

# Grafs aleatoris: teoria i aplicacions, de la naturalesa a la societat i al cervell

MIHYUN KANG I ZDENĚK PETRÁŠEK

**Resum:** La teoria dels grafs aleatoris tracta de les propietats asimptòtiques dels grafs dotats d'una determinada distribució de probabilitat; per exemple, estudia com evoluciona l'estructura de les components d'un graf aleatori uniforme a mesura que el nombre d'arestes augmenta. Des de l'inici de la teoria dels grafs aleatoris, formulada per Erdős i Rényi fa més de cinquanta anys, s'han introduït i estudiat diversos models de grafs aleatoris. Mentrestant la teoria de grafs s'ha anat obrint camí en altres ciències com una font molt rica de models per a descriure aspectes fonamentals d'un ventall molt ampli de fenòmens de gran complexitat. Aquest article és una introducció a la teoria dels grafs aleatoris i els seus progressos recents (amb èmfasi en la transició de fase i els fenòmens crítics, un tema favorit del primer autor) i a les aplicacions d'aquesta teoria.

Es tracta d'una versió ampliada de l'article «Random graphs: from nature to society to the brain» [35] publicat al *Seoul Intelligencer*, un número especial del *Math. Intelligencer*, editat en ocasió del Congrés Internacional de Matemàtics que va tenir lloc a Seül l'any 2014.

**Paraules clau:** component gegant, transició de fase, teoremes límit, grafs aleatoris.

**Classificació MSC2010:** 05C80, 05C65.

## 1 Grafs aleatoris d'Erdős-Rényi

### 1.1 El començament

Erdős i Rényi van iniciar la teoria dels grafs aleatoris en el seu article «On random graphs I.» [26], publicat el 1959, en el qual van considerar, entre altres qüestions, el problema de trobar la probabilitat que un graf aleatori sigui connex, i la probabilitat que la component més gran d'un graf aleatori cobreixi gairebé tots els vèrtexs. En un article posterior titulat «On the evolution of random graphs», i publicat el 1960 [27], Erdős i Rényi van descobrir que un graf

---

Aquest treball va aparèixer en anglès amb el títol «Random graphs: theory and applications from nature to society to the brain» a *Internationale Mathematische Nachrichten*, 227 (2014), 1–24, revista de la Societat Austríaca de Matemàtiques. Agraïm als editors d'aquesta revista el permís per a publicar-ne la traducció al català feta pels editors i revisada per Marc Noy.

aleatori experimenta un canvi dràstic en el nombre de vèrtexs de la component més gran quan el nombre d'arestes és aproximadament la meitat del nombre de vèrtexs, és a dir, hi ha una *transició de fase* en l'evolució d'un graf aleatori davant de *l'aparició de la component gegant*.

Abans de passar a discutir el fenomen de la transició de fase amb més detall, introduïm algunes definicions bàsiques. Un graf  $G = (V, E)$  és un parell que consisteix en un conjunt  $V$  dels vèrtexs (o nodes) i un conjunt  $E$  de les arestes (o línies), que són subconjunts de dos elements de  $V$ . El nombre d'arestes incidents a un vèrtex s'anomena el *grau* del vèrtex. Una successió de vèrtexs diferents  $(v_1, \dots, v_k)$  en la qual cada parell consecutiu de vèrtexs forma una aresta s'anomena un *camí* de  $v_1$  a  $v_k$  si  $v_1 \neq v_k$ , i s'anomena un *cicle* si  $v_1 = v_k$ . Es diu que un vèrtex  $v$  és *accessible* des d'un altre vèrtex  $w$  si hi ha un camí de  $v$  a  $w$ . L'accessibilitat és una relació d'equivalència i les classes d'equivalència són les *components* de  $G$ . El nombre de vèrtexs que hi ha en una component és l'*ordre* de la component. Si un graf només té una component, es diu que és *connex*. Un graf connex sense cicles s'anomena un *arbre*, i un graf sense cicles és un *bosc*. Un graf connex que tingui exactament un cicle s'anomena *unicíclic*.

## 1.2 Models d'Erdős-Rényi de grafs aleatoris

Sota el nom de *grafs aleatoris d'Erdős-Rényi* es coneixen tres models de grafs aleatoris:

- (1) El graf aleatori uniforme  $G(n, m)$  és un graf elegit uniformement a l'atzar d'entre el conjunt de tots els grafs que tenen com a conjunt de vèrtexs  $[n] := \{1, \dots, n\}$  i  $m$  arestes, per a un enter  $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$ .
- (2) El graf aleatori binomial  $G(n, p)$  és un graf que té com a conjunt de vèrtexs  $[n]$ , en el qual cada parell de vèrtexs està unit per una aresta de manera independent amb probabilitat  $p$ , per a un número real  $0 \leq p \leq 1$ .
- (3) El procés d'Erdős-Rényi  $\{G_n(m) : m = 0, \dots, \binom{n}{2}\}$  comença amb un graf  $G_n(0)$  que té  $n$  vèrtexs aïllats i cap aresta, i a cada pas  $1 \leq m \leq \binom{n}{2}$  s'afegeix una nova aresta, de manera aleatòria, a un graf  $G_n(m-1)$  que evoluciona a un nou graf  $G_n(m)$ . El graf  $G_n(m)$  obtingut amb el procés d'Erdős-Rényi està distribuït com el graf aleatori uniforme  $G(n, m)$ .

Els tres models anteriors són essencialment equivalents quan els paràmetres se seleccionen adequadament, és a dir, si  $m = p \binom{n}{2}$ . El graf aleatori uniforme i el graf aleatori binomial havien estat estudiats prèviament, entre d'altres, per Gilbert [29]. Un quart de segle després Bollobás [13] va observar que el graf aleatori uniforme  $G(n, m)$  es pot considerar com un graf  $G_n(m)$  creat pel procés d'Erdős-Rényi.

Quan discutim propietats dels grafs aleatoris d'Erdős-Rényi farem servir la parametrització  $m = t n/2$  o  $p = t/(n-1)$ , de manera que  $t$  representa el grau esperat d'un vèrtex, i tractarem amb propietats que es compleixen *amb gran probabilitat* (abreujat *agp*), en el sentit que la seva probabilitat tendeix a 1 quan el nombre  $n$  de vèrtexs tendeix cap a infinit.

### 1.3 Aparició de la component gegant

Un dels descobriments més importants d'Erdős i Rényi [27] tracta de l'aparició de la transició de fase en l'ordre de la component més gran: dit d'una manera breu, l'ordre de la component més gran en el graf aleatori d'Erdős-Rényi passa de l'ordre logarítmic al lineal quan el grau esperat passa per 1 (per exemple, de 0.99 a 1.01) a mesura que s'afegeixen arestes.

Per tal de ser més precisos, considerem el graf aleatori d'Erdős-Rényi amb grau esperat  $t > 0$ . Si el grau esperat  $t$  és més petit que el valor crític 1, llavors *agp* el graf aleatori d'Erdős-Rényi està format per arbres i components unicíclics i la component més gran és un arbre d'ordre  $O(\log n)$ ; aquestes components s'anomenen «petites». En canvi, si el grau esperat  $t$  és més gran que 1, aleshores *agp* hi ha una única component màxima d'ordre lineal (anomenada la *component gegant*), mentre que totes les altres són arbres o bé components unicíclics d'ordre  $O(\log n)$ ; en altres paraules, totes les components tret de la gegant són «petites». Si el grau esperat  $t$  és igual al valor crític 1, llavors *agp* l'ordre de la component més gran és  $\Theta(n^{2/3})$ .

La raó per la qual el grau esperat igual a 1 és tan crucial de cara a l'aparició de la component gegant en el graf  $G(n, p)$  va ser molt ben explicada per Karp [40], que va utilitzar el procés següent de descoberta de les components basat en cerca d'amplada. Donat un vèrtex  $v$ , primer descobrim els seus veïns (diguem fills) de  $v$ . Després descobrim els veïns de cadascun dels veïns de  $v$ , l'un després de l'altre. I continuem així fins que no quedin més vèrtexs a la component de  $v$ . És a dir, d'una manera aproximada, en el moment que  $k = o(n)$  vèrtexs han estat explorats, el nombre de fills de cada vèrtex és una variable aleatòria binomial amb paràmetres  $n - k$  i  $p$ , i, per tant, d'esperança  $(n - k)p \sim t$ . Com que la distribució binomial  $\text{Bi}(n - k, p)$  convergeix cap a la distribució de Poisson  $\text{Po}(t)$  amb mitjana  $t = p(n - 1)$ , quan  $n \rightarrow \infty$  i  $t$  és una constant fixada, podem aproximar el procés de descoberta de components pel procés de ramificació de Galton-Watson amb distribució de descendents donada per  $\text{Po}(t)$ ; es comença amb un organisme unisexual que engendra un nombre aleatori de fills d'acord amb  $\text{Po}(t)$ , i cadascun dels fills independentment engendra un nombre aleatori de fills d'acord amb  $\text{Po}(t)$ , i així successivament. La teoria clàssica dels processos de ramificació diu que si  $t < 1$ , llavors amb probabilitat 1 el procés s'acaba; això correspon a les components petites de  $G(n, p)$ . D'altra banda, si  $t > 1$ , amb probabilitat positiva el procés continua per sempre. La probabilitat de supervivència és l'única solució positiva,  $\rho = \rho(t) \in (0, 1)$ , de l'equació

$$1 - \rho = e^{-t\rho}. \quad (1)$$

Aquesta probabilitat de supervivència correspon a la probabilitat que un vèrtex aleatori de  $G(n, p)$  estigui a la component gegant. Aquest punt de vista es pot justificar rigorosament i dona que quan  $t > 1$ , llavors *agp* l'ordre de la component gegant de  $G(n, p)$  és  $\rho n + o(n)$ .

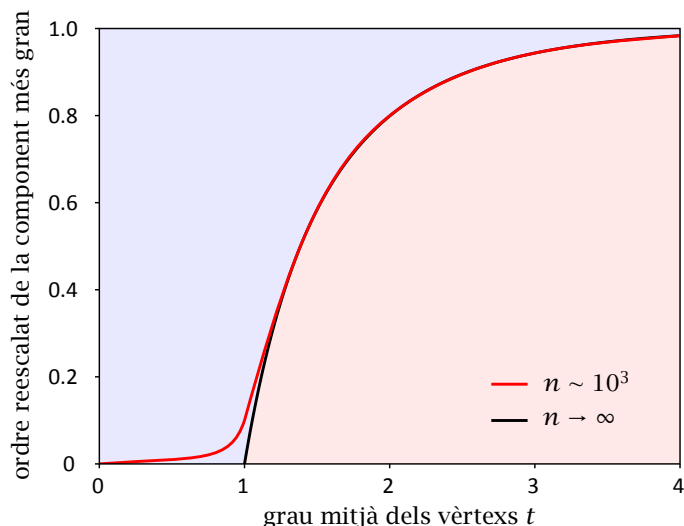


FIGURA 1: Transició de fase al graf aleatori d'Erdős-Rényi.

#### 1.4 Finestra crítica de la transició de fase

D'acord amb el resultat d'Erdős i Rényi, l'ordre de la component més gran passa de logarítmic a sublineal i després a l'ordre lineal; més precisament canvia de  $O(\log n)$  a  $\Theta(n^{2/3})$  i a  $\Theta(n)$ , segons si el grau esperat  $t$  compleix  $t < 1$ ,  $t = 1$ , o bé  $t > 1$ . Erdős i Rényi descriuen aquest fenomen com un «doble salt» i el consideren com un dels fets més sorprenents en relació amb els grafs aleatoris.

Això porta a diverses preguntes naturals: *hi ha realment salts?* Dit d'una altra manera, la transició de fase en el graf aleatori d'Erdős-Rényi és discontinua? O bé és contínua? En el cas que sigui contínua, la transició de fase és «suau» o bé té «punxes»? Com de gran hauria de ser la diferència entre el grau esperat d'un vèrtex i el valor crític 1, per tal de poder distingir l'ordre de la component més gran de l'ordre de la segona component més gran?

Bollobás [13] va provar que de fet no hi ha un salt, sinó que hi ha una *transició de fase suau amb tres fases diferents* quan el nombre d'arestes és aproximadament igual a la meitat del nombre de vèrtexs: la fase subcrítica en la qual *agp* hi ha moltes components petites d'ordre gairebé igual; la fase crítica en la qual *agp* hi ha poques components grans d'ordre semblant mòdul un factor constant, i la fase supercrítica, la qual es caracteritza pel fet que *agp* hi ha una component de mida màxima que és molt més gran que la segona component més gran. El resultat de Bollobás va ser millorat per Łuczak [44].

Per tal d'establir els resultats de Bollobás i Łuczak, considerem el graf aleatori binomial  $G(n, p)$  amb  $p = \frac{t}{n-1}$ , on  $t = 1 \pm \epsilon$  per a  $\epsilon = \epsilon(n) > 0$  que compleix  $\epsilon \rightarrow 0$ , de manera que el grau esperat tendeix cap a 1. Per tal de veure com de ràpid tendeix  $\epsilon$  cap a zero, sigui  $\omega(n)$  una funció que tendeixi cap a infinit arbitràriament a poc a poc amb  $n$  i sigui  $\epsilon = \epsilon(n)$  complint  $\omega(n) \leq \epsilon^3 n$ .

Dit d'una altra manera, fem  $\epsilon \rightarrow 0$  i  $\epsilon^3 n \rightarrow \infty$ . Si  $t = 1 - \epsilon$ , llavors per a qualsevol enter positiu fixat  $i$ , *agp* l'ordre de la  $i$ -èsima component més gran és, asimptòticament,  $2\epsilon^{-2} \log(\epsilon^3 n)$ , que és una quantitat considerablement menor que  $n^{2/3}$ . D'altra banda, si  $t = 1 + \epsilon$ , *agp* l'ordre de la component més gran és, asimptòticament,  $2\epsilon n$ , que és substancialment més gran que  $n^{2/3}$ , i l'ordre de la segona component més gran és substancialment més petita que  $n^{2/3}$ .

Quan  $\epsilon^3 n = \Theta(1)$ , Aldous [4] va donar una descripció precisa de la successió dels ordres (reescalats per  $n^{2/3}$ ) de les components més grans, fent servir processos multiplicatius coalescents i una successió de longituds de les excursions d'un moviment brownià inhomogeni i reflectant.

### 1.5 Teoremes del límit per a la component gegant

Es pot dir alguna cosa més sobre la distribució de l'ordre de la component gegant quan el grau esperat  $t$  és més gran que 1?

Sigui  $I \subset (1, \infty)$  un interval compacte,  $p = p(n)$  una successió tal que  $t = p(n-1) \in I$  per a tot  $n$  i sigui  $\rho = \rho(t) \in (0, 1)$  l'única solució positiva de l'equació (1). Denotem per  $L_1(t)$  l'ordre de la component gegant de  $G(n, p)$ .

El primer teorema límit per a la component gegant és una *lleï forta dels grans números* que assegura que per a qualssevol  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , existeix  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que per a qualsevol  $n \geq n_0$ ,

$$1 - \delta_2 \leq \mathbb{P} \left[ \left| \frac{L_1(t)}{n} - \rho \right| \leq \delta_1 \right] \leq 1 + \delta_2.$$

Així doncs, el valor típic de  $L_1(t)$  es pot determinar, tret de fluctuacions d'ordre  $o(n)$ .

Una pregunta natural és si es pot caracteritzar la distribució de  $L_1(t)$  d'una manera més precisa. Definim  $\mu = \mu(\rho, n)$  i  $\sigma = \sigma(t, \rho, n)$  com

$$\mu := \rho n \quad \text{i} \quad \sigma := \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{(1-t(1-\rho))^2} n}.$$

Es pot provar que  $\sigma^{-1}(L_1(t) - \mu)$  convergeix en distribució cap a  $N(0, 1)$ , on  $N(0, 1)$  denota la distribució normal estàndard. Això dona un *teorema de límit central* per a  $L_1(t)$ : per a qualssevol  $a < b$  amb  $a, b \in \mathbb{R}$  i qualsevol  $\delta > 0$ , existeix  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que per a tot  $n \geq n_0$

$$\frac{1-\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \leq \mathbb{P} \left[ a \leq \frac{L_1(t) - \mu}{\sigma} \leq b \right] \leq \frac{1+\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

D'aquesta manera es pot estimar el valor de  $L_1(t)$  fins a un error de  $o(\sigma) = o(\sqrt{n})$ .

De fet, es pot deduir un resultat encara més fort, un *teorema de límit local* per a  $L_1(t)$ : per a qualsevol interval compacte  $J \subset \mathbb{R}$  i qualsevol  $\delta > 0$ , existeix  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que per a  $n \geq n_0$  i  $k \in \mathbb{N}$  que compleixi  $\sigma^{-1}(k - \mu) \in J$ , llavors

$$\frac{1-\delta}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \leq \mathbb{P}[L_1(t) = k] \leq \frac{1+\delta}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Aquests resultats van ser establerts per Stepanov [64] i Pittel i Wormald [54] fent servir tècniques de comptatge, i van ser tornats a provar per Behrisch, Coja-Oghlan i Kang [10] aplicant el mètode de Stein al nombre total de vèrtexs fora de la component gegant.

Encara són vàlids resultats molt més forts. Stepanov [64] i Pittel i Wormald [54] proven un *teorema de límit local per a la distribució conjunta* del nombre de vèrtexs i d'arestes de la component gegant. Behrisch, Coja-Oghlan i Kang [10] obtenen també aquest teorema fent servir l'anomenada *exposició en dues voltes* i tècniques de regularització, així com l'anàlisi de Fourier. Sigui  $E(t)$  el nombre d'arestes de la component gegant de  $G(n, p)$ , definim

$$\begin{aligned}\mu_e &:= \frac{t(1 - (1 - \rho)^2)}{2}n, \\ \sigma_e &:= \sqrt{\left(\frac{t^2(1 - \rho)^2(2 - (2t - 1)\rho(1 - \rho))}{(1 - t(1 - \rho))^2} + \frac{t(1 - (1 - \rho)^2)}{2}\right)}n, \\ \sigma_j &:= \frac{t(1 - \rho)(1 - (1 - \rho)^2 + t\rho(1 - \rho))}{(1 - t(1 - \rho))^2}n^2.\end{aligned}$$

Llavors per a tot parell d'interval compactes  $J, J_e \subset \mathbb{R}$  i tot  $\delta > 0$  existeix  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que per a qualsevol  $n \geq n_0$  i enters  $k, \ell \in \mathbb{N}$  que compleixin  $\sigma^{-1}(k - \mu) \in J$  i  $\sigma_e^{-1}(\ell - \mu_e) \in J_e$  hom té

$$(1 - \delta)\Phi(k, \ell) \leq \mathbb{P}[L_1(t) = k \text{ and } E(t) = \ell] \leq (1 + \delta)\Phi(k, \ell),$$

on

$$\begin{aligned}\Phi(k, \ell) &:= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2\sigma_e^2 - \sigma_j^2}} \cdot \\ &\cdot \exp\left(-\frac{\sigma^2\sigma_e^2}{2(\sigma^2\sigma_e^2 - \sigma_j^2)}\left(\frac{(k - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{2\sigma_j(k - \mu)(\ell - \mu_e)}{\sigma^2\sigma_e^2} + \frac{(\ell - \mu_e)^2}{\sigma_e^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Pel que fa a teoremes de límit locals en la situació més sofisticada del *règim supercrític* quan  $t = 1 + \epsilon$  per a  $\epsilon = \epsilon(n) > 0$  que compleix  $\epsilon \rightarrow 0$  i  $\epsilon^3 n \rightarrow \infty$ , Bollobás i Riordan [17] donen una prova nova i senzilla per a la llei forta dels grans números per a l'ordre de la component gegant, fent servir el procés de ramificació de Galton-Watson. Pittel i Wormald [54] estableixen un teorema de límit central per a l'ordre de la component gegant, sempre en règim supercrític, comptant grafs connexos. El seu resultat va ser tornat a provar recentment per Bollobás i Riordan [18], fent servir passeig aleatori i arguments de martingales.

## 2 Generalitzacions dels grafs aleatoris d'Erdős-Rényi

Des del treball inicial d'Erdős i Rényi [27], s'han estudiat amb detall diversos models de grafs aleatoris. Per exemple, s'han estudiat els hipergrafs aleatoris, els grafs planars aleatoris, els processos de grafs aleatoris i els grafs aleatoris no homogenis. Tot seguit fem un repàs breu de cadascun d'ells.

## 2.1 Hipergrafs aleatoris

Una de les generalitzacions més naturals dels grafes aleatoris d'Erdős-Rényi  $G(n, p)$  és l'hipergraf aleatori  $k$ -uniforme  $H_k(n, p)$ , que és un hipergraf amb conjunt de vèrtexs  $[n]$  en el qual cadascuna de les  $\binom{n}{k}$  possibles arestes (és a dir, els subconjunts de  $k$  elements de  $[n]$ ) apareix de manera independent amb probabilitat  $p$ .

Diem que un vèrtex  $v$  en un hipergraf  $H$  és accessible des de  $w$  (o bé que  $v$  i  $w$  estan connectats) si existeix una successió d'arestes  $(e_1, \dots, e_\ell)$  tal que  $v \in e_1$ ,  $w \in e_\ell$  i  $e_i \cap e_{i+1} \neq \emptyset$  per a tot  $1 \leq i \leq \ell - 1$ . L'accessibilitat és una relació d'equivalència i les classes d'equivalència s'anomenen les *components de  $H$* .

Els fenòmens de transició de fase es van descobrir també en els hipergrafs aleatoris. El punt crític d'aparició de la component gegant de  $H_k(n, p)$  va ser determinat per primera vegada per Schmidt-Pruzan i Shamir a [61]. D'una manera més precisa, sigui  $p = t(k-1)^{-1} \binom{n-1}{k-1}^{-1}$ , per a  $t > 0$ . Schmidt-Pruzan i Shamir van provar que si  $t < 1$ , llavors *agp* el nombre de vèrtexs de la component més gran és  $O(\log n)$ , però si  $t > 1$ , llavors *agp* hi ha una única component que conté un nombre de vèrtexs lineal en  $n$ . De fet, encara se sap més: *agp* el nombre de vèrtexs de la component gegant és  $\rho n + o(n)$ , on  $\rho = \rho(k, t) \in (0, 1)$  és l'única solució positiva de l'equació

$$1 - \rho = \exp(t((1 - \rho)^{k-1} - 1)).$$

Quan  $k = 2$ , això correspon al resultat esmentat en el cas d'un graf.

Karoński i Łuczak [39] van estudiar la transició de fase en la fase supercrítica inicial, quan  $t = 1 + o((\log n/n \log \log n)^{1/3})$ , i van provar un teorema de límit local per al nombre de vèrtexs de la component més gran. Behrisch, Coja-Oghlan i Kang [11] van establir teoremes de límit central i local per al nombre de vèrtexs de la component més gran quan  $t > 1 + \epsilon$  per a un  $\epsilon > 0$  fixat arbitràriament petit. A més a més van obtenir el teorema de límit local per a la distribució conjunta del nombre de vèrtexs i del nombre d'arestes de la component més gran de  $H_k(n, p)$ . Com una aplicació, Behrisch, Coja-Oghlan i Kang [11] van trobar una fórmula asimptòtica per a la probabilitat que  $H_k(n, p)$  sigui connex. Amb aquesta finalitat fan servir punts de vista nous purament probabilístics, com ara *l'exposició de les arestes en dues rondes*, el mètode de Stein i l'anàlisi de Fourier. Bollobás i Riordan [18] van provar a continuació que la distribució del nombre de vèrtexs de la component més gran tendeix cap a una distribució normal per a  $t = 1 + \epsilon$  quan  $\epsilon = \epsilon(n) > 0$  compleix  $\epsilon^3 n \rightarrow \infty$ , és a dir, durant tot el règim supercrític.

Aquests teoremes de límit local estan molt relacionats amb el *nombre asimptòtic d'hipergrafs connexos i  $k$ -uniformes* amb  $n$  vèrtexs i  $m$  arestes. Fent servir enumeració combinatòria, Karoński i Łuczak [39] troben el nombre asimptòtic d'hipergrafs connexos  $k$ -uniformes amb un nombre donat de vèrtexs i d'arestes en el règim quasi supercrític quan  $m - \frac{n}{k-1} \ll \frac{\log n}{\log \log n}$ . Behrisch, Coja-Oghlan i Kang troben el resultat corresponent a partir del teorema de límit

local per al règim estrictament supercrític quan  $m - \frac{n}{k-1} = \Theta(n)$ , i Bollobás i Riordan [19] consideren després el règim supercrític  $m - \frac{n}{k-1} = o(n)$ . Sato i Wormald [60] també obtenen el nombre asimptòtic d'hipergrafs connexos 3-uniformes fent servir cors (*cores*, en anglès) i nuclis quan  $n^{1/3} \log^2 n \ll m - \frac{n}{2} \ll n$ .

## 2.2 Hipergrafs aleatoris com a complexos simplicials aleatoris

Els hipergrafs aleatoris es poden interpretar com a complexos simplicials aleatoris; per exemple, els hipergrafs aleatoris 3-uniformes es poden veure com a 2-complexos simplicials aleatoris, considerant els subconjunts de 3 elements com a 2-cel·les triangulars i els subconjunts de 2 elements com a 1-cel·les. Les propietats topològiques dels complexos simplicials aleatoris —tals com la col·lapsabilitat i l'anul·lació de l'homologia de dimensió màxima— van ser investigades, per exemple, a [5, 6, 43].

Motivats en part per l'estudi dels complexos simplicials aleatoris, considerarem la connectivitat d'ordre superior. La noció de connectivitat d'ordre superior en hipergrafs és, de totes maneres, ambigua i de fet hi ha diverses definicions possibles. Per exemple, podem prendre la que van suggerir Bollobás i Riordan [18], és a dir, la  $j$ -pla connectivitat: un subconjunt de  $j$  elements  $J_1$  es diu que és *accessible* des d'un altre subconjunt de  $j$  elements  $J_2$  si existeix una successió d'arestes  $(E_1, \dots, E_\ell)$  tal que  $J_1 \subseteq E_1$ ,  $J_2 \subseteq E_\ell$  i  $|E_i \cap E_{i+1}| \geq j$  per a cada  $i = 1, \dots, \ell - 1$ . L'accessibilitat és una relació d'equivalència en els subconjunts de  $j$  elements i les classes d'equivalència s'anomenen  *$j$ -pla components connexes* o simplement  *$j$ -components*. El cas  $j = 1$  correspon a la noció de connexió per a vèrtexs.

A la vista de l'aparició d'una  $j$ -component gegant per a qualsevol  $1 \leq j \leq k - 1$ , Cooley, Kang i Person [25] van mostrar que  $H_k(n, p)$  experimenta una transició de fase al llindar  $p_{k,j} := \frac{1}{\binom{k}{j}-1 \cdot \binom{n-j}{k-j}}$ . Sigui  $p = t \cdot p_{k,j}$  per a  $t > 0$  i sigui  $L_j(t)$  el nombre de subconjunts de  $j$  elements continguts a la  $j$ -component més gran de  $H_k(n, p)$ . Per a un  $\epsilon > 0$  fixat, arbitràriament petit, Cooley, Kang i Person van provar que  $\text{agp } L_j(t) = \Omega(\epsilon n^j)$  i que la component gegant és única si  $t = 1 + \epsilon$ , però  $L_j(t) = O(\epsilon^{-2} \log n)$  si  $t = 1 - \epsilon$ .

Cooley, Kang i Koch [24] van estudiar amb més detall la component gegant en el règim supercrític i van veure que quan  $t = 1 + \epsilon$  per a un  $\epsilon = \epsilon(n) > 0$  que compleixi  $\epsilon \rightarrow 0$  i  $\epsilon^3 n \rightarrow \infty$ ,  $\text{agp } L_j(t) = (1 + o(1)) 2\epsilon \frac{1}{\binom{k}{j}-1} \binom{n}{j}$ . Per a  $k = 2$ ,  $j = 1$ , el llindar i el nombre de vèrtexs de la component gegant coincideixen amb els del cas d'un graf:  $p_{2,1} = \frac{1}{n-1}$  i  $\text{agp } L_1(t) = (1 + o(1)) 2\epsilon n$ .

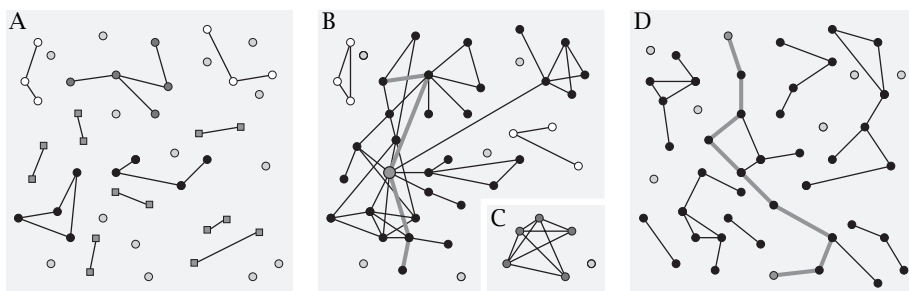
Aquests resultats plantegen diverses qüestions. Què podem dir de  $L_j(t)$  en el règim crític quan  $t = 1$ ? I sobre el nombre de subconjunts de  $j$  elements continguts en la segona  $j$ -component més gran en el règim supercrític? Quina és la distribució del nombre de subconjunts de  $j$  elements continguts en la  $j$ -component gegant? Hi ha teoremes de límit central o local per a la  $j$ -component gegant?



### 2.3 Grafes planars aleatoris

Un graf es diu que és *planar* si es pot submergir en el pla sense creuar cap parell d'arestes. Un dels resultats més coneguts sobre grafes planars és el teorema dels quatre colors: diu que donada una separació del pla en regions, posem països, els països es poden acolorir fent servir quatre colors de manera que dos països amb frontera comuna no tinguin el mateix color.

Els grafes planars aleatoris van despertar un interès considerable des que McDiarmid, Steger i Welsh van obtenir propietats asimptòtiques importants dels grafes planars [48] i Giménez i Noy van determinar el nombre asimptòtic exacte de grafes planars etiquetats [30].



Quan el nombre d'arestes és petit, el graf aleatori té moltes components petites.

A mesura que s'afegeixen arestes emergeix un **component gegant** (en negre).

Els **grafes planars** es poden dibuixar en el pla de manera que les arestes no es tallin.

El **grau d'un vèrtex** és el nombre d'arestes adjacents. El vèrtex més gran de color gris de B té el màxim grau 9.

L'**ordre d'una component** és el nombre de vèrtexs que conté. La component de color negre de B té ordre 30, les components de A tenen ordres 5 (gris), 4 (negre), 3 (blanc), 2 (quadret gris) i 1 (gris clar).

El **diàmetre** d'un graf connex és la més gran de les distàncies entre dos vèrtexs. La component més gran de A té diàmetre tres, la de B quatre, la de C dos i la de D vuit.

En una xarxa **món petit**, la distància mínima típica entre dos vèrtexs de la component gran és «petita», *i. e.* la component més gran té un diàmetre petit (marcat amb una línia grisa més gruixuda a B i D).

Un grau alt d'**agrupament** vol dir que qualsevol entorn d'un vèrtex molt probablement és connex, com en la component grisa de C.

Les xarxes del món real sovint tenen **diàmetre** petit i un grau alt d'**agrupament**.

FIGURA 2: Conceptes bàsics de teoria de grafes.

Considerem un graf planar aleatori uniforme  $P(n, m)$ , elegit uniformement a l'atzar entre tots els grafes planars etiquetats amb  $n$  vèrtexs i  $m$  arestes.

Kang i Łuczak [36] van provar que, sorprenentment, hi ha *dos períodes crítics* en l'evolució d'un graf planar aleatori. El primer té lloc quan es forma la component gegant; això passa quan  $m = n/2 + O(n^{2/3})$ , de manera anàloga al cas del graf aleatori uniforme  $G(n, m)$ . El segon període crític d'un graf planar aleatori apareix quan la component gegant cobreix gairebé tots els vèrtexs; això passa quan  $m = n + O(n^{3/5})$ .

Tal com hem vist a la subsecció 1.3, després d'expressar els resultats en termes de  $G(n, m)$ , la component gegant de  $G(n, m)$  emergeix sobtadament per a  $m = n/2 + O(n^{2/3})$ . Si  $m = n/2 + s$  i  $-n \ll s \ll -n^{2/3}$ , llavors *agp*  $G(n, m)$  està format per arbres aïllats i components uníclics, de manera que és un graf planar, i la seva component més gran és un arbre d'ordre  $(1 + o(1)) \frac{n^2}{2s^2} \log \frac{|s|^3}{n^2}$ . D'altra banda, si  $n^{2/3} \ll s \ll n$ , llavors *agp*  $G(n, m)$  conté exactament una component complexa (anomenada la *component gegant*) d'ordre  $(4 + o(1))s$ , mentre que la segona component més gran és *agp* un arbre d'ordre  $(1 + o(1)) \frac{n^2}{2s^2} \log \frac{s^3}{n^2}$ ; la qual cosa mostra una similitud remarcable entre el graf subcrític i el graf supercrític després de treure la component gegant. A més, si  $s \gg n^{2/3}$ , llavors *agp*  $G(n, m)$  conté una còpia topològica de  $K_{3,3}$  i, per tant, no és planar. Recordem que una component es diu complexa si conté més d'un cicle.

Una altra estructura aleatòria rellevant per al comportament d'un graf planar aleatori  $P(n, m)$  és un bosc aleatori uniforme  $F(n, m)$ , és a dir, un bosc elegit uniformement a l'atzar entre tots els boscos etiquetats amb  $n$  vèrtexs i  $m$  arestes. Łuczak i Pittel [46] van descobrir que, malgrat que la component gegant de  $F(n, m)$  apareix a  $m = n/2 + O(n^{2/3})$ , el comportament crític de  $F(n, m)$  és una mica diferent del de  $G(n, m)$  quan  $n^{2/3} \ll s \ll n$ . Sigui  $m = n/2 + s$ . Si  $s \ll -n^{2/3}$ , llavors les estructures de  $F(n, m)$  i de  $G(n, m)$  són similars, és a dir, l'ordre de l'arbre més gran de  $F(n, m)$  és *agp*  $(1 + o(1)) \frac{n^2}{2s^2} \log \frac{|s|^3}{n^2}$ . Tot i així, en la fase supercrítica, quan  $n^{2/3} \ll s \ll n$ , l'arbre gegant de  $F(n, m)$  és *agp* d'ordre  $(2 + o(1))s$ , que és aproximadament *la meitat* de l'ordre de la component més gran de  $G(n, m)$ , mentre que el segon arbre més gran de  $F(n, m)$  és d'ordre  $\Theta(n^{2/3})$ , que és molt més gran que el de la segona component més gran de  $G(n, m)$ .

Łuczak i Kang van veure que fins a  $m = n/2 + s$  amb  $n^{2/3} \ll s \ll n$  (és a dir, el règim supercrític del primer període crític), el comportament de  $P(n, m)$  és similar al comportament de  $F(n, m)$ . Dit d'una altra manera, *agp* l'ordre de la component complexa més gran és  $(2 + o(1))s$ , mentre que la segona component més gran té  $\Theta(n^{2/3})$  vèrtexs. Per tant, a diferència de  $G(n, m)$ , no hi ha similitud entre el graf planar subcrític i el graf planar supercrític després de treure la component gegant.

El segon període crític en l'evolució de  $P(n, m)$  no correspon a transicions de fase a  $F(n, m)$  i a  $G(n, m)$ . Per tal de veure per què  $P(n, m)$  presenta el segon tipus de comportament crític, observem que el nombre màxim d'arestes de  $F(n, m)$  és  $n - 1$ , mentre que el de  $P(n, m)$  és  $3n - 6$ , i, per tant, la taxa de creixement de l'ordre de les components complexes de  $P(n, m)$  ha de canviar en algun punt. Łuczak i Kang van provar que això passa quan  $m = n + O(n^{3/5})$ .

De manera més precisa, posem  $m = n + t$ , on  $t = o(n)$ . Si  $t \ll -n^{3/5}$  però  $n/2 + t \gg n^{2/3}$ , la component gegant de  $P(n, m)$  conté *agp*  $n - (2 + o(1))|t|$  vèrtexs, mentre que per a  $n^{3/5} \ll t \ll n^{2/3}$  la component gegant conté  $n - (\alpha + o(1))(n/t)^{3/2}$  vèrtexs per a alguna constant  $\alpha > 0$  que es pot determinar. La condició poc convenient que  $t \ll n^{2/3}$  és conseqüència del mètode de demostració i probablement es pot substituir per  $t \ll n$ .

## 2.4 Processos de grafes aleatoris

Una modificació natural del procés d'Erdős-Rényi és la classe de processos aleatoris basada en el model del *poder de les opcions múltiples*, que ara es coneixen amb el nom de *processos d'Achlioptas*. En cada pas dels processos d'Achlioptas es trien a l'atzar *dues* o més arestes potencials i, d'acord amb una regla determinada, se'n tria una i s'afegeix al graf que evoluciona.

Una qüestió natural és saber si hi ha una regla senzilla que canvia el temps crític per a l'aparició de la component gegant. La regla del producte va ser suggerida com la més apropiada per a retardar el temps crític: la regla del producte selecciona entre les dues arestes potencials la que minimitza el producte de les mides de les components dels seus vèrtexs extrems. Poc després, Bohman i Frieze van mostrar que una regla més simple, coneguda com *el procés de Bohman-Frieze*, retarda el temps crític [12]: si la primera aresta uneix dos vèrtexs aïllats, s'afegeix al graf en evolució; en cas contrari s'hi afegeix la segona aresta. El seu treball va mostrar que aquesta regla tan senzilla retarda l'aparició de la component gegant, és a dir, el punt crític de la transició de fase en el procés de Bohman-Frieze és estrictament més gran que 1. I va iniciar tres línies de recerca importants en el camp dels processos d'Achlioptas.

La primera línia tracta de comprovar la potència i els límits dels processos d'Achlioptas. Fins a quin punt podem accelerar o retardar la transició de fase? Quant podem retardar la formació d'un cicle hamiltonià? Aquestes qüestions es poden plantejar en el context original d'un procés d'Achlioptas o bé en el cas *off-line* que totes les parelles d'arestes estan donades al principi i després se'n fa la tria. Sovint els resultats es poden generalitzar al cas que en cada etapa es presenten  $\ell$  arestes en lloc de 2, on  $\ell$  és una constant fixada. Els resultats recents tenen a veure més aviat amb el retard de la transició de fase, la falta de subgrafs petits i l'acceleració de l'aparició de cicles hamiltonians.

La segona línia de recerca comporta l'elecció d'una regla d'Achlioptas fixa i l'exploració dels detalls subtils de l'evolució del graf. Per exemple, Spencer i Wormald [62] i Janson i Spencer [34] van examinar l'estat del procés de Bohman-Frieze després de  $m = t n/2$  iteracions. Spencer i Wormald [62] van provar que hi ha un temps crític  $t_c \sim 1.176$  en el qual el procés de Bohman-Frieze passa per una transició de fase: en la regió subcrítica  $t = t_c - \epsilon$  (per a una constant  $\epsilon > 0$ ) la component més gran és d'ordre  $O(\log n)$ , mentre que en la regió supercrítica  $t = t_c + \epsilon$  hi ha una component gegant d'ordre  $\Omega(n)$ . Janson i Spencer [34] van estudiar la fase quasi supercrítica amb  $t = t_c + \epsilon$  per a una constant petita  $\epsilon > 0$

i van provar que *agp* la component més gran és d'ordre  $\Theta(\epsilon n)$ , i l'ordre de la segona component més gran és  $\Theta(\epsilon^{-2} \log n)$ . Kang, Perkins i Spencer [37] van mirar amb detall la distribució de la mida de la component pròxima a la regió crítica. De fet, el procés de Bohman-Frieze és la denominació curta d'una classe molt àmplia de regles d'Achlioptas, les anomenades *regles de mida limitada* introduïdes per Spencer i Wormald [62]. En una regla de mida limitada, l'elecció entre les dues arestes només depèn de la mida de les components que es poden connectar a través d'aquestes dues arestes, i totes les components d'ordre més gran que  $K$  s'han de tractar de la mateixa manera, per a una constant fixada  $K$ .

La tercera línia de recerca va orientada a entendre amb detall el comportament d'una classe general de processos d'Achlioptas. La distribució de les mides de les components en les regles de mida limitada ja s'havia determinat [58, 59]. L'interès pels processos d'Achlioptas va augmentar moltíssim quan Achlioptas, D'Souza i Spencer [1] van conjecturar, sobre la base de nombroses simulacions, que per a aquests processos la regla del producte es comporta de manera molt diferent de com ho fa per al procés d'Erdős-Rényi. Es produeix l'anomenada *percolació explosiva*; en d'altres paraules, l'ordre de la component més gran «salta» de l'ordre sublineal a l'ordre lineal en els passos sublineals del procés. Però Riordan i Warnke van provar que això no era així [57, 58]: la transició de fase per a una classe molt gran de processos d'Achlioptas generalitzats, inclosa la regla del producte, és contínua.

Malgrat l'estudi intensiu que s'ha dut a terme en relació amb els processos d'Achlioptas, el comportament detallat de la distribució de la mida de les components en molts processos d'Achlioptas encara no es coneix. Què més es pot dir sobre la fase de transició per a la regla del producte? Quin és el temps crític per a l'aparició de la component gegant? Com és de gran la component gegant poc després del punt crític? Quina és la mida de la finestra crítica?

## 2.5 Grafs aleatoris no homogenis

Una altra generalització natural, ben estudiada, del graf aleatori d'Erdős-Rényi són els grafs aleatoris amb una successió de graus donada —un exemple de grafs aleatoris no homogenis. Łuczak [45] i Chung i Lu [23] van estudiar l'estructura de les components d'un graf aleatori amb una successió donada de graus. La transició de fase en els grafs aleatoris amb una successió donada de graus ha estat tractada extensament, entre d'altres, per Molloy i Reed [50, 51], Newman, Strogatz i Watts [52], Kang i Seierstad [38], i Riordan [56].

Considerem una successió  $\mathcal{D} = \{d_0(n), d_1(n), \dots\}$ , amb  $d_i(n) = 0$  per a  $i \geq n$ , i  $\sum_{i \geq 0} d_i(n) = n$ . El valor  $d_i(n)$  representa el nombre de vèrtexs de grau  $i$  en un graf d'ordre  $n$ . Considerem ara un graf aleatori uniforme  $G_n(\mathcal{D})$  que tingui  $\mathcal{D}$  com a successió de graus. Sota una condició dèbil de regularitat per a  $\mathcal{D}$ ,  $\lambda_i(n) := d_i(n)/n$  convergeix cap a una constant: posem  $\lambda_i^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i(n)$  i  $Q(\mathcal{D}) = \sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i^*$ . Molloy i Reed [50, 51] van provar que si  $Q(\mathcal{D}) < 0$ , llavors *agp* totes les components de  $G_n(\mathcal{D})$  són d'ordre  $\Theta(\log n)$ , mentre que si  $Q(\mathcal{D}) > 0$ , llavors *agp*  $G_n(\mathcal{D})$  conté una única component gegant

d'ordre  $\Theta(n)$ . Kang i Seierstad [38] van estudiar la fase crítica quan  $\sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i(n)$  convergeix cap a 0. Per tal d'establir com de ràpid la quantitat  $\sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i(n)$  convergeix cap a 0, anomenem  $\tau_n$  el zero més gran de la funció  $Q_n(x) := \sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i(n)x^i$ , és a dir,  $Q_n(\tau_n) = 0$ . Kang i Seierstad van determinar l'ordre de la component més gran en un règim dèbilment supercrític amb una llacuna logarítmica, és a dir, quan  $(1 - \tau_n)n^{1/3} \gg \log n$ . Aquí el paràmetre  $1 - \tau_n$  fa per a  $G_n(\mathcal{D})$  el mateix paper que  $t - 1$  fa per a  $G(n, p)$  quan  $p = t/(n - 1)$ . Més recentment, Riordan [56] ha determinat l'amplada exacta de la finestra crítica i la distribució límit de l'ordre asimptòtic de la component més gran quan el grau màxim està acotat.

En les últimes dècades s'ha observat que determinades xarxes del món real —que apareixen en l'economia, la física i les ciències socials— pertanyen a la classe de les anomenades *xarxes món petit*, que es caracteritzen per un *agrupament alt* (la qual cosa vol dir que els vèrtexs estan molt connectats, almenys localment, entre ells) i un *diàmetre petit* (que vol dir que tots els vèrtexs de la xarxa es poden unir globalment per camins curts, de manera que tots els vèrtexs es poden connectar mitjançant un nombre relativament petit de passos). A més a més, el nombre de connexions (és a dir, el grau d'un vèrtex) en moltes xarxes del món real segueix una *lleï de distribució de potències*. Aquesta propietat, entre d'altres, va motivar el model de connexió preferencial introduït i estudiat, per exemple, per Albert i Barabási [2, 7].

Per tal de modelitzar i analitzar xarxes del món real, s'han introduït un gran nombre de grafes aleatoris així com els seus models estocàstics, i molts d'aquests són casos especials dels *grafes aleatoris no homogènis* introduïts per Bollobás, Janson i Riordan [15], on els vèrtexs són de tipus diferents, i la probabilitat de realitzar una aresta depèn del tipus dels seus vèrtexs extrems. En particular, les arestes apareixen independentment i el nombre d'arestes és lineal en el nombre de vèrtexs. Entre altres coses, Bollobás, Janson i Riordan [15] van determinar el punt crític de la fase de transició i l'ordre de la component gegant després de la transició, relacionant el seu model amb processos de ramificació multitypus.

### 3 Àrees relacionades i aplicacions

Els grafes aleatoris han estat molt estudiats des de la seva introducció, i s'han convertit en un dels temes centrals de les matemàtiques actuals, en part degut al fet que estan íntimament relacionats amb diverses estructures discretes aleatòries com ara superfícies aleatòries, aplicacions aleatòries, matrius aleatòries, problemes aleatoris de satisfactibilitat, els models d'Ising i de Potts i la percolació, i en part perquè són útils per a modelitzar, analitzar i resoldre problemes estructurals i algorísmics que apareixen a les matemàtiques, a la informàtica teòrica, a les ciències naturals, a les ciències socials i a les ciències de la vida [2]. L'estudi intensiu de les estructures aleatòries discretes, en particular l'estudi dels seus fenòmens de transició de fase, ha integrat diverses àrees d'investigació, com ara la matemàtica discreta, la teoria de la probabilitat, la informàtica teòrica i la física estadística.

### 3.1 Transició de fase

La transició de fase és un canvi sobtat en les propietats d'una estructura complexa produït per l'alteració d'un paràmetre crític. S'observa en molts contextos de les matemàtiques i de les ciències naturals. Aquí hem vist la transició de fase en diversos models de grafs aleatoris en les subseccions 1.3–2.5.

Les transicions de fase amb què tothom està més familiaritzat són les de l'aigua: de gel (sòlid) a aigua (líquid) i d'aigua a vapor (gas). Hi ha dues temperatures crítiques: zero graus Celsius, el punt de congelació de l'aigua, i cent graus Celsius, el punt d'ebullició de l'aigua. A temperatures baixes, en l'estat sòlid, els àtoms i les molècules interactuen intensament amb els seus veïns i estan molt compactificats, típicament en un patró regular. A temperatures intermèdies, les interaccions es debiliten, i això provoca un canvi d'ordre constant però de poc abast. I a temperatures altes, les molècules gairebé no interactuen i mostren un patró dispers, altament dinàmic i bastant aleatori —vegeu la figura 3. El fet intrigant és que aquests canvis induïts per la temperatura no es produeixen de manera contínua sinó que es manifesten dos salts sobtats —transicions de fase— en les temperatures de fusió i d'ebullició.

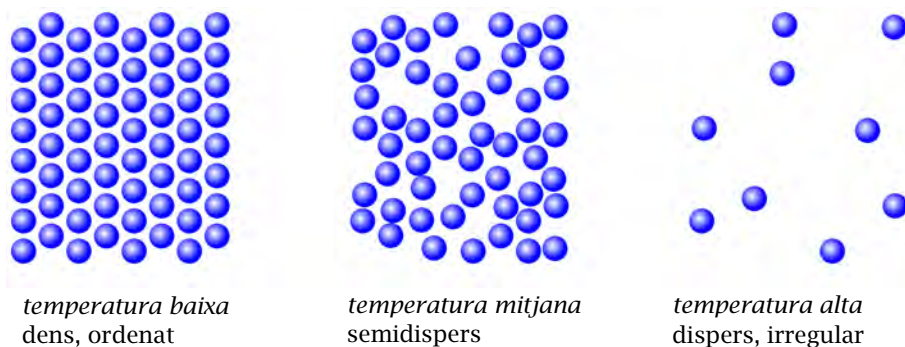


FIGURA 3: Organització d'àtoms o molècules a diferents temperatures.

Un exemple ben conegut que posa de manifest la transició de fase és la percolació. En física, en la ciència de materials i en la geografia, la teoria de la percolació tracta de qüestions relacionades amb el pas d'un fluid o d'un gas a través d'un mitjà porós o bé desordenat. Es pot aplicar a nombrosos problemes sense cap relació aparent, per exemple, els canvis en la superfície de la terra produïts per la meteorologia o per l'erosió, la propagació del foc en els boscos, el funcionament del filtre d'una cigarreta o d'una cafetera.

Suposem que s'aboca un líquid a sobre d'un material porós. El líquid serà capaç d'anar de la part superior a la part inferior? Aquest problema físic es pot modelar matemàticament amb *percolació d'enllaços*: cada enllaç (o arista o connexió) entre cada dos veïns en un reticle quadrat es pot obrir (de manera que deixa passar el líquid) amb una probabilitat  $p$ , o bé es pot

tancar amb probabilitat  $1 - p$ , de manera independent entre ells. La percolació d'enllaços en el graf complet  $K_n$  (és a dir, el graf amb  $n$  vèrtexs i  $\binom{n}{2}$  arestes) és precisament el graf aleatori binomial  $G(n, p)$ . Un altre model útil és la *percolació de llocs*, en el qual cada lloc està ocupat amb probabilitat  $p$  o bé està buit amb probabilitat  $1 - p$ .

La reformulació matemàtica de la qüestió anterior és: per a un  $p$  donat, quina és la probabilitat que hi hagi un camí obert que vagi des de la part superior a la inferior? És interessant el fet que per a un reticle infinit hi ha un valor crític  $p_c$  tal que per a  $p$  més petit que  $p_c$  la probabilitat que un camí com l'anterior existeixi és 0, mentre que per a  $p$  més gran que  $p_c$  la probabilitat és 1. En alguns casos  $p_c$  es pot calcular explícitament. Per exemple, per a la percolació d'enllaços en el reticle quadrat de dues dimensions  $\mathbb{Z}^2$ ,  $p_c = 1/2$ , un fet que va ser una qüestió oberta durant més de vint anys i que va ser finalment resolt per Kesten a començaments dels anys vuitanta [41].

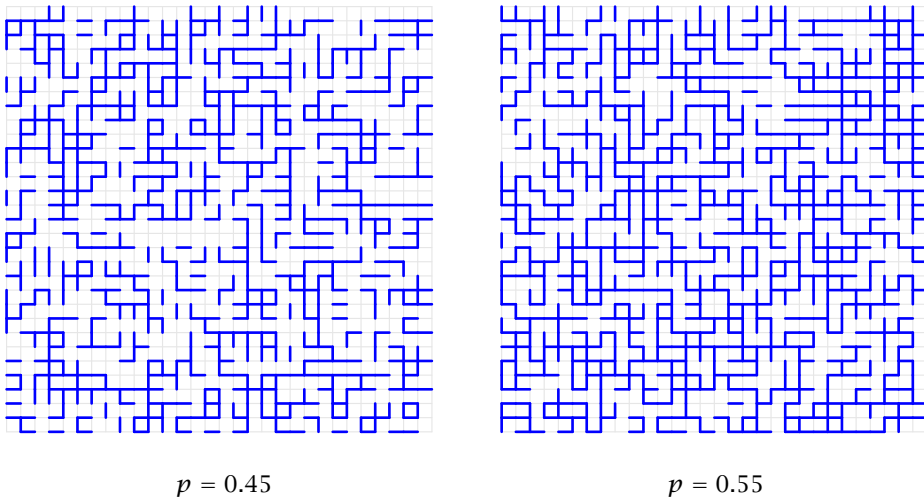


FIGURA 4: Percolació d'enllaços en un reticle quadrat de dimensió 2 per a dos valors de la probabilitat  $p$  que existeixi un enllaç entre dos llocs. A l'esquerra:  $p$  per sota del llindar de percolació  $p_c = 0.5$ ; no hi ha cap camí que connecti dos costats oposats del quadrat. A la dreta:  $p$  per sobre del llindar de percolació; hi ha un camí que connecta el costat de dalt amb el de baix del quadrat (i el de l'esquerra amb el de la dreta).

Desafortunadament, el càlcul exacte de  $p_c$  per a la majoria de grafes reticulats infinits no se sap fer. Per a una discussió més detallada de la percolació es poden consultar els llibres titulats *Percolation* de Grimmett [31] i de Bollobás i Riordan [16].

### 3.2 Ciències socials

L'anàlisi de la comunicació i de les interaccions humanes mitjançant la teoria de grafs determinístics i aleatoris és una eina important en les ciències socials. Un dels exemples més antics i més ben coneguts és el fenomen dels «sis graus de separació» descrit fa anys a [49]: dues persones qualssevol es poden connectar per una cadena de coneguts formada en mitjana per sis persones. De manera anàloga al graf aleatori d'Erdős-Rényi, el graf de les coneixences humanes té un diàmetre petit. Però, a diferència del graf aleatori d'Erdős-Rényi, té un *coeficient d'agrupament* elevat, cosa que el converteix en una «xarxa món petit». La possibilitat que dues persones que tenen un amic comú també es coneguin entre ells és molt més alta que en un graf aleatori. Moltes xarxes d'interaccions humanes tenen aquesta estructura, per exemple, la xarxa de coautors científics, coneguda entre els matemàtics a través del concepte de número d'Erdős.

L'extensió de l'ús d'Internet en la nostra vida diària ha beneficiat molt les ciències socials: els patrons de l'activitat humana a Internet, tal com la navegació a través de pàgines web o la comunicació dins de comunitats virtuals, són una font de dades molt rica. En un exemple recent, l'anàlisi dels patrons dels jocs interactius a Internet ha identificat grups de jugadors que coincideixen amb les fronteres de les regions culturals tradicionals de la Xina [67]. Tot i que aquesta coincidència no és sorprenent en si mateixa, el fet que els grups de jugadors es puguin identificar i analitzar sense utilitzar la informació geogràfica és útil. El comportament a Internet es pot fer servir per a trobar grups culturalment diferents, supervisar-ne l'aparició i l'evolució, les interaccions, la distribució geogràfica, etc. L'estructura de xarxa i la dinàmica d'aquests grups pot ajudar a predir-ne el desenvolupament futur i la seva influència en la societat més enllà dels límits d'Internet.

El patró de la mobilitat humana és rellevant en contextos diferents, per exemple, té conseqüències evidents en la propagació de malalties infeccioses. Modelitzar els desplaçaments humans com a difusió en el graf aleatori d'Erdős-Rényi no té en compte les restriccions geogràfiques, les quals, a diferència del cas de la comunicació per Internet, tenen ara un paper molt important. D'altra banda, el passeig aleatori en un reticle regular negligeix l'efecte dels salts significatius que permet la navegació aèria. En un experiment interessant per a posar de manifest la mobilitat humana, la circulació de bitllets de banc va ser supervisada per voluntaris fent servir webs de seguiment. L'anàlisi de les dades va posar de manifest un decreixement segons la llei de potències de la distribució de les distàncies recorregudes [20]. La presència de salts de llarga distància significa que la propagació de malalties a través d'aquesta xarxa és un procés ràpid i super difusiu. Curiosament, la propagació de les plagues a Europa en el segle XIV no va seguir aquesta tendència, la qual cosa suggereix l'absència d'enllaços de llarg abast i per tant una estructura diferent dels contactes humans a l'època [47].

L'estructura de la xarxa determina l'eficàcia de la divulgació de la informació o de les malalties a través seu [28]. La divulgació serà més eficient en una xarxa



ben connectada (un graf amb diàmetre petit), en la qual dos individus qualssevol no estan gaire lluny l'un de l'altre, o bé un agrupament elevat és una propietat més rellevant de la xarxa? Un experiment en el qual es va crear una comunitat a Internet amb una estructura controlada de la xarxa va posar de manifest que un comportament humà determinat s'escampa més lluny i més de pressa si la xarxa té un agrupament alt que no pas si és aleatòria [22]. El reforç de múltiples veïns és important per tal que un individu adopti un comportament, i en conseqüència per a la seva difusió. Un escenari similar es pot aplicar per a la difusió d'una malaltia que requereixi múltiples contactes, a diferència d'una malaltia contagiosa que es transmet amb un únic contacte. Un altre treball recent identifica models amb una part de la xarxa a la qual no es podrà arribar mai [69]; la mida d'aquesta part depèn altra vegada de l'estructura de la xarxa. Totes aquestes recerques tenen implicacions a l'hora de dissenyar estratègies per a la distribució d'informació o per a les campanyes de vacunació [65]. Durant la redacció d'aquest article va esclatar a l'Àfrica occidental una epidèmia molt greu d'Ebola. L'estructura variable de les xarxes dels contactes socials en les diferents comunitats de la regió afectada es fa servir per a explicar i predir les diferències entre els països implicats pel que fa a la difusió i el desenvolupament posterior de la malaltia [42].

### 3.3 Xarxes artificials

Grans estructures complexes que es troben a la naturalesa sovint estan formades per interaccions individuals no correlacionades entre un gran nombre dels seus components; en conseqüència no ha de ser sorprenent que els grafes aleatoris proporcionin models adequats per a moltes d'elles. D'altra banda, les estructures artificials es poden pensar com el resultat d'un disseny racional optimitzat amb una finalitat determinada; això faria pensar en una estructura regular sense gaire espai per a l'atzar (circuitos elèctrics, xarxes de telefonia mòbil). Malgrat això, moltes creacions humanes que es poden interpretar com una xarxa manifesten un grau elevat d'aleatorietat, sovint degut al fet que es desenvolupen al llarg del temps (com les xarxes d'Internet) o perquè copien una xarxa preexistent (per exemple, les xarxes d'aeroports, les xarxes elèctriques) o bé perquè estan subjectes a l'atzar o a d'altres restriccions. Per tant, els grafes aleatoris amb les característiques ben seleccionades poden servir com a models útils per a l'evolució i el funcionament de moltes estructures complexes artificials.

Es pot guanyar en perspectiva si s'estudien els efectes de la interacció entre dues o més xarxes. Si la interacció és tal que l'eliminació d'un vèrtex d'una xarxa pot produir l'eliminació de vèrtexs en l'altra xarxa, una cadena d'eliminació de vèrtexs pot portar a una fragmentació a gran escala en les dues xarxes. Un exemple ben conegut d'un col·lapse de dues xarxes acoblades és el de l'apagada elèctrica a Itàlia, l'any 2003, quan una fallada en les centrals elèctriques va provocar la caiguda de la xarxa d'Internet que controlava la xarxa elèctrica [21]. L'estudi de les xarxes interdependents pot ajudar a dissenyar xarxes resistents a aquests tipus de fracassos [55].

Tot i que les xarxes lliures d'escala, com ara Internet, són resistents enfront de l'eliminació aleatòria d'un vèrtex, són molt sensibles a un tipus d'atac: l'eliminació dirigida d'un vèrtex de grau molt alt [3]. El coneixement d'aquest fet es pot utilitzar per a trobar les maneres de controlar la difusió de virus a través d'Internet o per a identificar els punts dèbils i sensibles de la xarxa que requereixen una protecció especial contra els atacs. Entendre les propietats de l'estructura subjacent a la xarxa pot ajudar a la pràctica a dissenyar una xarxa amb un bon equilibri entre efectivitat, redundància, robustesa i cost.

### 3.4 Ciències de la vida

Els progressos recents en les ciències de la vida han generat una gran quantitat de dades: s'han seqüenciat els genomes d'organismes sencers, s'han identificat proteïnes i els patrons de les seves interaccions, s'han representat xarxes metabòliques associades a les reaccions bioquímiques. L'anàlisi detallada de les xarxes d'interacció gènica i proteica ens hauria d'ajudar a entendre les propietats de la xarxa que estan determinades per la seva estructura a gran escala més que no pas pels detalls de les interaccions individuals, per exemple, com augmenta el risc de patir una malaltia una combinació de mutacions de diverses proteïnes, de quina manera la topologia de la xarxa d'una proteïna n'afecta la robustesa contra mutacions aleatòries, o bé com la xarxa pot haver evolucionat al llarg del temps [8].

Sovint les xarxes biològiques són lliures d'escala i mostren una distribució molt àmplia del grau dels vèrtexs. Aquestes xarxes són robustes enfront de l'eliminació d'un vèrtex triat aleatòriament [3], una propietat important de cara a la resistència a l'eliminació aleatòria d'una mutació unitària, per exemple, que fa que una proteïna no faci el seu efecte.

En els grafs que representen xarxes biològiques, alguns subgrafs (anomenats *motius*) es poden identificar com a subunitats que compleixen una funció ben definida. En conseqüència, l'anàlisi d'una xarxa biològica en termes dels subgrafs pot posar de manifest subunitats desconegudes fins ara i que ens poden ajudar a entendre la funcionalitat d'una gran xarxa [32].

### 3.5 El cervell

La teoria dels grafs deterministes o bé aleatoris ens pot ajudar a descriure, i en el futur esperem que també a entendre, la que és probablement l'estructura més complexa de la naturalesa: el cervell [53]. La xarxa de neurones interconnectades del cervell ha estat modelitzada com un graf aleatori amb diverses propietats (per exemple, és una xarxa lliure d'escala). Mentre que el «cervell» d'un simple cuc *C. elegans*, un organisme model àmpliament estudiat, està format per 302 neurones connectades per unes 7300 sinapsis, i ha estat representat amb detall [66], el cervell humà conté aproximadament  $10^{11}$  neurones, amb un nombre de sinapsis difícil d'estimar ( $10^{14}$ – $10^{15}$ ?) i no diguem de representar. La manera com les neurones estan connectades i interactuen entre elles determina en gran manera el funcionament del cervell. Per exemple, hi ha

evidències que l'estructura de connectivitat funcional dins del cervell canvia en pacients amb la malaltia d'Alzheimer: les xarxes d'activitat presenten un nivell d'agrupament més baix i s'assemblen més a una xarxa aleatòria que les d'un cervell sa [63]. Els estudis experimentals de l'activitat espontània del cervell —l'anàlisi de pics elèctrics produïts per les neurones, i de la mida i la durada de les allaus d'activitat neuronal— sovint donen resultats que es poden descriure amb distribucions amb llei de potències (lliure d'escala). Això ha portat a la hipòtesi que el cervell, vist com una xarxa de neurones, pot operar en un estat crític, un estat pròxim a una fase de transició. Això és rellevant, atès que diverses propietats de les xarxes relacionades amb l'eficiència de la comunicació, amb el rang dinàmic de resposta, etc., s'optimitzen en el punt crític [9].

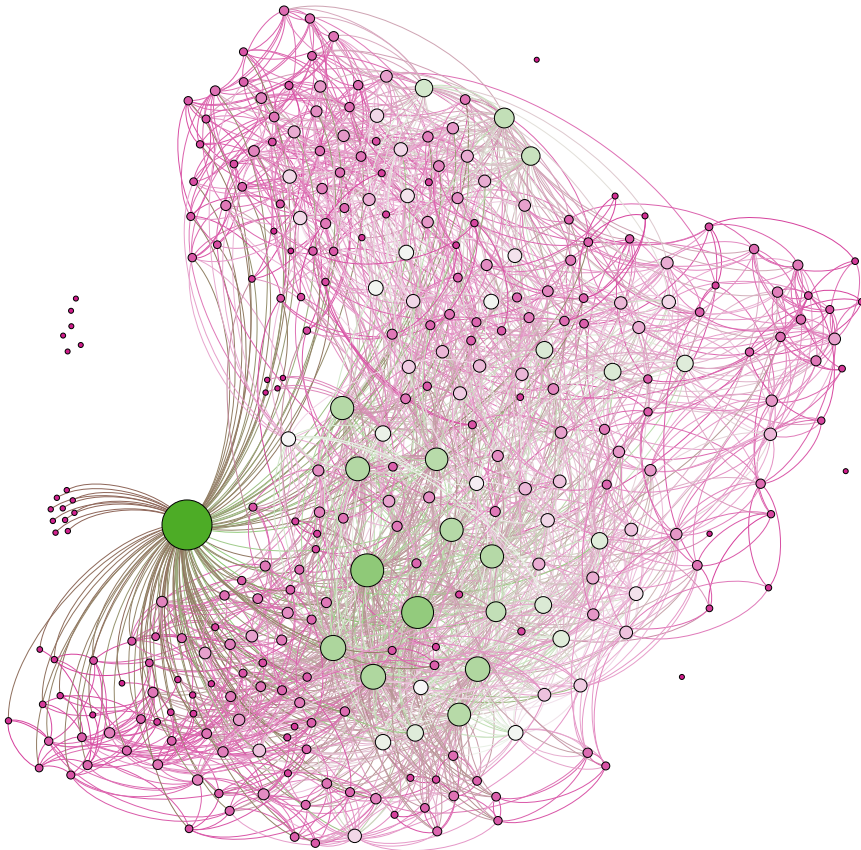


FIGURA 5: El graf que representa les connexions entre les neurones del *C. elegans*. La mida i la tonalitat de gris dels vèrtexs es corresponen amb el seu grau. Les dades estan tretes de [68].

## 4 Conclusió

Aquest article ha pretès donar una idea de l'evolució del camp dels grafs aleatoris al llarg dels últims cinquanta anys, des de la primera definició de graf aleatori fins a una teoria matemàtica rica amb aplicacions a moltes disciplines científiques. S'ha de dir, de totes maneres, que aquest article no és un repàs exhaustiu de la teoria dels grafs aleatoris, sinó més aviat un recull breu d'alguns temes i resultats especials que tenen un interès particular per als autors.

Des d'un punt de vista teòric, s'ha posat de manifest de manera especial el fenomen fascinant de la transició de fase en termes de l'aparició d'una component gegant en un graf aleatori. Malgrat això, hi ha també altres qüestions importants i interessants dels grafs aleatoris, com ara subgrafs petits, cicles llargs, diàmetre, *cliques*, conjunts independents i el número cromàtic, per citar-ne unes quantes. Per a una descripció més completa d'aquests temes el lector pot consultar dos llibres excel·lents sobre grafs aleatoris: el de Bollobás [14] i el de Janson, Łuczak i Ruciński [33].

Des del punt de vista de les aplicacions, la teoria dels grafs aleatoris s'ha mostrat adequada per a la descripció i l'anàlisi d'estructures complexes que apareixen arreu des de la naturalesa fins a la societat, fins i tot en el cervell. D'altra banda, diverses aplicacions continuen motivant i guiant l'estudi dels grafs aleatoris.

L'expansió de la teoria dels grafs aleatoris i les seves aplicacions mostra una altra vegada com les idees matemàtiques més abstractes ens poden ajudar a entendre el «món real».

## Agraïments

La primera autora ha tingut l'ajuda de l'Austrian Science Fund (FWF): P26826-N26 i W1230. Aquell treball ha tingut parcialment el suport de NAWI Graz.

## Referències

- [1] ACHLIOPTAS, D.; D'SOUZA, R. M.; SPENCER, J. «Explosive percolation in random networks». *Science*, 323 (5920) (2009), 1453-1455.
- [2] ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. «Statistical mechanics of complex networks». *Rev. Modern Phys.*, 74 (1) (2002), 47-97.
- [3] ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A.-L. «Error and attack tolerance of complex network». *Nature*, 406 (6794) (2000), 378-382.
- [4] ALDOUS, D. «Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent». *Ann. Probab.*, 25 (2) (1997), 812-854.
- [5] ARONSHTAM, L.; LINIAL, N. «When does the top homology of a random simplicial complex vanish?». *Random Structures Algorithms*, 46 (1) (2015), 26-35.

- [6] ARONSHTAM, L.; LINIAL, N.; ŁUCZAK, T.; MESHULAM, R. «Collapsibility and vanishing of top homology in random simplicial complexes». *Discrete Comput. Geom.*, 49 (2) (2013), 317-334.
- [7] BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. «Emergence of scaling in random networks». *Science*, 286 (5439) (1999), 509-512.
- [8] BARABÁSI, A.-L.; GULBAHCE, N.; LOSCALZO, J. «Network medicine: a network-based approach to human disease». *Nat. Rev. Genet.*, 12 (1) (2011), 56-68.
- [9] BEGGS, J. M.; TIMME, N. «Being critical of criticality in the brain». *Front. Physiol.*, 3 (2012), article 163, 14 pàg.
- [10] BEHRISCH, M.; COJA-OGHLAN, A.; KANG, M. «The order of the giant component of random hypergraphs». *Random Structures Algorithms*, 36 (2) (2010), 149-184.
- [11] BEHRISCH, M.; COJA-OGHLAN, A.; KANG, M. «Local limit theorems for the giant component of random hypergraphs». *Combin. Probab. Comput.*, 23 (3) (2014), 331-366.
- [12] BOHMAN, T.; FRIEZE, A. «Avoiding a giant component». *Random Structures Algorithms*, 19 (1) (2001), 75-85.
- [13] BOLLOBÁS, B. «The evolution of random graphs». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 286 (1) (1984), 257-274.
- [14] BOLLOBÁS, B. *Random Graphs*. 2a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 73)
- [15] BOLLOBÁS, B.; JANSON, S.; RIORDAN, O. «The phase transition in inhomogeneous random graphs». *Random Structures Algorithms*, 31 (1) (2007), 3-122.
- [16] BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. *Percolation*. Nova York: Cambridge University Press, 2006.
- [17] BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. «A simple branching process approach to the phase transition in  $G_{n,p}$ ». *Electron. J. Combin.*, 19 (4) (2012), article 21, 8 pàg.
- [18] BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. «Asymptotic normality of the size of the giant component in a random hypergraph». *Random Structures Algorithms*, 41 (4) (2012), 441-450.
- [19] BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. «Counting connected hypergraphs via the probabilistic method». *Combin. Probab. Comput.*, 25 (1) (2016), 21-75.
- [20] BROCKMANN, D.; HUFNAGEL, L.; GEISEL, T. «The scaling laws of human travel». *Nature*, 439 (7075) (2006), 462-465.
- [21] BULDYREV, S. V.; PARSHANI, R.; PAUL, G.; STANLEY, H. E.; HAVLIN, S. «Catastrophic cascade of failures in interdependent networks». *Nature*, 464 (7291) (2010), 1025-1028.
- [22] CENTOLA, D. «The spread of behavior in an online social network experiment». *Science*, 329 (5996) (2010), 1194-1197.

- [23] CHUNG, F.; LU, L. «Connected components in random graphs with given expected degree sequences». *Ann. Comb.*, 6 (2) (2002), 125–145.
- [24] COOLEY, O.; KANG, M.; KOCH, C. «The size of the giant components in random hypergraphs». Manuscrit.
- [25] COOLEY, O.; KANG, M.; PERSON, Y. «Giant components in random hypergraphs». Manuscrit.
- [26] ERDŐS, P.; RÉNYI, A. «On random graphs I.». *Publ. Math. Debrecen*, 6 (1959), 290–297.
- [27] ERDŐS, P.; RÉNYI, A. «On the evolution of random graphs». *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 5 (1960), 17–61.
- [28] EUBANK, S.; GUCLU, H.; KUMAR, V. S. A.; MARATHE, M. V.; SRINIVASAN, A.; TOROCZKAI, Z.; WANG, N. «Modelling disease outbreaks in realistic urban social networks». *Nature*, 429 (6988) (2004), 180–184.
- [29] GILBERT, E. N. «Random graphs». *Ann. Math. Statist.*, 30 (1959), 1141–1144.
- [30] GIMÉNEZ, O.; NOY, M. «Asymptotic enumeration and limit laws of planar graphs». *J. Amer. Math. Soc.*, 22 (2) (2009), 309–329.
- [31] GRIMMETT, G. *Percolation*. 2a ed. Berlín: Springer, 1999. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 321)
- [32] GUIMERÀ, R.; AMARAL, L. A. N. «Functional cartography of complex metabolic networks». *Nature*, 433 (7028) (2005), 895–900.
- [33] JANSON, S.; ŁUCZAK, T.; RUCIŃSKI, A. *Random Graphs*. Nova York: Wiley-Interscience, 2000. (Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization)
- [34] JANSON, S.; SPENCER, J. «Phase transitions for modified Erdős-Rényi processes». *Ark. Mat.*, 50 (2) (2012), 305–329.
- [35] KANG, M. «Random graphs: from nature to society to the brain». Número especial del *Math. Intelligencer* dedicat al SEOUL ICM 2014, Springer, 42–44.
- [36] KANG, M.; ŁUCZAK, T. «Two critical periods in the evolution of random planar graphs». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364 (8) (2012), 4239–4265.
- [37] KANG, M.; PERKINS, W.; SPENCER, J. «The Bohman-Frieze process near criticality». *Random Structures Algorithms*, 43 (2) (2013), 221–250.
- [38] KANG, M.; SEIERSTAD, T. G. «The critical phase for random graphs with a given degree sequence». *Combin. Probab. Comput.*, 17 (1) (2008), 67–86.
- [39] KAROŃSKI, M.; ŁUCZAK, T. «The phase transition in a random hypergraph». *J. Comput. Appl. Math.*, 142 (1) (2002), 125–135.
- [40] KARP, R. M. «The transitive closure of a random digraph». *Random Structures Algorithms*, 1 (1) (1990), 73–93.
- [41] KESTEN, H. *Percolation Theory for Mathematicians*. Boston, Mass.: Birkhäuser, 1982. (Progress in Probability and Statistics; 2)

- [42] KISKOWSKI, M. A. «Description of the early growth dynamics of 2014 West Africa Ebola epidemic». Preprint (2014). Disponible a arXiv:1410.5409.
- [43] LINIAL, N.; MESHULAM, R. «Homological connectivity of random 2-complexes». *Combinatorica*, 26 (4) (2006), 475-487.
- [44] ŁUCZAK, T. «Component behavior near the critical point of the random graph process». *Random Structures Algorithms*, 1 (3) (1990), 287-310.
- [45] ŁUCZAK, T. «Sparse random graphs with a given degree sequence». A: *Random Graphs*. Vol. 2 (Poznań, 1989). Nova York: Wiley-Intersci. Publ., Wiley, 1992, 165-182.
- [46] ŁUCZAK, T.; PITTEL, B. «Components of random forests». *Combin. Probab. Comput.*, 1 (1) (1992), 35-52.
- [47] MARVEL, S. A.; MARTIN, T.; DOERING, C. R.; LUSSEAU, D.; NEWMAN, M. E. J. «The small-world effect is a modern phenomenon». Preprint (2013). Disponible a arXiv:1310.2636v1.
- [48] MCDIARMID, C.; STEGER, A.; WELSH, D. J. A. «Random planar graphs». *J. Combin. Theory Ser. B*, 93 (2) (2005), 187-205.
- [49] MILGRAM, S. «The small-world problem». *Psychology Today*, 1 (1) (1967), 61-67.
- [50] MOLLOY, M.; REED, B. «A critical point for random graphs with a given degree sequence». A: *Proceedings of the Sixth International Seminar on Random Graphs and Probabilistic Methods in Combinatorics and Computer Science*, "Random Graphs '93" (Poznań, 1993). *Random Structures Algorithms*, 6 (2-3) (1995), 161-179.
- [51] MOLLOY, M.; REED, B. «The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence». *Combin. Probab. Comput.*, 7 (3) (1998), 295-305.
- [52] NEWMAN, M. E. J.; STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. «Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications». *Phys. Rev. E*, 64 (2) (2001), 026118.
- [53] PAPO, D.; BULDÚ, J. M.; BOCCALETTI, S.; BULLMORE, E. T. «Introduction: Complex network theory and the brain». *Phil. Trans. R. Soc. B*, 369 (2014), 20130520.
- [54] PITTEL, B.; WORMALD, N. C. «Counting connected graphs inside-out». *J. Combin. Theory Ser. B*, 93 (2) (2005), 127-172.
- [55] QUILL, E. «When networks network: Once studied solo, systems display surprising behavior when they interact». *Science News*, 182 (6) (2012), 18-25.
- [56] RIORDAN, O. «The phase transition in the configuration model». *Combin. Probab. Comput.*, 21 (1-2) (2012), 265-299.
- [57] RIORDAN, O.; WARNKE, L. «Explosive percolation is continuous». *Science*, 333 (6040) (2011), 322-324.

- [58] RIORDAN, O.; WARNKE, L. «Achlioptas process phase transitions are continuous». *Ann. Appl. Probab.*, 22 (4) (2012), 1450–1464.
- [59] RIORDAN, O.; WARNKE, L. «The evolution of subcritical Achlioptas processes». *Random Structures Algorithms*, 47 (1) (2015), 174–203.
- [60] SATO, C. M.; WORMALD, N. «Asymptotic enumeration of sparse connected 3-uniform hypergraphs». Preprint (2014). Disponible a [arXiv:1401.7381](https://arxiv.org/abs/1401.7381).
- [61] SCHMIDT-PRUZAN, J.; SHAMIR, E. «Component structure in the evolution of random hypergraphs». *Combinatorica*, 5 (1) (1985), 81–94.
- [62] SPENCER, J.; WORMALD, N. «Birth control for giants». *Combinatorica*, 27 (5) (2007), 587–628.
- [63] STAM, C. J.; DE HAAN, W.; DAFFERTSHOFER, A.; JONES, B. F.; MANSHANDEN, I.; VAN CAPPELLEN VAN WALSUM, A. M.; MONTEZ, T.; VERBUNT, J. P. A.; DE MUNCK, J. C.; VAN DIJK, B. W.; BERENDSE, H. W.; SCHELTENS, P. «Graph theoretical analysis of magnetoencephalographic functional connectivity in Alzheimer’s disease». *Brain*, 132 (1) (2009), 213–224.
- [64] STEPANOV, V. E. «The probability of the connectedness of a random graph  $G_m(t)$ ». *Theor. Probability Appl.*, 15 (1970), 55–67.
- [65] TAKEUCHI, F.; YAMAMOTO, K. «Effectiveness of realistic vaccination strategies for contact networks of various degree distributions». *J. Theoret. Biol.*, 243 (1) (2006), 39–47.
- [66] VARSHNEY, L. R.; CHEN, B. L.; PANIAGUA, E.; HALL, D. H.; CHKLOVSKII, D. B. «Structural properties of the *Caenorhabditis elegans* neuronal network». *PLoS Comput. Biol.*, 7 (2) (2011), 1001066.
- [67] WANG, X.; MAO, W.; LIU, C. «Games and culture: Using online-gaming data to cluster Chinese regional cultures». Preprint (2013). Disponible a [arXiv:1310.0621](https://arxiv.org/abs/1310.0621).
- [68] WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. «Collective dynamics of ‘small-world’ networks». *Nature*, 393 (6684) (1998), 440–442.
- [69] ZHANG, Z.-K.; ZHANG, C.-X.; HAN, X.-P.; LIU, C. «Emergence of blind areas in information spreading». *PLoS ONE*, 9 (4) (2014), e95785.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ  
INSTITUT FÜR OPTIMIERUNG UND DISKRETE MATHEMATIK  
STEYRERGASSE 30  
8010 GRAZ, AUSTRIA  
[kang@math.tugraz.at](mailto:kang@math.tugraz.at), [z.petrasek@tugraz.at](mailto:z.petrasek@tugraz.at)