, sí que proporcionen una aproximació acceptable utilitzant valors continus.

No totes les seqüències iterades z_0, z_1, z_2, z_3,... z_n tendeixen a infinit. Les òrbites que no ho fan, sovint convergeixen en un sol punt o en un cicle periòdic. Encara que la majoria de les tècniques descrites anteriorment poden aplicar-se a aquestes seqüències convergents, requereixen certes modificacions. El mètode més senzill consisteix a buscar un canvi decreixent a l'òrbita de z_n. Així, mentre que z_n convergeix cap a un punt fix, $|z_n - z_{n-1}|$ tendeix cap a zero. Una vegada que aquesta diferència sobrepassa una tolerància establerta, considerem que el punt ha convergit prou cap a l'atractor i l'acolorim (pot ser d'acord al nombre d'iteracions o a qualsevol altre algorisme).

«EN CASOS EXTREMS DUES IMATGES FRACTALS AMB LES MATEIXES FÓRMULES I PARÀMETRES, PERÒ DIFERENTS ESQUEMES DE COLOR, PODEN SEMBLAR COMPLETAMENT DIFERENTS»

ANGLE DE FUGA

Els algorismes descrits anteriorment consideraven la magnitud de z i el nombre d'iteracions. Si considerem la magnitud z com una part de les coordenades polars de z_n, llavors sembla lògic considerar també l'altra part –l'angle de z– com a element per a acolorir. La família d'algorismes d'angle de fuga cobreix tots aquells algorismes basats en l'estudi de l'angle de z_n.

El primer algorisme seria la descomposició binària. En aquest algorisme, els valors de z_n que prenen angles per damunt de l'eix real (0-180°) prenen un determinat color, mentre que els que prenen valors per davall de l'eix real (180-360°) en prenen un altre de radicalment diferent.

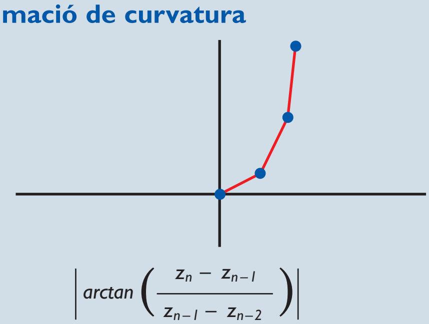
Variacions de l'esquema de la descomposició binària poden incrementar el nombre de divisions del pla Per exemple, una descomposició quaternària podria assignar un color diferent dels angles de z_n corresponents a cada quadrant. L'increment del nombre de divisions del pla incrementa, lògicament, el nombre de colors a emprar.

Un altre aspecte de la seqüència z_0, z_1, z_2, z_3,... z_n que pot ser mesurat és la curvatura entre iteracions consecutives. Una estimació ràpida pot fer-se utilitzant dos punts de la iteració. Altres variants permeten utilitzar el radi de la circumferència que passa pels valors de tres iteracions o l'àrea del triangle format per tres iteracions. Aquestes últimes variants recullen no sols la curvatura de les iteracions, sinó també la distància entre elles.

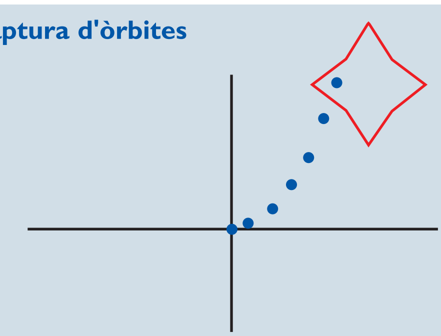
CAPTURA D'ÒRBITES

Constitueix sens dubte la més àmplia família d'algorismes de color, donada la gran versatilitat que mostra per a l'expressió artística. La idea bàsica consisteix a elegir una regió del pla complex (denotada per T) i estudiar la relació entre els valors de z_n i T. La regió T és definida usualment com una forma (generalment de càlcul simple com un punt, línia o cercle) i una distància de tolerància. Qualsevol iteració que caiga dins de la distància de tolerància es considera "capturada".

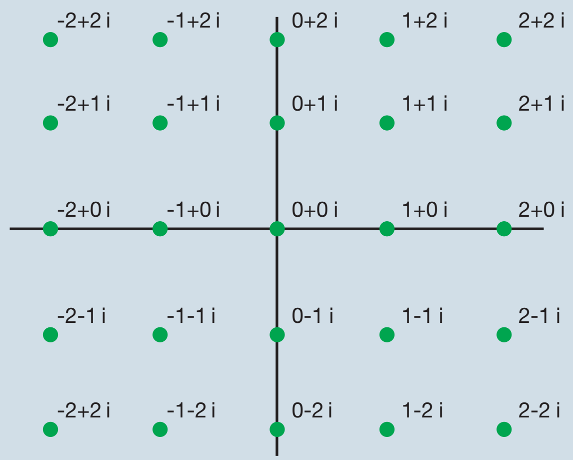
Estimació de curvatura



Captura d'òrbites



Algorisme d'enters gaussians



L'exposició "The Frontier between Art and Science" ha estat presentada a Espanya, França, Japó, Àustria, Iugoslàvia, Alemanya, Argentina, Brasil i Bèlgica.

Les implementacions primitives de l'algorisme de captura d'òrbites simplement buscaven qualsevol z_n que caiguera dins de la regió *T*, també denominada "trampa". Quan es donava aquesta circumstància es concloïa la iteració i s'acoloria el píxel d'acord amb la distància al centre de la regió *T*. D'aquí el terme "trampa"; una vegada que l'òrbita cau en *T*, aquesta és "atrapada" i la iteració finalitzada.

Hi ha moltes variants per a aquest mètode. En primer lloc, la forma de la regió *T* pot variar i transformar-se en figures més complexes com el·lipses, astroides, hipèrboles, corbes trigonomètriques o corbes polars com ara espirals o cardioides. Més lluny encara, aquestes trampes poden distorsionar-se o rotar-se, fins i tot incrementar la seua àrea amb cada iteració.

Un altre tipus de variants tracta la relació entre les distàncies de cada valor z_n respecte a *T*. La implementació clàssica, esmentada anteriorment, s'aturava quan un valor z_n queia dins de la distància de tolerància *T*. Però altres variants poden utilitzar l'últim valor z_n a caure en la trampa, o el més pròxim, o el més llunyà, etc. I fins i tot mètodes més exòtics poden combinar diverses d'aquestes distàncies simultàniament, fins el punt de fer quasi impossible predir quin tipus de resultats s'obtindrà.

Una variant de la captura d'òrbites és l'algorisme de enters gaussians. Un enter gaussià és un nombre complex les components real i imaginària del qual són ambdues nombres enters. L'algorisme calcula la distància de cada z_n a l'enter gaussià més pròxim, i llavors s'acoloreix basant-se en la distància menor obtinguda en la iteració.

Conceptualment, aquest mètode és semblant a una captura d'òrbites en què la trampa *T* (un punt) es repeteix al llarg del pla complex en una malla regular coincident amb els enters gaussians. Percebut d'aquesta manera, és clar que aquesta tècnica pot ser estesa a qualsevol altra forma *T*, amb diferents espaiats, i fins i tot malles no rectangulars, com les radials o les triangulars.

FRACTALS MULTICAPA

Avui dia la tècnica més rellevant de creació artística consisteix a combinar simultàniament diversos algorismes com els descrits anteriorment. El resultat final és un algorisme mixt d'enorme complexitat però que genera imatges de gran bellesa, que denominem fractals multicapa i que constitueixen l'avantguarda de l'art fractal modern. Les possibilitats de combinació són pràcticament infinites i amplien a límits insospitats les possibilitats d'expressió artística.

Aquesta nova tècnica va donar lloc a la unió de diversos artistes fractals en una exposició itinerant denominada "The Frontier between Art and Science", que ha estat presentada fins al moment a Espanya, França, Japó, Àustria, Iugoslàvia, Alemanya, Argentina, Brasil i Bèlgica, amb obres de gran format realitzades per Linda Allison, Sylvie Gallet, Damien Jones, Mario Markus, Janet Parke, Kerry Mitchell, Michael Field, Domenick Anuzzi, Iñigo Quilez, Klaus-Peter Kubik, Luke Plant, Javier Barrallo, Mark Townsend, Earl Hinrichs i Sharon Webb.

* ETS Arquitectura. Universidad del País Vasco

REFERÈNCIES

BARRALLO, Javier: *Geometría fractal: Algorítmica y representación*, Madrid, Editorial Anaya, 1992.
www.ultrafractal.com
www.fractalus.com

LES ESCULTURES SIMBÒLIQUES DE JOHN ROBINSON

Ronnie Brown*

John Robinson's Symbolic Sculpture. J. Robinson's symbolic sculpture is inspired by a diversity of mathematical motifs. The author looks at two of these in particular: the fibre bundles and Borromeo's rings, which reflect the artist's outstanding mathematical intuition.

Encara que l'associació de matemàtiques i art pot semblar en principi estranya, ambdues matèries comparteixen el seu interès comú per les estructures i les formes.

Per als investigadors, les matemàtiques són una aventura en el món de les formes, on els càlculs i el rigor són les eines utilitzades. Als matemàtics ens agrada, fonamentalment, investigar la lògica de la forma i les seues relacions amb altres formes, calcular, entendre, descriure, descobrir les complexitats i la bellesa d'una situació. Ens agrada conèixer el que és cert, no sols en un cas particular sinó també en general.

Matemàtiques i art tenen objectius diferents però alguns fonaments comuns. L'art pretén aconseguir alguns "punts on agafar-se" sobre les emocions, i per assolir aquest objectiu es basa en el concepte d'estructura i en un element estètic de proporció i ritme. En les matemàtiques, l'element estètic també representa un paper important a l'hora de determinar quines àrees, resultats o procediments de demostració són considerats interessants i fins i tot bells.

És un plaer fer aquesta introducció a les matemàtiques relacionades amb un artista modern, que està fascinat amb les estructures geomètriques i per les teories científiques sobre el nostre lloc a l'univers i que és capaç d'expressar-lo en el seu art.

L'any 1989, quan vaig conèixer John, vaig quedar molt sorprès amb la seua formació. Avorrit del tipus de vida que menava en una escola privada anglesa, a pesar d'haver-hi guanyat alguns premis en geometria i escultura, als setze anys va decidir enrolar-se en la marina mercant anglesa. Va desembarcar a Austràlia, on vivien alguns familiars llunyans. Va passar uns anys pastorejant ramats de bestiar o patrullant en la policia rural dels Kimberlies abans d'assentar-se durant deu anys al desert de les Ninety Miles, on va posar en marxa una explotació de corders. Es va casar i va començar la seua vida familiar. Cap al final d'aquests deu anys, quan l'explotació ja funcionava quasi sola, va comprar argila i va començar a modelar els seus fills i amics.

Acrobats.

Elation.

Als 35 anys, i cansat de la terrible calor i de les mosques de l'estiu australià al desert, va decidir vendre la seua explotació i amb els diners obtinguts viure dos anys, ell i la seua família, a Anglaterra, on encara vivia sa mare. Allí va continuar modelant figures de xiquets jugant o descansant, amants, mare i fill, joves practicant algun tipus d'esport… Va començar a vendre les seues escultures i va decidir quedar-se a Anglaterra.

Al voltant de 1975 va començar a treballar en les escultures simbòliques; així va nàixer la sèrie "Univers". El concepte "símbol" és la clau d'aquesta sèrie i queda il·lustrada pel contrast entre l'escultura figurativa *Acrobats* i l'escultura simbòlica *Elation* (*Goig*). Les formes que ell expressa en la sèrie "Univers" naixen de la seua vida i la seua experiència, però es veu forçat a buscar símbols dins de la geometria: esferes, ovoides, cons, quadrats, piràmides… Els títols de les seues escultures simbòliques no pretenen ser descriptius, sinó una "porta" i una indicació que la forma no és una abstracció sinó un símbol.

Des de 1990, còpies de diverses escultures de la sèrie "Univers" han estat exhibides en distintes universitats, com per exemple, les d'Oxford, Cambridge, Gal·les, Liverpool, Leeds, Barcelona, Saragossa…

Robinson és un geòmetra experimental notable, com es pot veure si estudiem les seues escultures simbòliques. Dels diversos motius matemàtics que han inspirat les escultures simbòliques de Robinson, n'he seleccionat dos: els fibrats i els anells de Borromeu.

FIBRATS

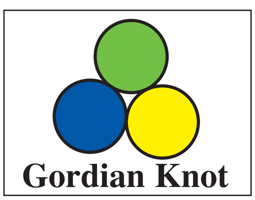
El model més fàcil de cinta de Moebius és prendre una tira llarga de paper i adherir-ne els extrems després de realitzar un gir de 180°. És un model d'una superfície d'una sola cara i amb vora connexa.

Podem veure la cinta de Moebius d'una altra manera. La cinta conté una circumferència al centre i podem pensar que és formada per segments iguals que tallen aquesta circumferència en angles rectes. Així, la podem veure com un segment que va girant a mesura que el traslladem al llarg de la circumferència.

Molts artistes han quedat fascinats amb les superfícies d'una sola cara, en especial amb la cinta de Moebius. John Robinson va ser un d'ells i es va adonar que, si en compte d'un segment, traslladem altres formes geomètriques al llarg d'una circumferència i amb diferents angles de gir, això proporciona figures diferents, sempre depenent de la forma geomètrica amb què comencem i de l'angle de gir elegit. D'aquesta manera, Robinson va descobrir un concepte molt important en matemàtiques: els fibrats.

Un fibrat és un objecte matemàtic que consisteix en un espai base, que per a la cinta de Moebius i altres escultures de Robinson és la circumferència. La fibra és la figura que es trasllada al llarg de la circumferència. Una informació extra que serveix per a definir l'objecte o espai total del fibrat és l'angle de gir de la fibra quan es trasllada al llarg de la circumferència. Aquest angle ha d'estar relacionat amb la forma de la fibra perquè les fibres "s'enganxen bé" i donen l'espai total del fibrat. Quan la fibra és un segment, els angles possibles són els múltiples de 180°. En particular, si prenem un angle de gir nul obtenim la superfície d'un cilindre que té dues cares i una vora formada per dues

Eternity és una escultura en bronze d'1,5 metres d'altura realitzada per J. Robinson el 1980. En les tres fotografies de sota apareix l'escultor (a la dreta, en la primera fotografia) realitzant un model en fusta. Per fer-lo va preparar cent triangles equilàters, cadascun dels quals perforat pel centre, i els va inserir en una anella fent-los girar a poc a poc, de manera que al final del recorregut cada vèrtex coincidira amb el contigu. Llavors els vèrtexs formen una sola corba tancada i els costats del triangle donen origen a una única banda que recobreix tota la superfície i que per a l'autor simbolitza l'eternitat.



A l'esquerra, figura 1. Dalt, *Gordian Knot*. Escultura en bronze d'1 metre d'altura realitzada el 1982. Es basa en la mateixa idea que l'anterior, però s'ha substituït el triangle pels tres cercles, de manera que se n'obté un nus triple.

Dependent Beings. En aquesta escultura, la figura que es fa girar al voltant d'una anella és un quadrat, de manera que els seus costats originen una superfície de dues cares. L'artista ha aplicat acabats de textura diferent en cadascuna per tal de simbolitzar la masculinitat i la feminitat, que s'uneixen per convertir-se en un ésser únic.

circumferències. En el cas de la cinta de Moebius, la fibra és també un segment, però l'angle de gir és de 180°; ara obtenim una superfície amb només una cara i que té per vora una corba tancada simple.

Si prenem com a fibra un triangle equilàter, l'angle de gir hauria de ser qualsevol múltiple de 120°. El cas més senzill de nou, corresponent al gir de 0°, donaria simplement una rosquilla de secció triangular. Els vèrtexs descriuen tres circumferències que no es tallen. L'escultura *Eternity* es va fer usant un gir de 120° i, en aquest cas, si seguim el recorregut de qualsevol dels vèrtexs, tindrem una corba que només es tanca al cap de tres voltes i ens dóna un nus de trèvol. En les fotografies es poden veure alguns dels passos seguits per construir-la, els quals mostren clarament la fibra triangular del fibrat. També usant un gir de 120° s'ha construït *Gordian Knot* (*Nus gordià*); en aquest cas la fibra és la unió de tres cercles tangents entre si, com es veu en la figura 1. En cas que usem com a fibra un quadrat, l'angle de gir ha de ser un múltiple de 90°. L'escultura *Dependent Beings* (*Éssers dependents*) està feta amb un gir de 180°.

Al meu parer el que Robinson ha aconseguit és mostrar que aquestes formes que es poden descriure amb termes matemàtics també poden transformar-se en objectes d'una sorprenent bellesa, amb una adequada elecció del material i de les proporcions.

El concepte de fibrat és tan general que descriu noves classes d'objectes que són difícils de visualitzar, ja que només és possible realitzar-los pròpiament en un espai de moltes dimensions. Suposem, per exemple, que canviem l'espai base de la cinta de Moebius per un objecte una miqueta més complex com pot ser una esfera. La fibra podria ser un dels cinc sòlids platònics (tetràedre, cub, octàedre, dodecàedre o icosàedre). Com podríem descriure i entendre la geometria, les relacions espacials, dels objectes resultants? Quants objectes d'aquesta mena hi ha? Preguntes d'aquesta mena són les que intenten respondre les matemàtiques.

ELS ANELLS DE BORROMEU

Com es pot veure a la figura 2, els anells de Borromeu són tres circumferències encastades entre si de manera que cap no es pot separar de les altres, però cada una està separada de qualsevol altra. Açò és un exemple del que els matemàtics anomenem un encast de tres components connexos. L'estudi d'aquest tipus d'encastos forma part de la teoria de nusos.

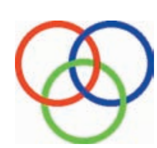
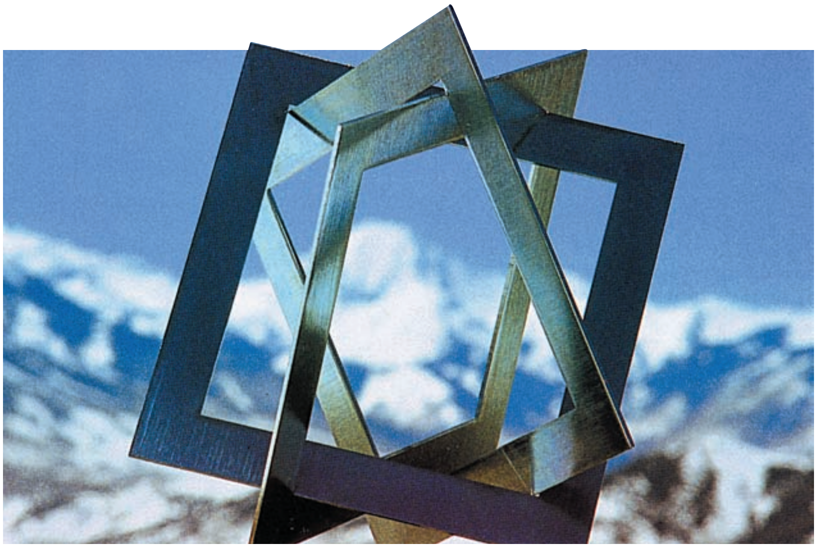


Figura 2.

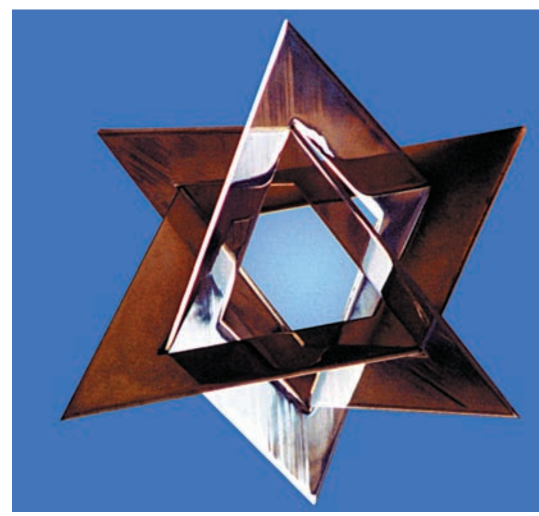
El nom prové d'una família italiana, els Borromeu,



Creation.

Intuition.

Bonds of Friendship.



Genesis.

Rhythm of Life.

«JOHN ROBINSON HA ACONSEGUIT MOSTRAR QUE AQUESTES FORMES QUE PODEN DESCRIURE'S AMB TERMES MATEMÀTICS TAMBÉ PODEN TRANSFORMAR-SE EN OBJECTES D'UNA SORPRENENT BELLESA»

Inmortality.

que van començar a usar-los en l'emblema familiar en el segle XV, si bé és cert que s'han trobat motius relacionats amb aquests anells en la cultura celta i víkinga.

Si intentem construir els anells de Borromeu amb fil d'aram ens adonarem que això és impossible usant circumferències planes, sempre s'han de doblegar una mica (figura 3). En la literatura hi ha diverses demostracions rigoroses de la impossibilitat de construir els anells de Borromeu usant circumferències planes. Per exemple, una d'elemental és la de B. Lindström i H. O. Zetterström (1991)[1]. No obstant això, sí que és possible construir-los usant el·lipses en compte de circumferències (figura 4).

Figura 3.

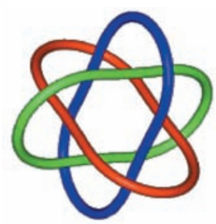


Figura 4.

John Robinson, experimentant amb quadrats, es va adonar que usant quadrats en compte de circumferències és possible construir els anells de Borromeu. D'aquesta manera va crear la seua escultura *Creation* i va ser sorprenent la figura d'enorme bellesa que va aconseguir. Un pot entretenir-se a construir per si mateix en cartolina uns anells de Borromeu amb forma de quadrat i comprovar que si elegeix bé la longitud del costat, l'estructura es pot plegar; tindríem així una escultura transportable.

«EXPERIMENTANT AMB QUADRATS, ES VA ADONAR QUE USANT QUADRATS EN COMPTE DE CIRCUMFERÈNCIES ÉS POSSIBLE CONSTRUIR ELS ANELLS DE BORROMEU»

Uns cinc anys després d'haver fet *Creation,* Robinson va visitar el mausoleu d'Ismail Samani, a Bukhara (Uzbekistan). Es tracta d'un edifici petit, considerat la perla de l'arquitectura islàmica, però que va ser construït, de fet, pels seguidors del zoroastrisme l'any 907 –poc abans de la islamització de la zona– com a temple per a l'adoració del foc. Damunt de cada una de les quatre entrades al temple hi ha gravats en pedra dos símbols, un d'ells és el quadrat dins del quadrat dins del quadrat: imagineu-vos la sorpresa de l'escultor quan la guia va comentar que era el símbol de la creació per als seguidors del zoroastrisme.

Intuition està construïda aprofitant la idea dels anells de Borromeu, però amb triangles en compte de quadrats. Per a Robinson representa el nucli lligat de l'estabilitat en el centre del coneixement personal. Sovint sense raó aparent, n'ixen centellejos d'originalitat i de descobriment. Aquests centellejos, que són el que anomenem intuïció, apareixen en totes direccions però provenen del nucli de l'experiència. Molts lectors deuen haver vist la pel·lícula *2001 Una odissea de l'espai* i de segur que recorden les escenes inicials: la intuïció representa un paper important en el progrés de les espècies.

Un cert temps després de finalitzar aquesta escultura, va rebre una carta del doctor Peter Cromwell en la qual incloïa una fotografia de la Pedra de les Llegendes, una peça escandinava del segle IX que mostrava l'Estel de Wotan i que resulta que és una versió de l'escultura *Intuition*.

Es podria dir que la intuïció d'Isaac Newton va canviar el món. Per això Robinson considera que és un honor increïble que la seua escultura *Intuition* estiga a l'entrada de l'Institute Isaac Newton de Cambridge. També considera un gran honor que una còpia d'aquesta peça fóra donada l'any 1997 al Fields Institute for Research in Mathematical Sciences de Toronto amb motiu del norantè aniversari del matemàtic H. S. M. Coxeter.

Una altra construcció de gran bellesa s'aconsegueix també utilitzant rombes. En aquest cas Robinson la va titular *Genesis*.

En la sèrie "Univers" de Robinson hi ha altres escultures, a banda de *Creation* i *Intuition,* esmentades anteriorment, que són exemples de nusos o encastos estudiats en la teoria de nusos, com ara *Bonds of Friendship* ("Llaços d'amistat"), que és un encast d'Hopf, *Rhythm of Life*, que conté un nus toroidal (15, 4), és a dir, que fa quinze voltes al voltant del cos de la rosquilla i quatre al voltant del buit central. Finalment, *Immortality* és un nus anomenat de trèvol, que amb la notació anterior s'expressaria com un nus (2, 3).

---

* Professor emèrit de l'School of Informatics, Departament de Matemàtiques, University of Wales, Bangor.

Les fotografies de les escultures es reprodueixen por cortesia de J. Robinson i Edition Limitee.

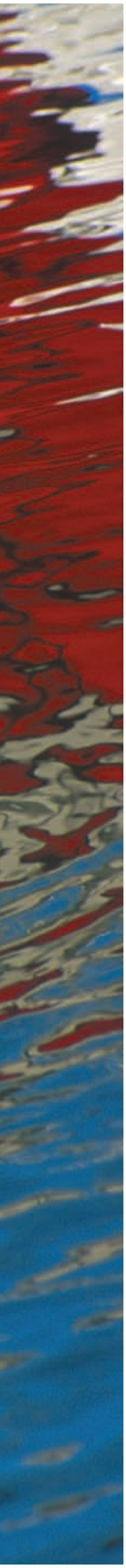
Adaptació: F. Mascaró. Departament de Geometria i Topologia, Universitat de València

NOTES

1 LINDSTRÖM, B.; H. O. Zetterström (1991): "Borromean circles are impossible", *Amer. Math. Monthly*, 98, pp 340-341.

http://www.cpm.informatics.bangor.ac.uk/sculpture/sculpture.html

Simetría roja, Pilar Moreno.



POESIA ENTRE TEOREMES

Antonio Córdoba*

POETRY WITHIN THEOREMS. POETRY IS THE LITERARY GENRE THAT IS MOST CLOSELY ALLIED WITH MATHEMATICAL STYLE. AMONG THE WORKS OF GREAT POETS WE CAN FIND VERSES INSPIRED BY MATHEMATICS, AND AS THE AUTHOR DEMONSTRATES THE CLOSE RELATIONSHIP BETWEEN THEM CAN NOT BE REDUCED TO A MERE ANTHOLOGY.

Què fa que un poema siga complet? Que no puguem sostraure'n ni afegir-hi una paraula sense destrossar-lo, i que no es redueshesca a uns pocs versos brillants al costat d'altres d'anodins?

El aire se serena
y viste de hermosura y luz no usada,
Salinas, cuando suena
la música extremada
por vuestra sabia mano gobernada.

Fray Luis de León

Enhiesto, surtidor de sombra y sueño,
que acongojas al cielo con tu lanza.
Chorro que a las estrellas casi alcanza
devanado a sí mismo en loco empeño.

GERARDO DIEGO

To see a world in a grain of sand
and a heaven in a wild flower,
hold infinity in the palm of your hand
an eternity in an hour.

WILLIAM BLAKE

Nadie rebaje a lágrima o reproche
esta declaración de la maestría
de Dios, que con magnífica ironía
me dio a la vez los libros y la noche.

JORGE L. BORGES

Què fa que un teorema siga profund i important? Quina dosi de veritat i de bellesa en l'encast de les idees converteixen la seua demostració en una fita gloriosa i incorruptible del pensament?

Fa més de vint-i-sis segles, els pitagòrics van descobrir que l'arrel quadrada de 2, la longitud de la diagonal d'un quadrat unitat, no és un nombre racional: no és el quocient de dos enters. Es tracta, possiblement, de la primera revolució científica de què tenim constància històrica, perquè ensorrava el paradigma pitagòric que considerava els nombres enters l'essència última de l'univers. Segons la llegenda, va ser Hipàs de Metapont qui va fer aquell descobriment que la matemàtica grega va tardar uns quants segles a

Espiral azul, Pilar Moreno.

entomar. Però cal remuntar-se a finals del segle XIX perquè G. Cantor ens obrira el camí cap a la naturalesa íntima del continu dels nombres reals. La prova d'Hipàs va ser recollida per Euclides en aquella esplèndida antologia de teoremes que són els *Elements*, i manté la mateixa elegància i frescor que va tenir al principi. Com molt bé va escriure G. H. Hardy, el pas dels anys no ha pogut afegir ni una simple arruga a la bellesa d'aquella magnífica demostració.

Ajuntar la poesia amb les matemàtiques deu semblar una contradicció a la majoria de ciutadans, que associen aquestes últimes no amb la recerca d'algun tipus de bellesa, sinó més aviat amb una espècie de tortura mental soferta durant els anys d'aprenentatge escolar. No obstant això, des de Galileu sabem que les matemàtiques són el llenguatge en què s'expressa la naturalesa, i que la descripció de l'univers requereix les matemàtiques i la seua capacitat per a crear les definicions, les metàfores precises i les regles del raonament amb què articular les idees que ens porten a demostrar la veritat. És cert que els poemes no es fan només amb idees, sinó amb paraules, i que únicament amb metàfores és difícil arribar a res en ciència. Però tota demostració d'un fet matemàtic profund, que haja necessitat noves i enginyoses astúcies de la raó, exigirà un llenguatge precís i bell, i l'adquisició d'alguna forma d'anomenar els conceptes creats. La llengua parlada és un instrument eminentment pràctic que té com a finalitat la comprensió. Si ens parem a buscar en el diccionari de la RAE qualsevol definició, de seguida arribarem a un cercle viciós, un fet que resultaria francament odiós i intolerable en qualsevol teoria matemàtica. En poesia el llenguatge és dominat per un sentiment musical inconscient: rimes, explícites o ocultes, i ritmes sostinguts, sense cap necessitat de justificació, com a música de les esferes, de les impressions i dels sentiments personals.

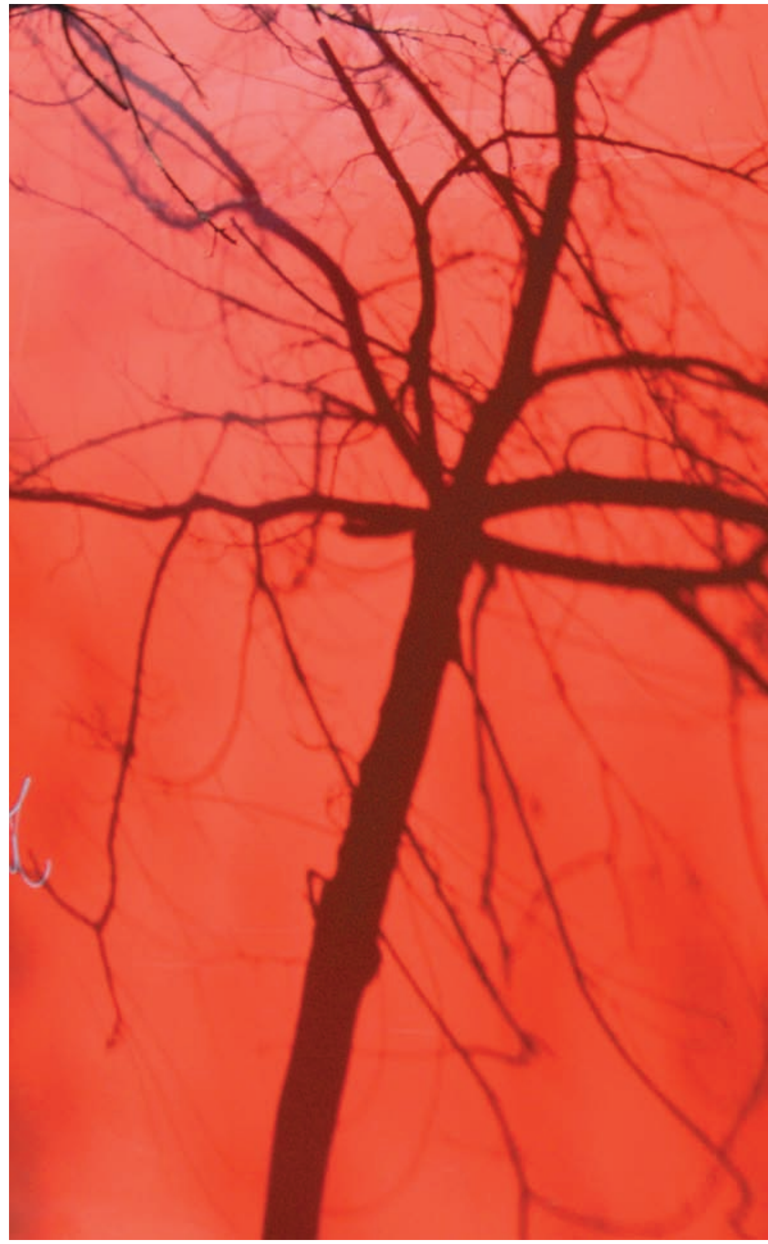
No és, doncs, estrany que hi haja matemàtics amb una "vena poètica" o que, recíprocament, trobem alguns poetes que han caigut fascinats per les matemàtiques. Un exemple notable és Omar Jayyam, astrònom, assessor polític i sobretot poeta i matemàtic. La seua vida, que va transcórrer a Pèrsia entre els segles XI i XII, ha estat novel·lada per Amin Maalouf en el seu excel·lent llibre *Samarcanda*. Jayyam es va interessar per l'equació cúbica, que va saber resoldre amb mètodes geomètrics. En poesia, ens han arribat els seus *Rubaiyat*, que és una col·lecció de delicioses quartetes, com ara:

Un jardí, una vincladissa donzella,
un cànter de vi, el meu desig i la meua amargor.
Heus ací el meu paradís i el meu infern.
Però qui ha recorregut el cel i l'infern?

Una mica de pa, un poc d'aigua fresca,
l'ombra d'un arbre i els teus ulls.
Cap soldà més feliç que jo.
Cap captaire més trist.

El món inabastable: un gra de pols en el buit.
Tota la ciència de l'home: paraules.
Els pobles, les bèsties i les flors dels set climes: ombres.
El fruit de la teua meditació constant: el no-res.

En cada teorema hi ha la voluntat implícita d'expressar un fet matemàtic rellevant amb un mínim d'hipòtesis, necessàries i suficients si és possible, en uns termes diàfans, sense adjectius innecessaris, però amb l'adequada riquesa d'arguments indirectes i



Botánica fractal (Ritmos), Pilar Moreno.

«AJUNTAR LA POESIA AMB LES MATEMÀTIQUES DEU SEMBLAR UNA CONTRADICCIÓ A LA MAJORIA DE CIUTADANS, QUE ASSOCIEN AQUESTES ÚLTIMES NO AMB LA RECERCA D'ALGUN TIPUS DE BELLESA, SINÓ MÉS AVIAT AMB UNA ESPÈCIE DE TORTURA MENTAL SOFERTA DURANT ELS ANYS D'APRENENTATGE ESCOLAR» construccions delicades, com tan bé expressen els versos de Robert Browning[1]:

Oh! The little more!
And how much it is.
And the little less!
And how many world away.

La poesia és el gènere literari que millor s'ajusta a l'estil de les matemàtiques. Entre els grans poetes trobem versos que s'hi inspiren. Fins i tot en la literatura espanyola, a pesar que els hispans, fins fa ben poc, no les hàgem conreat degudament. Badada desgraciada per culpa de la qual s'ha patit al llarg de la història, des de Felip II, que no tenia qui li assegurara el secret de les seues comunicacions, fins aquests negres i *chapapoteros* dies. Assenyalem, doncs, alguns exemples, que donen testimoni fefaent de com els nostres millors poetes es van deixar seduir per la bellesa de les figures geomètriques i fascinar pels nombres.

La divina proporción

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

RAFAEL ALBERTI

La voz a ti debida

¡Sí, todo con exceso:
la luz, la vida y el mar!
Plural todo, plural,
luces, vidas y mares.
A subir a ascender
de docenas a cientos,
de cientos a millar,
en una jubilosa
repetición sin fin,
de tu amor, unidad.
Tablas, plumas y máquinas,
todo a multiplicar,
caricia por caricia,
abrazo por volcán.
Hay que cansar los números.
Que cuenten sin parar,
que se embriaguen contando,
y que no sepan ya
cuál de ellos será el último:
¡qué vivir sin final!
Que un gran tropel de ceros
asalte nuestras dichas
esbeltas, al pasar,
y las lleve a su cima.
Que se rompan las cifras,
sin poder calcular
ni el tiempo ni los besos.
Y al otro lado ya
de cómputos, de sinos,
entregarnos a ciegas
–¡exceso, qué penúltimo!–
a un gran fondo azaroso
que irresistiblemente está
cantándonos a gritos
fúlgido de futuro:
"Eso no es nada, aún.
Buscaos bien, hay más".

PEDRO SALINAS

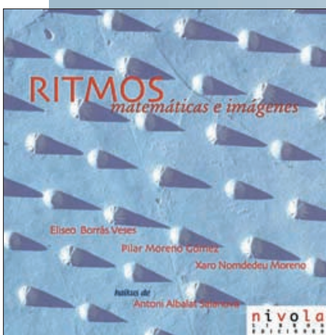
Concloguem aquesta miniantologia amb uns fragments de l'"Oda a los números" de Pablo Neruda, d'"El nombre Pi" de Wislawa Szymborska, tots dos premis Nobel de literatura, i amb el poema "Tsunami", del també premi Nobel, encara que de química, Roald Hoffmann.

Oda a los números

¡Qué sed
de saber cuánto!
¡Qué hambre
de saber
cuántas
estrellas tiene el cielo!

Paseo para ciclistas, Pilar Moreno.

‘RITMES WE LIVE BY’



RITMOS. MATEMÁTICAS E IMÁGENES
ELISEO BORRÁS, PILAR MORENO, XARO NOMDEDÉU
HAIKUS D'ANTONI ALBALAT
Ed. Nivola, 2002, 336 pp.

> “it is impossible to be a mathematician without having the soul of a poet…”
> SOFIA KOVALEVSKAIA

Aquesta ànima de poeta és la que batega en les fotografies que inicien cadascun dels 50 capítols del llibre i inspira el camí que cal seguir en la recerca del model matemàtic amb què solen acabar aquests.

L'haiku (estrofa pròpia de la mística zen japonesa, altament conreada en la literatura peninsular i exemple de condensació verbal, però d'alta intensitat semiòtica), que segueix cada fotografia, òbviament, és obra del poeta. No menys poètica, tanmateix, ha estat l'ànima de l'editor –i dels dissenyadors–, que han aconseguit un objecte bell *per se* i també pel que fa al contingut del llibre; no debades, les ressenyes de llibres de Nivola són freqüents a MÈTODE.

Aquest llibre constata allò que deia el famós matemàtic anglès Godfrey Harold Hardy: “un matemàtic, com un poeta, és un creador d'expressions estètiques”, o Herman Weil: “El meu treball ha intentat sempre unir la veritat amb la bellesa; però si en alguna ocasió vaig haver de decidir-me entre l'una i l'altra, vaig triar la bellesa.”

La mateixa Sofia Kovaleskaia, que va ser la primera catedràtica de matemàtiques a Europa, dedicà part de la seua vida a la creació literària. William Hamilton va escriure poemes mentre va viure, encara que considerava que el seu més bell poema era la producció matemàtica que va realitzar. Això per no parlar de Lewis Carroll –o el reverend Charles Dogson– que ha passat a la història pels seus contes plens d'enigmes lògics (com ara *Alícia al país de les meravelles* o *A través de l'espill)* i Omar Jayyam, que al segle XII va ser poeta i matemàtic.

Un dels mecanismes més habituals, tant de la poesia, com de les matemàtiques, i de totes les arts, és l'estratègia de la repetició, realitat o metàfora que dota d'harmonia i ritme no sols els constructes humans sinó també les estructures naturals. D'ací el títol i la intenció d'aquest llibre.

Podem descobrir-hi fotografies que són poemes, haikus que són instantànies (la il·luminació zen seria un *snapshot* místic, per exemple) i imatges obtingudes per ordinador, gràcies al llenguatge matemàtic, que permet simular la totalitat o part de cadascuna de les fotografies.

La fusió d'aquests tres punts de vista, imatge, paraula i matemàtiques, ha produït una obra no gens fàcil de classificar.

Tal vegada podria ser inclosa en la inexistent classe de la:

M
A
F O T E (D) S I A
O
P

Cruïlla que podríem definir com l'art de l'expressió poètica a través de la imatge, la paraula i la modelització matemàtica del contingut. I també a través de la forma i organització del continent.

El llibre es divideix en quatre parts no explícites: simetries –produïdes per la repetició d'un element bàsic mitjançant translacions, girs i simetries axials–, projeccions presents en tota fotografia amb ombres, enrotllaments –espirals, hèlixs, concoespirals– i fractals que simulen elements de la natura.

En cadascuna d'aquestes seccions del llibre és present la repetició d'elements, formes o procediments. La repetició de formes és evident a la primera part; també és present a les dues últimes, encara que dissimulada pel canvi d'escala. A la segona part, es repeteixen els elements, i en totes trobem una repetició de procediment, que ha permès utilitzar el llenguatge MSWLOGO per simular la imatge fotogràfica que inicia cada capítol, gràcies al poder recursiu d'aquest llenguatge.

Les repeticions, com els haikus, tal i com els definia Matshuo Basho: “l'haiku és el que passa ara i ací” –també la fotografia registra l'ara i ací– són el que teniu sempre a la vora i, especialment, en aquest llibre.

BALMA D'EUDEMON

Nos pasamos
la infancia
contando piedras, plantas,
dedos, arenas, dientes,
la juventud contando
pétalos, cabelleras.
Contamos
los colores, los años,
las vidas y los besos,
en el campo
los bueyes, en el mar
las olas. Los navíos
se hicieron cifras que se fecundaban.
Los números parían.
Las ciudades eran miles, millones,
el trigo centenares
de unidades que adentro
tenían otros números pequeños,
más pequeños que un grano.
El tiempo se hizo número.
La luz fue numerada.

PABLO NERUDA

Tsunami[2]

A SOLITON is
a singularity
of wave
motion, an edge
travelling just
that way. We saw
one, once
filmed moving leed-
lessly cross
a platinum surface.
Soliton pass
through
each
other
unperturbed.
You are a wave.
Not standing, nor
travelling, satisfying
no equations.
You are a wave
which will not be (Fourier)
analyzed.
You are a wave, in
your eyes I sink
willingly.
Not solitons,
we can't pass through
unaltered.

ROALD HOFFMANN

Jugando con el ratón,
Pilar Moreno.

El nombre Pi

Digne d'admiració és el nombre Pi
tres coma catorze
totes les xifres següents també són inicials,
quinze noranta-dos porquè mai no s'acaba.
No es deixa abastar seixanta-cinc trenta-cinc amb la
mirada,
vuitanta-nou amb els càlculs
setanta-nou amb la imaginació
i ni tan sols trenta-dos trenta-vuit amb una broma o siga
comparació
quaranta-sis amb res
vint-i-sis quaranta-tres al món.
La serp més llarga de la terra després de molts metros
s'acaba.
El mateix fan encara que una mica després les serps de
les faules.
La comparsa de xifres que forma el número Pi
no s'atura en la vora del full,
és capaç de continuar per la taula, l'aire,
la paret, la fulla d'un arbre, un niu, els núbols, i així
fins al cel,
a través de tot l'inflament i incommensurabilitat
celestials.

WISLAWA SZYMBORSKA

Són més que notables els versos d'aquests poetes. Encara que podríem dir que potser no es troben entre els millors de les seues produccions respectives. La raó àuria no és, després de tot, una cosa tan important en matemàtiques, i el poema sobre Pi és un poc trampós en algun dels seus versos, perquè encara no sabem la normalitat del desenvolupament decimal al·ludit. *Vanitas vanitatis et omnia vanitas!* Crec fermament que la relació profunda entre la poesia i les matemàtiques no pot ser reduïda a una mera antologia de poemes amb contingut matemàtic, per inspirats que ens semblen.

Acabem aquest assaig assenyalant també certa analogia entre els comportaments de poetes i matemàtics.

Valle de Incles (Andorra), Pilar Moreno.

Tractant-se d'artistes que busquen la bellesa a través de les paraules, les metàfores i la creació de llenguatge, podríem esperar entre els poetes un tracte exquisit, elegant i cortès. Res més allunyat de la realitat: són de sobra coneguts els insults mutus entre Quevedo, Lope i Góngora, les opinions gens piadoses que Juan Ramón Jiménez tenia dels poetes del seu temps o les encara recents de José Ángel Valente. No sembla que el club dels poetes siga especialment indulgent amb si mateix. Entre els matemàtics, gent especialitzada en la pulcritud del raonament, en la recerca de la veritat i de la bellesa de les idees encastades, que formen una elit planetària, un tant àcrata i allunyada de les convencions socials, també es donen els comportaments mesquins, propis d'un col·lectiu que, com ocorre amb els poetes, és el principal, si no l'únic, observador i lector de si mateix. L'elegància de les maneres sol anar paral·lela en el seu descens a la qualitat i universalitat dels artistes, fins arribar a les versions més locals i sectàries: els purs, els aplicats, els ultraistes, els geòmetres, els analistes, els del nord, els del sud, els de la boina, els del realisme, els simbolistes, els que intertextualitzen, els que es repeteixen, els de la quotidianitat, els dadaistes, els bornològics, els algebristes, els topòlegs, els parnassians, els que publiquen, els que no publiquen, els surrealistes. No obstant això, sempre resulta convenient recordar que fins i tot la poesia té les seues regles, i les matemàtiques les seues llicències.

*Departament de Matemàtiques, Universidad Autónoma de Madrid

TRADUCCIÓ DELS POEMES EN ANGLÈS

1 Versos de Robert Browning:
Oh, el poquet més!/ I com més és./ I el poquet menys./ I quants mons se'ns hi van!

2 "Tsunami", de Roald Hoffmann (traducció de Carlos Quiroga):
Un solitó/ és una singularitat/ en una ona/ en marxa, una vora/ que es desplaça/ només en aquella direcció./ En filmàrem en una ocasió/ un que es movia/ desacuradament/ per una superfície de platí./Els solitons passen/ impertorbables/ els uns/ a través/ dels altres./ Tu ets una ona./ No estàs dret, ni/ viatges, ni satisfàs/ cap equació./ Ets una ona que no serà/ sotmesa/ a l'anàlisi (de Fourier)./ Tu ets una ona; en/ els teus ulls/ m'afone de bona gana.
No som solitons,/ no podem travessar/ inalterats.

IL·LUSTRACIONS
Fotografies de Pilar Moreno (Institut E. S. Benlliure, València)

SUBSCRIU-TE A MÈTODE

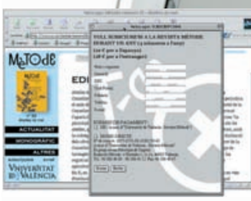
Ara pots subscriure't a Mètode, omplint i enviant-nos aquesta butlleta (o bé una fotocòpia) a la redacció de la revista o des del web de Mètode: **http://www.uv.es/metode** omplint el formulari de subscripció (i enviant-nos una fotocòpia de l'ingrès).

Mètode: Jardí Botànic de la Universitat de València. C/ Quart, 80. 46008 València.
Tel.: 96 315 68 28. Fax: 96 315 68 26.

Encara no coneixes l'edició electrònica de Mètode..?

A través de la pàgina web de Mètode pots accedir als números que més t'interessen.
Pots navegar dins de totes les seccions…, llegir els articles més interessants…, veure les fotos que els il·lustren.
També et pots subscriure a Mètode omplint el formulari de subscripció.





http://www.uv.es/metode

❏ Vull subscriure'm a la revista MÈTODE durant un any (4 números l'any)
(Preu de subscripció anual:
12 € per a Espanya, **18** € per a l'estranger)

FORMES DE PAGAMENT:

❏ XEC
(a nom d'"Universitat de València - Revista Mètode")

❏ INGRÉS DIRECTE
Nº de compte: 2077-0735-89-3100159143
(a nom d'"Universitat de València - Revista Mètode")
Es prega enviar fotocòpia de l'ingrés

Nom i cognoms……………………………………

Domicili……………………………………

DNI……………………………………
Codi Postal……………………………………
Població……………………………………

Telèfon……………………………………

CURSOS AL BOTÀNIC

Paisatges de l’oblit, noves presències en el món rural

PROFESSORS:
Artemi Cerdà, Agustí Hernàndez, Jorge Cruz Orozco, Ferran Zurriaga, Enric Roncero i Enric Guinot.

PRESENTACIÓ:
Basat en el monogràfic de l’últim exemplar de la revista Mètode, aquest curs ens endinsa en el nou fenomen de repoblament del camp i la muntanya després de l’abandonament a què fou sotmès amb els desplaçaments cap als nuclis urbans.

DATES I HORARIS:
Sis xarrades de dues hores, de 18 a 20 h, **els dies 2, 3, 4, 9, 10, i 11 de juny.**
Eixida de sis hores de matí el dia 7 de juny a l’Horta Nord i visita a velles alqueries i molins d’aigua.

NOMBRE D’HORES: 18 h.

PREU: 35€.

NOMBRE MÀXIM D’ALUMNES: 30.

PROGRAMA:
El curs consistirà en diferents xarrades sobre els aspectes que envolten el nou repoblament del món rural, i en l’excursió es mostraran diferents construccions molt importants en la seua època i que ara han quedat abandonades.

Xarrada 1. Artemi Cerdà ens parlarà de les conseqüències que té per a la terra l’abandó permanent o canvi d’ús quant a l’erosió, incendis, etc.

Xarrada 2. Agustí Hernàndez tractarà sobre les barraques i alqueries en perill d’extinció.

Xarrada 3. Jorge Cruz Orozco ens endinsarà en la neu com a recurs natural al món rural.

Xarrada 4. Ferran Zurriaga parlarà de l’art i usos del margalló.

Xarrada 5. Enric Roncero ens portarà a “viure” a la muntanya, l’antiga forma de vida als masos de muntanya.

Xarrada 6. Enric Guinot tancarà el cicle tractant unes construccions que abans eren bàsiques al món rural i que ara han quedat oblidades: els molins d’aigua, els quals també es visitaran en l’excursió.

“Barraques, alqueries, masos, caves de neu, molins d’aigua, vells paisatges del passat…”

MATRÍCULA:
Per a matricular-vos-hi, escriviu a Eva Pastor (**epase@alumni.uv.es**). Tel.: 96 315 68 00.

TERMINI DE MATRÍCULA:
31 maig de 2003.

organitzen:
Universitat de València
Jardí Botànic
Mètode

col·labora:
Vicerectorat de Cultura
Servei de l’Àrea Cultural
Universitat de València

patrocina:
Santander Central Hispano