

El cos diferència i el cos de projecció en geometria convexa

JUDIT ABARDIA-EVÉQUOZ

Resum: En aquest article presentem nocions i resultats clàssics de geometria convexa que són objecte de recerca actual, sovint perquè han trobat aplicacions a les noves tecnologies. Ens centrem en tres famílies de convexos: les el·lipses, els cossos centralment simètrics i els zonoides, i en donem algunes de les seves aplicacions en diferents àrees de la geometria. Per exemple, demostrarem el primer teorema fonamental de Minkowski de la geometria de números, l'existència d'un el·lipsoide amb volum màxim contingut a dins d'un convex —l'anomenat el·lipsoide de John— i estudiem el problema de Shephard, que planteja si hi ha parelles de convexos tals que l'un té volum més petit que l'altre, i àrea de les projeccions més gran. Els convexos centralment simètrics i els zonoides, també els descriurem com a imatge de certs operadors fonamentals en geometria convexa: l'operador diferència i l'operador projecció. A la primera part de l'article, presentem els conceptes bàsics que farem servir i fem una petita escapada a la geometria combinatoria, presentant el teorema de Helly i algunes de les seves conseqüències.

Paraules clau: teorema de Helly, cos diferència, cos de projecció, convex centralment simètric, el·lipsoide, zonoide, desigualtat de Rogers-Shephard, desigualtat de Petty.

Classificació MSC2010: 52A20.

1 Introducció

Un conjunt K de l'espai euclidià diem que és *convex* si donats dos punts p i q de K , el segment que els uneix està contingut a K . Figures geomètriques elementals ben conegudes, com el disc, els polígons regulars, els paral·lelograms... , o els seus anàlegs a l'espai, són exemples de convexos. Per contra, una estrella o la vora d'un disc no són conjunts convexos.

Moltes famílies de convexos, com les esferes, les el·lipses, els triangles, etc., han estat estudiades des de l'antiguitat. Es pot dir que l'estudi sistemàtic dels cossos convexos va començar, però, al segle XIX amb els treballs de Cauchy, Steiner, Brunn i Minkowski, i va ser continuat per Blaschke, Hadwiger i Aleksandrov, com a noms principals i més reconeguts en diverses àrees de les

matemàtiques. La citació següent de Klee [9] ens serveix per situar la geometria convexa dins de les matemàtiques:

L'estudi dels conjunts convexos és una branca de la geometria, l'anàlisi i l'àlgebra lineal que té nombroses connexions amb altres àrees de les matemàtiques i ajuda a unificar molts fenòmens matemàtics aparentment diferents. També és rellevant a diverses àrees científiques i tecnològiques.

Algunes de les àrees on els cossos convexos apareixen de manera natural són: geometria de números, anàlisi funcional, equacions en derivades parcials i programació lineal, entre d'altres.

L'objectiu d'aquest article és presentar algunes de les nocions fonamentals en geometria convexa que permetin al lector fer-se una petita imatge dels seus temes d'estudi així com de les seves aplicacions i tècniques, algunes vegades elementals. En la selecció que hem fet ens hem volgut centrar en resultats i nocions intuïtives però que tenen un paper important en el desenvolupament de la geometria convexa. Per descomptat, aquesta selecció està influïda per les preferències de l'autora i la llargada de l'article que teniu entre mans.

Els resultats que presentem se centren en tres famílies de convexos —les el·lipses, els convexos centralment simètrics i els zonoides— i en dues maneres de construir nous convexos —l'operador diferència i l'operador projecció.

Cada un dels conjunts de convexos anteriors forma una «família» en el sentit que si sumem (respecte de la suma de Minkowski, vegeu la definició 5) dos cossos del conjunt, n'obtenim un del mateix conjunt i si fem el límit (respecte de l'anomenada distància de Hausdorff, vegeu la definició 7) d'una successió de cossos del conjunt, el límit també és del conjunt, és a dir, els conjunts de convexos anteriors són tancats per pas al límit i per la suma de Minkowski.

Les famílies anteriors proporcionen exemples senzills però no trivials de convexos, que són importants, per exemple, per verificar conjectures o per reduir problemes generals a d'altres de més senzills. Un problema particularment important en geometria convexa consisteix en la possibilitat d'aproximar un cert convex per convexos d'una determinada família (vegeu l'exemple de la p. 10).

D'altra banda, el cos diferència i de projecció representen dues construccions clàssiques en geometria convexa que han donat (i estan donant) lloc a resultats importants que han trobat diverses aplicacions. Aquestes construccions satisfan propietats geomètriques naturals; per exemple, són invariants respecte de translacions, és a dir, la imatge d'un convex i un desplaçat és la mateixa. Una part de la geometria convexa estudia quines són les propietats mínimes que s'han de demanar per obtenir un operador, és a dir, estudia problemes de caracterització.

Els teoremes de classificació o caracterització tenen un paper important en diferents àrees de les matemàtiques i en geometria convexa han despertat un interès creixent en les darreres dècades. Presentarem alguns dels teoremes de caracterització per al cos diferència i els cos de projecció.

L'article s'organitza en tres seccions. A la secció següent introduïm les definicions bàsiques que farem servir al llarg de l'article i presentem els teoremes mútuament equivalents de Helly, Carathéodory i Radon, base de la geometria combinatòria. Després tractem el cos diferència, els convexos simètrics respecte de l'origen i les el·lipses. A l'última secció presentem el cos de projecció. El cos de projecció d'un convex K defineix un nou cos convex a partir de l'àrea de la projecció de K a cada un dels hiperplans de l'espai. El cos de projecció és un dels objectes principals en «tomografia geomètrica», l'àrea de les matemàtiques que estudia com obtenir informació de cossos geomètrics coneixent-ne informació de les projeccions o seccions (vegeu el monogràfic [4]). Un dels problemes clàssics, amb solució prou sorprenent, és l'anomenat problema de Shephard, que serà tractat al final d'aquest article, i que planteja la qüestió següent: si l'àrea de la projecció d'un convex a l'espai en un pla és més petita que l'àrea de la projecció d'un altre convex en el mateix pla, per a tot pla, és cert que el primer convex té volum més petit que el segon?

2 Algunes nocions i teoremes bàsics de convexitat

En aquesta secció introduïm les nocions de convexitat que farem servir al llarg de tot l'article. Aprofitem també per presentar teoremes clàssics de geometria convexa, que s'emmarquen en la geometria combinatòria.

DEFINICIÓ 1. Siguin $n \geq 2$ i $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$. Diem que K és un conjunt *convex* si per a tota parella de punts $x, y \in K$ es compleix $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ per a tot $\lambda \in [0, 1]$. És a dir, per a tota parella de punts $x, y \in K$, el segment que els uneix està contingut a K .

Denotarem per \mathcal{K}^n l'espai dels conjunts de \mathbb{R}^n que són convexos i compactes.

Donats $p, q \in \mathbb{R}^n$, denotem per $[p, q]$ el segment que uneix p i q .

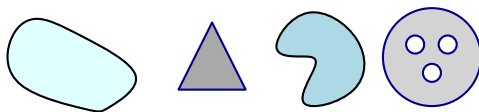


FIGURA 1: Dos conjunts convexos i dos de no convexos.

DEFINICIÓ 2. Diem que $K \subset \mathbb{R}^n$ té *dimensió* m si $K \subset E$ on E és el subespai afí més petit que conté K i E és de dimensió m .

Per exemple, un punt té dimensió 0, un segment té dimensió 1, un disc té dimensió 2 i una bola a \mathbb{R}^n té dimensió n .

DEFINICIÓ 3. Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$. El *diàmetre de* A , $\text{diam}(A)$, està donat pel suprem de la distància entre dos punts del conjunt, és a dir,

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Com a distància, considerem la distància euclidiana usual.

Una de les primeres preguntes que ens podem fer és com podem obtenir nous convexos a partir de convexos donats. Per exemple, la *intersecció* de conjunts convexos és un conjunt convex. La demostració d'aquesta afirmació se segueix directament de la definició de convex i deixem al lector reflexionar-hi un moment.

D'altra banda, la unió de convexos no sempre és un convex.

Les operacions de dilatació, reflexió a l'origen i transformació afí ens permeten definir nous convexos (encara que molt relacionats amb l'original):

DEFINICIÓ 4. Sigui $K \in \mathcal{K}^n$ i $\alpha \geq 0$. La *dilatació de K per α* , que denotem per αK , està definida com

$$\alpha K = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha y \text{ amb } y \in K\}.$$

La *reflexió de K* , que denotem per $-K$, es defineix com

$$-K = \{x \in \mathbb{R}^n : -x \in K\}.$$

Denotem per $GL(n) = \{g \in M_{n \times n} : \det g \neq 0\}$ el grup de matrius invertibles $n \times n$ i per $GL(n) \times \mathbb{R}^n$ el grup de desplaçaments, és a dir, el grup de transformacions lineals seguides d'una translació. La *transformació afí* de K per $g \in GL(n)$ i $p \in \mathbb{R}^n$ es defineix com a

$$gK + p = \{x + p \in \mathbb{R}^n : x \in K\}.$$

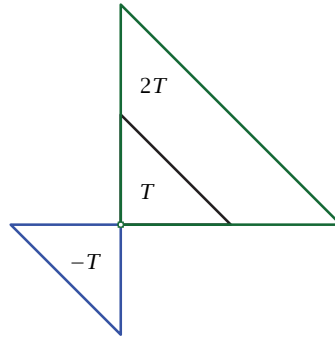


FIGURA 2: Dilatació i reflexió del triangle T .

A continuació presentem una de les operacions bàsiques que defineix un nou convex a partir de dos de donats: la suma de Minkowski.

DEFINICIÓ 5. Siguin $K, L \in \mathcal{K}^n$. La *suma de Minkowski* de K i L , que denotem per $K + L$, està definida a partir de la suma vectorial dels punts de K i de L :

$$K + L := \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in K, y \in L\}.$$

Observem que la suma de Minkowski no és invariant per translacions, és a dir, el resultat depèn d'on està situat el convex: si $t \in \mathbb{R}^n$ i considerem el convex $\{t\}$, que consisteix en un únic punt, llavors la suma de Minkowski $K' = K + \{t\}$ és el convex K desplaçat per $\{t\}$ i $K' + L = K + \{t\} + L = (K + L) + \{t\}$.

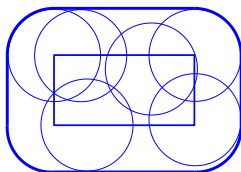


FIGURA 3: Suma de Minkowski d'un rectangle i un disc centrat a l'origen, on hem dibuixat el disc diverses vegades per veure com es va construint la suma.

Una de les parts més rellevants en geometria convexa estudia la relació entre la suma de Minkowski i el volum. Aquí, però, gairebé no tractarem d'aquesta part de la geometria convexa, coneguda com a *teoria de Brunn-Minkowski*. Una gran part d'aquesta teoria estudia desigualtats entre diferents mesures geomètriques com el volum. Probablement, la desigualtat més coneguda, i una de les més importants, que relaciona la suma de Minkowski i el volum, V_n , és la *desigualtat de Brunn-Minkowski*:

$$V_n(K + L)^{1/n} \geq V_n(K)^{1/n} + V_n(L)^{1/n}, \quad \forall K, L \in \mathcal{K}^n. \quad (1)$$

El lector pot trobar informació detallada sobre la desigualtat de Brunn-Minkowski i les seves aplicacions a l'article d'Oriol Serra [15], aparegut en el *Bulletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*.

Tal com hem comentat, la reunió de convexos no és convexa, però si $K \cup L \in \mathcal{K}^n$ amb $K, L \in \mathcal{K}^n$, llavors es compleix la següent igualtat:

PROPOSICIÓ 6. *Siguin $K, L \in \mathcal{K}^n$ tals que $K \cup L \in \mathcal{K}^n$. Llavors,*

$$K \cup L + K \cap L = K + L. \quad (2)$$

Podem provar la igualtat anterior com a igualtat entre conjunts de manera directa. Deixem, però, la demostració per a més endavant com a exemple d'aplicació de la funció suport, noció inevitable en geometria convexa.

Sovint necessitarem una topologia a l'espai de convexos, per exemple, per parlar d'aplicacions contínues definides en aquest espai, o per donar sentit a l'aproximació de conjunts convexos. A continuació, definim la distància de Hausdorff, que defineix la topologia usual a \mathcal{K}^n .

DEFINICIÓ 7. Siguin $K, L \in \mathcal{K}^n$. La *distància de Hausdorff* entre K i L està donada per

$$\begin{aligned} d_H(K, L) &= \min\{\lambda \geq 0 : K \subset L + \lambda B^n, L \subset K + \lambda B^n\} = \\ &= \max\{\sup_{x \in K} \inf_{y \in L} |x - y|, \sup_{x \in L} \inf_{y \in K} |x - y|\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Notem que $K + \lambda B^n$ denota el conjunt obtingut sumant a K una bola de radi λ i que això correspon a fer el conjunt paral·lel a K a distància λ (vegeu la figura 3).

Per tant, (3) ens diu que la distància de Hausdorff entre els convexos K i L l'obtenim considerant el paral·lel més petit de K que conté L , el paral·lel més petit de L que conté K i d'aquests dos valors triem la distància més gran.

EXEMPLE. La distància de Hausdorff també s'utilitza per a estudiar si un convex es pot aproximar per una certa família de convexos. Un exemple consisteix a preguntar-se per la possibilitat d'aproximar un quadrat fixat per hexàgons o viceversa —aproximar un hexàgon fixat per quadrats. Una petita reflexió i potser algun dibuix ens porta a dir que sí que és possible aproximar un quadrat per hexàgons (fem costats cada vegada més curts), però no és possible aproximar un hexàgon per quadrats, ja que «no podem fer aparèixer costats» de manera contínua, respecte de la distància de Hausdorff. Aquestes afirmacions es demostren rigorosament fent servir la funció suport que introduïrem més endavant.

Sovint és interessant poder definir un conjunt convex a partir d'un conjunt qualsevol. Per fer-ho, s'utilitza l'embolcall convex.

DEFINICIÓ 8. Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt qualsevol. L'*embolcall convex* de A , $\text{conv}(A)$, és la intersecció de tots els convexos de \mathbb{R}^n que contenen A .

OBSERVACIÓ. L'embolcall convex d'un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ és, efectivament, un conjunt convex. Aquest fet se segueix de la definició, ja que la intersecció de convexos és un convex. A més a més, $\text{conv}(A)$ és el conjunt convex més petit que conté A . Per tant, si $A \in \mathcal{K}^n$, llavors $\text{conv}(A) = A$.

El teorema de Carathéodory dona una manera de saber si un punt està contingut a l'embolcall convex d'un conjunt, o, equivalentment, una manera per construir l'embolcall convex. Abans d'enunciar-lo recordem algunes definicions.

DEFINICIÓ 9. Diem que k punts x_1, \dots, x_k a \mathbb{R}^n són *afinment independents* si no existeixen números $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ no tots iguals a zero tals que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$.

Siguen x_1, \dots, x_k de \mathbb{R}^n . Qualsevol punt de la forma $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ amb $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ i $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ s'anomena *combinació convexa* dels punts x_1, \dots, x_k .

El *simplex estàndard* a \mathbb{R}^n és l'embolcall convex de l'origen i els punts $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. A \mathbb{R}^2 és el triangle amb vèrtexs $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$.

Un *simplex* és la imatge per a una transformació afí del simplex estàndard.

TEOREMA 10 (TEOREMA DE CARATHÉODORY (1914)). *Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. Llavors, $\text{conv}(A)$ és el conjunt de totes les combinacions convexes de punts de A afinement independents. Dit d'una altra manera, $\text{conv}(A)$ s'obté a partir de la reunió de tots els simplexs amb vèrtexs a A .*

Una interpretació mecànica de l'embolcall convex de m punts $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es pot donar, doncs, dient que un punt x és de l'embolcall convex de $\{x_1, \dots, x_m\}$ si x és el centre de gravetat dels punts $\{x_1, \dots, x_m\}$ amb masses (no negatives) $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Ja el 1816, Gauss va donar una interpretació similar de l'embolcall convex de m punts de \mathbb{R}^n .

Notem que el teorema de Carathéodory esdevé especialment efectiu per determinar si un punt és de l'embolcall convex d'un conjunt A , si A només conté un nombre finit de punts i, per això, ha trobat nombroses aplicacions. En aquest article volem aprofitar per donar l'enunciat i algunes aplicacions d'una formulació equivalent del teorema de Carathéodory, el teorema de Helly. Probablement un dels teoremes més coneguts en convexitat.

Abans de passar a la presentació del teorema de Helly enunciem el teorema de Radon, també equivalent als teoremes de Carathéodory i Helly.

TEOREMA 11 (TEOREMA DE RADON (1921)). *Sigui $A \neq \emptyset$ un subconjunt de \mathbb{R}^n que conté almenys $n + 2$ punts. Llavors, hi ha subconjunts B, C de A tals que $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$ però $\text{conv}(B) \cap \text{conv}(C) \neq \emptyset$.*

2.1 Geometria combinatòria: el teorema de Helly

La geometria combinatòria estudia els aspectes purament combinatoris de la geometria convexa. Així, en geometria combinatòria no es consideren les propietats mètriques dels convexos. El terme «geometria combinatòria» sembla que va ser utilitzat per primera vegada per Hopf (1894–1971).

En aquest apartat donem només un dels teoremes més coneguts en geometria combinatòria i dues de les seves aplicacions, com a petita mostra dels resultats d'aquesta àrea, sovint senzills d'enunciar. Per a més informació sobre geometria combinatòria i aplicacions del teorema de Helly, recomanem al lector l'article de Danzer, Grünbaum i Klee [3].

TEOREMA 12 (TEOREMA DE HELLY (1913)). *Sigui \mathcal{F} una família de convexos compactes de \mathbb{R}^n . Si per a cada subfamília de $n + 1$ elements de \mathcal{F} hi ha un punt contingut a tots els elements d'aquesta subfamília, llavors hi ha un punt contingut a tots els elements de \mathcal{F} .*

Al pla \mathbb{R}^2 , el teorema anterior afirma que si tenim una família de convexos tals que la intersecció de cada 3 d'ells no és buida, llavors es tallen tots. La figura 4 en mostra un exemple i posa de manifest que el teorema no és cert si tenim intersecció només cada n convexos en comptes de $n + 1$ o si els conjunts no són convexos.

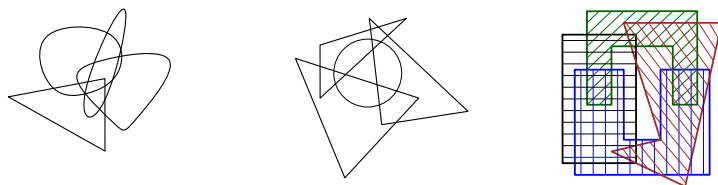


FIGURA 4: Un exemple on podem aplicar el teorema de Helly i dos casos on no el podem aplicar.

El teorema 12 va ser descobert per Helly el 1913, encara que no va publicar-ne la demostració fins al 1923 a [7]. L'article, de dues pàgines i publicat al butlletí de la Societat Alemanya dels Matemàtics, comença així:

El senyor Radon va publicar el 1921 a *Mathem. Annalen* la demostració d'un teorema que jo havia utilitzat sense demostració en una presentació a la Societat Matemàtica Vienesa abans de la guerra. Com que crec que la meua demostració original, després de la de Radon, segueix sent d'interès, vull esbossar-la breument en el que segueix.

També cal comentar que just l'any 1922, König havia publicat una demostració semblant a la de Helly, qui escriu com a nota al peu de pàgina:

Només després d'haver redactat aquesta nota vaig ser informat pel senyor Bieberbach de la demostració del teorema que el senyor König dona a *Math. Zeitschr.*, vol. 14, p. 208, la qual, en el cas que es tracti d'una quantitat finita de conjunts, és essencialment idèntica a la que donem aquí.

La demostració de Helly (i König per a la primera part) segueix sent una de les més intuïtives i geomètriques que es coneixen del teorema 12, per bé que des d'aleshores diversos autors n'han donat de noves. A continuació reproduïm la demostració publicada per Helly, adaptant algun dels arguments i la terminologia. Introduïm, però, primer la noció de separabilitat de dos conjunts.

DEFINICIÓ 13. Siguin $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Diem que A i B són *separables* (per un hiperplà) si existeix un hiperplà H amb vector normal u tal que $A \subset H^+$, $B \subset H^-$ i $A \cap H = B \cap H = \emptyset$ on $H^\pm = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \pm u \rangle \geq 0\}$, $H = H^+ \cap H^-$.

Observem que si $K, L \in \mathcal{K}^n$ són dos convexos tals que $K \cap L = \emptyset$, llavors K i L són separables (vegeu la figura 5).

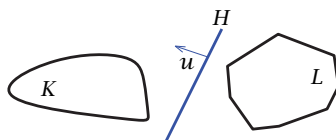


FIGURA 5: Els convexos K i L separats per la recta H perpendicular a u .

DEMOSTRACIÓ DONADA PER HELLY DEL TEOREMA 12. Si $n = 1$, llavors l'enunciat és senzill de demostrar, ja que els únics conjunts convexos de \mathbb{R} són els segments.

Suposem primer que el nombre d'elements de \mathcal{F} és finit i denotem-lo per p . La demostració per a $n \geq 2$ es fa per doble inducció en n i p . Suposem que l'enunciat és cert per a tot $p \in \mathbb{N}$ fins a dimensió $n - 1$. Volem provar-lo per a dimensió n i tot p . Primer observem que si $p \leq n + 1$, l'enunciat del teorema és trivial. Suposem, doncs, que l'enunciat és cert per a $p > n + 1$ i provem-lo per a $p + 1$. Sigui $\mathcal{F} = \{K_1, \dots, K_p, K\}$ una família amb $p + 1$ elements que compleix la hipòtesi del teorema i suposem que té intersecció buida per arribar a contradicció. Denotem per L el convex $K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_p$. Per hipòtesi sabem que L conté almenys un punt. També tenim que és un convex, per ser intersecció de convexos, i que és tancat, ja que cada K_i , $1 \leq i \leq p$, és tancat. A més a més, com que $K \cap L = \emptyset$, existeix un hiperplà H que separa K de L .

Per arribar a contradicció, provem que $L \cap H \neq \emptyset$. Considerem L_i , $1 \leq i \leq p$, el convex intersecció de $K_1, \dots, K_{i-1}, K_{i+1}, \dots, K_p$. Clarament $L \subset L_i$. Per hipòtesi d'inducció en p tenim $K \cap L_i \neq \emptyset$. Així, L_i conté punts de K i de L . Per tant, els convexos $k_i := K_i \cap H$ són no buits. Per hipòtesi d'inducció en n , podem aplicar el teorema a la col·lecció $\{k_1, \dots, k_p\} \subset H$, d'on deduïm $k_1 \cap \dots \cap k_p \neq \emptyset$. Finalment, $L = \bigcap_i L_i$ implica que $L \cap H = \bigcap_i k_i$, contradient el fet que H separa K i L .

Així hem provat que l'enunciat és cert si la família conté un nombre finit d'elements. La validesa del teorema per a una família numerable se segueix a partir d'afegir convexos de manera successiva, tenint en compte que cada convex és tancat.

Demostrem el resultat per a famílies \mathcal{F} no numerables (que seran les que considerarem en les aplicacions donades a continuació). Sigui $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$ una família numerable. Per a aquesta sabem que el teorema es compleix. Denotem per L el convex comú a tots els elements de \mathcal{N} i per r la dimensió de L (vegeu la definició 2). Denotem per v el volum de dimensió r de L . Definim $r_0 := \min\{r : r = \dim(L)\}$ on L és el convex comú a una família numerable de \mathcal{F} . Notem que aquest mínim existeix, ja que la dimensió d'un convex només pren un nombre finit de valors (els enters de 0 a $n = \dim \mathbb{R}^n$). A partir d'ara considerem només les subfamílies numerables de \mathcal{F} tals que la dimensió del convex comú associat L és r_0 i denotem per v_0 l'ínfim dels volums dels L . Per definició d'ínfim, existeix una successió de famílies $\{\mathcal{N}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que la successió dels volums dels convexos associats tendeix a v_0 . D'altra banda, la subfamília que conté tots els elements de cada \mathcal{N}_i , $i \in \mathbb{N}$, i que denotem per \mathcal{N}_0 , és numerable i, per tant, existeix un convex A contingut a cada un dels elements. Afirmem que A està contingut a tots els elements de \mathcal{F} . En efecte, si no fos així, tindriem un convex K tal que no conté A . Aleshores, la família numerable formada pels elements de \mathcal{N}_0 i K té intersecció no buida i aquesta té o bé dimensió més petita que r_0 , o bé volum més petit que v_0 . En els dos casos obtenim una contradicció, amb la definició de r_0 o v_0 . Així, el teorema queda provat per a tota família de conjunts convexos compactes. \square

2.1.1 El teorema de Krasnosel'skiĭ Abans d'enunciar el teorema ens cal introduir la noció intuïtiva de «punts visibles des d'un altre».

DEFINICIÓ 14. Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ compacte. Siguin $p, q \in A$. Diem que p veu q a través de A o bé que q és visible des de p a A si el segment $[p, q]$ (el segment amb extrems els punts p i q) està contingut a A .

Observem que si A és un conjunt convex, llavors tots els punts de A veuen a través de A tots els punts de A . Els *conjunts estrellats* són una generalització dels conjunts convexos i es poden definir, a partir de la noció anterior, com aquells conjunts $A \subset \mathbb{R}^n$ per als quals existeix un punt $p \in A$ que veu a través de A tots els altres punts de A (vegeu la figura 6).

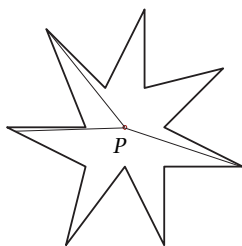


FIGURA 6: Un conjunt estrellat des del punt P .

TEOREMA 15 (KRASNOSEL'SKIĬ (1946)). *Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ compacte. Si cada $n + 1$ punts de A veuen un mateix punt de A a través de A , llavors A és estrellat.*

Una manera de reformular el teorema de Krasnosel'skiĭ en una galeria d'art és la següent: Suposem que som en una galeria d'art i que ens podem moure de manera que, estant drets, trobem un punt des del qual veiem tres dels quadres exposats, i que movent-nos podem arribar a veure cada grup de tres quadres. Llavors, sabem que podem trobar un lloc des del qual podrem veure tots els quadres, sense moure'ns (només girant sobre nosaltres mateixos).

El teorema de Krasnosel'skiĭ es pot obtenir com a corollari del teorema de Helly. En efecte, per a cada punt $p \in A$ definim el conjunt S_p format per tots els punts que veu p a través de A . Per la hipòtesi del teorema de Krasnosel'skiĭ sabem que cada conjunt S_p és compacte i que la intersecció de $n + 1$ conjunts S_p és no buida. Llavors, pel teorema de Helly podem afirmar que hi ha un punt q que pertany a la intersecció de tots els conjunts $\text{conv}(S_p)$. Falta veure que $q \in S_p$. L'argument per contradicció que prova aquest fet, no l'inclouem en aquest article (vegeu [3]).

2.1.2 El teorema de Santaló Els dos resultats següents s'emmarquen en l'estudi de les transversals comunes a una família de convexos.

DEFINICIÓ 16. Sigui \mathcal{F} una família de convexos de \mathbb{R}^n . Anomenem k -transversal de \mathcal{F} un k -pla (i. e., subespai afí de dimensió k) que talla cada element de \mathcal{F} .

TEOREMA 17 (SANTALÓ (1942)). Sigui S una família de segments paral·lels a \mathbb{R}^2 de manera que cada tres segments admeten una transversal comuna. Llavors, hi ha una transversal comuna a tots els elements de S .

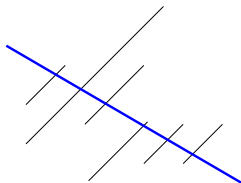


FIGURA 7: Una transversal comuna a segments paral·lels.

Podem demostrar el teorema anterior com aplicació del teorema de Helly. Deixem, al lector interessat, pensar la demostració. L'article original de Santaló està reproduït a la Selecta [13] i la solució, aplicant el teorema de Helly, es pot trobar a [3].

Santaló va obtenir el resultat com a cas particular del teorema següent, a \mathbb{R}^n i per a paral·lelepípedes. Per a demostrar-lo, Santaló s'inspira en la demostració original de Radon del teorema de Helly.

TEOREMA 18 (SANTALÓ (1940)). Sigui \mathcal{P} una família de paral·lelepípedes a \mathbb{R}^n i $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$, n direccions fixades. Suposem que cada costat dels paral·lelepípedes és paral·lel a una de les n direccions fixades. Suposem que per a cada subconjunt de $2^{n-1}(n+1)$ (respectivament de $2^{n-1}(2n-1)$) paral·lelepípedes existeix un hiperplà (respectivament una recta) que talla cada un dels paral·lelepípedes del subconjunt. Llavors, existeix un hiperplà (respectivament una recta) que talla tots els paral·lelepípedes de \mathcal{P} .

El teorema de Helly mateix es pot interpretar com un resultat que estudia les 0-transversals, ja que dona l'existència d'un punt contingut a cada un dels elements de la família considerada.

L'any 1935, Vicensini va començar a estudiar l'existència de k -transversals per a famílies de convexos. Recentment, la teoria de transversals comunes ha tornat a despertar interès gràcies a l'aparició de la geometria computacional.

Un problema, que encara avui sembla obert i ja plantejat per Santaló el 1940, demana si és possible establir un anàleg del teorema 18 per a k -plans, $2 \leq k \leq n-2$.

2.2 Funció suport

En aquest apartat definim una manera analítica de representar, unívocament, un conjunt convex: la funció suport. Aquesta funció permet treballar amb els conjunts convexos i definir-ne de nous de forma senzilla.

DEFINICIÓ 19. Sigui $K \in \mathcal{K}^n$. La funció suport de K , $h_K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, està definida com a

$$h_K(u) := \max\{\langle u, x \rangle : x \in K\}, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

on denotem per $\langle u, x \rangle$ el producte escalar entre dos vectors de \mathbb{R}^n . Sovint escriurem $h(K, u)$ en comptes de $h_K(u)$. Notem que el màxim que defineix la funció suport existeix per a tot $K \in \mathcal{K}^n$ i $u \in \mathbb{R}^n$ ja que K és compacte.

L'hiperplà de suport en la direcció u està definit per

$$H(K, u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = h_K(u)\}, \quad u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Si $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, llavors la funció suport en direcció $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ mesura la distància amb signe des de l'origen a la frontera de K , tal com mostra la figura 8. La distància és negativa si i només si el vector u normal a l'hiperplà de suport apunta cap al semiespai que conté l'origen.

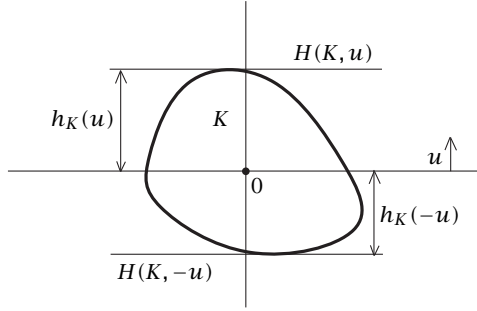


FIGURA 8: Rectes de suport i funció suport a K en la direcció u i $-u$.

EXEMPLES. (i) La funció suport del convex $\{p\}$ on $p \in \mathbb{R}^n$ és la funció lineal $h_{\{p\}}(u) = \langle p, u \rangle$.

(ii) Si $K = B^n$ és la bola de dimensió n a \mathbb{R}^n centrada a l'origen i de radi 1, llavors $h_{B^n}(u) = \langle u, \frac{u}{\|u\|} \rangle = \|u\|$.

(iii) Suposem que $K \in \mathcal{K}^n$ està contingut en un hiperplà H amb vector normal $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$. Llavors, $h_K(\lambda u_0) = 0$ per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) Si $K = [-v, v]$ és un segment que uneix $-v$ i v , llavors $h_{[-v, v]}(u) = |\langle u, v \rangle|$.

Donat $K \in \mathcal{K}^n$ i un subespai afí E denotem per $K|E$ el cos convex contingut a E i obtingut a partir de la projecció ortogonal de K a E .

PROPOSICIÓ 20 (PROPIETATS DE LA FUNCIO SUPORT). Sigui $K \in \mathcal{K}^n$. La funció suport de K és

(i) 1-homogènia, i. e., $h_K(\alpha u) = \alpha h_K(u)$ per a tot $\alpha > 0$;

- (ii) convexa, i. e., $h_K(u + v) \leq h_K(u) + h_K(v)$ per a tot $u, v \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) additiva respecte de la suma de Minkowski, i. e., $h_{K+L}(u) = h_K(u) + h_L(u)$;
- (iv) monòtona, i. e., si $K \subseteq L$, llavors $h_K(u) \leq h_L(u)$ per a tot $u \in \mathbb{R}^n$.
- (v) A més a més, si $E \subset \mathbb{R}^n$ és un subespai vectorial, llavors $h(K|E, u) = h(K, u)$ per a tot $u \in E$.

PROVA. Les propietats anteriors se segueixen directament de la definició de la funció suport i de les propietats del producte escalar.

Demostrem només (v) com a exemple. Recordem que si E és un subespai vectorial de \mathbb{R}^n , llavors podem expressar tots els punts $x \in \mathbb{R}^n$ com $x = v + w$ on $v \in E$, $w \in E^\perp$. Llavors, $\langle u, x \rangle = \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle$, que, juntament amb la definició de funció suport, ens donen la propietat (v). \square

El resultat següent és fonamental en geometria convexa, ja que permet definir convexos de manera analítica. La seva demostració no és directa i no la donarem aquí. Se'n poden trobar 3 demostracions diferents al llibre de Schneider [14], un monogràfic de geometria convexa, que tracta especialment sobre la teoria de Brunn-Minkowski, i que s'ha convertit en indispensable per a tothom qui treballa o utilitza la geometria convexa.

TEOREMA 21 (CARACTERITZACIÓ DE LA FUNCIO SUPORT). *Una funció $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és 1-homogènia i convexa, és a dir,*

$$f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad f(u + v) \leq f(u) + f(v), \quad \text{per a tots } u, v \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0,$$

si i només si existeix $K \in \mathcal{K}^n$ tal que f és la funció suport de K , i. e., $f = h_K$.

A partir de la propietat (iii) de la proposició 20 podem calcular de manera molt més senzilla la funció suport d'un convex si el sabem escriure com a suma de Minkowski de dos convexos dels quals coneixem la funció suport. Per exemple, el quadrat Q amb vèrtexs $(\pm 1, 1)$, $(1, \pm 1)$, es pot escriure com a suma dels segments $[-(1, 0), (1, 0)]$ i $[-(0, 1), (0, 1)]$. Així doncs,

$$h_Q(u) = |\langle u, (0, 1) \rangle| + |\langle u, (1, 0) \rangle|.$$

A partir de la funció suport es defineix l'amplada d'un convex en una direcció.

DEFINICIÓ 22. Sigui $K \in \mathcal{K}^n$ i $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. L'amplada de K en la direcció u es defineix com

$$w(K, u) = h(K, u) + h(K, -u).$$

Diem que $K \in \mathcal{K}^n$ és d'amplada constant si $w(K, u)$ és independent de u .

Observem que a partir de la definició de funció suport tenim que l'amplada d'un convex coincideix amb la noció intuïtiva que en tenim (vegeu la figura 8).

Els convexos d'amplada constant formen una altra família de convexos amb moltes propietats interessants i els hi podríem ben dedicar un article. Aquí,

però, només comentarem que si K és un convex d'amplada constant, aleshores la suma de K amb la seva reflexió a l'origen, $-K$, és una bola. En efecte, si utilitzem la funció suport tenim, per a $u \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} h(K + (-K), u) &= h(K, u) + h(-K, u) = \\ &= h(K, u) + h(K, -u) = w(K, u) = \text{constant}. \end{aligned}$$

Com que la funció suport d'un convex el determina de manera única i tenim que les boles tenen funció suport constant, tenim que $K + (-K)$ és una bola.

A partir de la funció suport podem donar una descripció equivalent de la distància de Hausdorff com

$$d_H(K, L) = \sup\{|h(K, u) - h(L, u)| : u \in \mathbb{S}^{n-1}\}. \quad (4)$$

Acabem aquest apartat amb una demostració de la proposició 6.

DEMOSTRACIÓ DE LA PROPOSICIÓ 6. Siguin $K, L \in \mathcal{K}^n$ tals que $K \cup L \in \mathcal{K}^n$. A partir de la proposició 20, apartat (iii), tenim que l'equació (2) és equivalent a

$$h_{K \cup L}(u) + h_{K \cap L}(u) = h_K(u) + h_L(u), \quad \text{per a tot } u \in \mathbb{R}^n.$$

Així doncs, estudiem $h_{K \cup L}(u)$ i $h_{K \cap L}(u)$ en termes de $h_K(u)$ i $h_L(u)$. De la definició de funció suport i les propietats bàsiques del màxim d'un conjunt tenim

$$\begin{aligned} h_{K \cup L}(u) &= \max\{\langle x, u \rangle : x \in K \cup L\} = \max\{\langle x, u \rangle : x \in K \text{ o bé } x \in L\} = \\ &= \max\{\max\{\langle x, u \rangle : x \in K\}, \max\{\langle x, u \rangle : x \in L\}\} = \\ &= \max\{h_K(u), h_L(u)\}, \end{aligned}$$

i, anàlogament, $h_{K \cap L}(u) = \min\{h_K(u), h_L(u)\}$. Per tant,

$$h_{K \cup L}(u) + h_{K \cap L}(u) = \max\{h_K(u), h_L(u)\} + \min\{h_K(u), h_L(u)\} = h_K(u) + h_L(u),$$

tal com volíem veure. \square

2.3 Mesura d'àrea i teorema de Minkowski

Sigui $K \in \mathcal{K}^n$. En aquest apartat definim una mesura a l'esfera \mathbb{S}^{n-1} tal que si integrem respecte d'ella la funció constant igual a 1, obtenim l'àrea de la vora de K .

DEFINICIÓ 23. Sigui $K \in \mathcal{K}^n$ i $p \in \partial K$. Diem que $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ és un *vector normal exterior* a K en p si l'hiperplà ortogonal a v que passa per p suporta K i $\langle v, p \rangle \geq 0$. Si E és un borelià de \mathbb{S}^{n-1} , definim

$$S(K, E) = V_{n-1}(\{p \in \partial K : \exists v \in E \text{ vector normal exterior a } K \text{ en } p\}),$$

on $V_{n-1}(A)$ denota el volum $(n-1)$ -dimensional d'un conjunt de dimensió $n-1$.

Es pot provar que $S(K, \cdot)$ defineix una mesura a \mathbb{S}^{n-1} per a cada convex $K \in \mathcal{K}^n$. Aquesta mesura s'anomena *mesura d'àrea* i compleix $S(K, \mathbb{S}^{n-1}) = V_{n-1}(\partial K)$. Notem que la mesura d'àrea d'un convex tal que ∂K és diferenciable es pot definir a partir de la inversa de l'aplicació de Gauss.

- EXEMPLES. (i) Si $K \in \mathcal{K}^n$ és la bola unitat, llavors $S(K, \cdot)$ coincideix amb la mesura de Lebesgue $(n - 1)$ -dimensional.
- (ii) Si $K \in \mathcal{K}^2$ és un polígon amb vectors normals u_1, \dots, u_r , $r \geq 3$, (vegeu la figura 9) i la longitud del costat amb vector normal u_i és l_i , $1 \leq i \leq r$, llavors

$$S(K, \cdot) = \sum_{i=1}^r l_i \delta_{u_i}, \quad (5)$$

on δ_{u_i} denota la delta de Dirac en u_i .

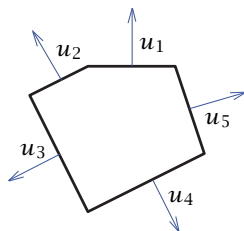


FIGURA 9: Normals a un polígon.

Sabent que per a cada convex $K \in \mathcal{K}^n$, la mesura d'àrea defineix una mesura a \mathbb{S}^{n-1} , una pregunta natural que apareix és: què en podem dir del recíproc? És a dir, si tenim una mesura μ a \mathbb{S}^{n-1} , quan podem afirmar que aquesta és la mesura d'àrea d'algun convex?

La resposta es coneix com a teorema d'existència de Minkowski, vegeu [14].

TEOREMA 24 (MINKOWSKI (1911)). *Una mesura finita de Borel μ a l'esfera \mathbb{S}^{n-1} és la mesura d'àrea $S(K, \cdot)$ d'un convex $K \in \mathcal{K}^n$ amb interior no buit si i només si μ no està concentrada a cap equador de \mathbb{S}^{n-1} i*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u \, d\mu(u) = 0.$$

Aquest teorema s'utilitza sovint per demostrar resultats en geometria convexa. En aquest article, l'utilitzarem per a demostrar el teorema 54.

2.4 Volums mixtos

Els volums mixtos es poden considerar generalitzacions del volum per a diversos convexos i són de gran importància en la teoria de Brunn-Minkowski, que relaciona el volum i la suma de Minkowski. A continuació els descrivim de manera breu. Denotem per V_j el volum d'un cos a \mathbb{R}^j , $j \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 25. *Siguin $m \in \mathbb{N}$, $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}^n$ i $t_1, \dots, t_m > 0$. Aleshores, el volum*

$$V_n(t_1 K_1 + \dots + t_m K_m)$$

és un polinomi de grau n en les variables t_1, \dots, t_m .

Els volums mixtos es defineixen com els coeficients simètrics $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$, $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m$, tals que

$$V_n(t_1 K_1 + \dots + t_m K_m) = \sum_{j_1=1}^m \dots \sum_{j_n=1}^m t_{j_1} \dots t_{j_n} V(K_{j_1}, \dots, K_{j_n}).$$

Observem que si $m = n$ i $K_1 = \dots = K_n = K$, llavors $V(K, \dots, K) = V_n(K)$.

EXEMPLE. Si K, L són convexos a \mathbb{R}^2 i $t > 0$, llavors, per la simetria dels volums mixtos i l'observació anterior, es compleix

$$\begin{aligned} V_2(K + tL) &= V(K, K) + t(V(K, L) + V(L, K)) + t^2 V(L, L) = \\ &= V_2(K) + 2tV(K, L) + V_2(L). \end{aligned}$$

Així doncs, a \mathbb{R}^2 , podem calcular el volum mixt $V(K, L)$ com

$$V(K, L) = \frac{1}{2}(V_2(K + L) - V_2(K) - V_2(L)).$$

Malauradament, per a dimensions superiors, no podem donar una forma tan senzilla, però sí que una de semblant, utilitzant el principi d'inclusió i exclusió. En el cas $V(K, L, \dots, L)$ es coneix una representació integral dels volums mixtos, a partir de la mesura d'àrea de L

$$V(K, L, \dots, L) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(K, v) dS(L, v). \quad (6)$$

TEOREMA 26. *L'aplicació $V: \mathcal{K}^n \times \dots \times \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$, que defineix els volums mixtos, és, en cada component, lineal, monòtona, invariant per translacions i contínua. A més a més, és invariant per rotacions, si apliquem la mateixa rotació a totes les components a la vegada.*

Els volums mixtos són sempre positius, i estrictament positius si hi ha segments $S_i \subset K_i$, $i = 1, \dots, n$, amb direccions linealment independents.

Finalment, donem les tres desigualtats més importants que relacionen volums mixtos.

TEOREMA 27. *Siguin $K, L, K_3, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$.*

(i) *Desigualtat d'Aleksandrov-Fenchel (1937):*

$$V(K, L, K_3, \dots, K_n)^2 \geq V(K, K, K_3, \dots, K_n)V(L, L, K_3, \dots, K_n).$$

(ii) *Primera desigualtat de Minkowski (1903):*

$$V(K, L, \dots, L)^n \geq V_n(K)V_n(L)^{n-1}.$$

La igualtat val si i només si K i L són homotètics, i. e., $K = gL + t$ amb g una rotació i $t \in \mathbb{R}^n$ una translació.

(iii) *Segona desigualtat de Minkowski (1903):*

$$V(K, L, \dots, L)^2 \geq V(K, K, L, \dots, L)V_n(L).$$

La desigualtat d'Aleksandrov-Fenchel és una de les més generals i se'n dedueixen les dues desigualtats de Minkowski anteriors, així com la desigualtat isoperimètrica, entre moltes altres de les desigualtats essencials en geometria convexa.

Per exemple, per deduir la desigualtat isoperimètrica només ens cal utilitzar el fet (que no provarem) que la superfície d'àrea d'un convex K a \mathbb{R}^n coincideix amb $nV(K, \dots, K, B)$. Per a $n = 2$ i $L = B^2$, la desigualtat d'Aleksandrov-Fenchel ens diu directament $V(K, B^2)^2 \geq V(K, K)V(B^2, B^2)$, és a dir, $\text{perímetre}(K)^2 \geq 4\pi \text{àrea}(K)$. Per a $n = 3$ hem d'aplicar 2 vegades la desigualtat d'Aleksandrov-Fenchel per obtenir:

$$V(K, K, B^3)^4 \geq V(K, K, K)^2 V(K, B^3, B^3)^2 \geq V_3(K)^2 V(K, K, B^3) V(B^3, B^3, B^3).$$

Simplificant $V(K, K, B^3)$ a cada costat, obtenim la desigualtat isoperimètrica a \mathbb{R}^3 .

3 El cos diferència

DEFINICIÓ 28. Donat un convex $K \in \mathcal{K}^n$, el *cos diferència* DK de K es defineix com

$$DK := K + (-K).$$

L'aplicació $K \mapsto DK$ s'anomena *operador diferència*.

EXEMPLES. (i) Si K és un disc centrat a l'origen, llavors $-K$ és el mateix disc i tenim $K + (-K) = 2K$, és a dir, el cos diferència d'un disc de radi r és un disc de radi $2r$.

(ii) El cos diferència d'un triangle qualsevol és un hexàgon. Una manera de veure-ho és la següent: si K és un triangle amb vectors normals exteriors n_1, n_2, n_3 , llavors $-K$ és un triangle amb vectors normals exteriors $-n_1, -n_2, -n_3$ amb la propietat que $n_i \neq -n_j$, $1 \leq i, j \leq 3$. Així doncs, $K + (-K)$ té vectors normals $\pm n_1, \pm n_2, \pm n_3$.

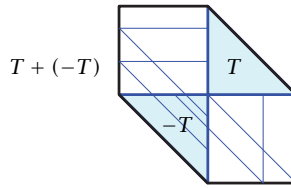


FIGURA 10: Cos diferència del triangle rectangle T , on hem dibuixat el triangle $-T$ diverses vegades per veure com s'ha construït $DT = T + (-T)$.

Aquesta manera de definir un nou conjunt convex pot semblar molt senzilla, però, no obstant això, té propietats i aplicacions importants en geometria convexa.

A continuació estudiem propietats geomètriques del cos i l'operador diferència. Per a un estudi més detallat del cos diferència recomanem [14, secció 10.1].

PROPOSICIÓ 29. *L'operador diferència és:*

- (i) *una simetrització, i. e., $DK = -DK$ per a tot $K \in \mathcal{K}^n$;*
- (ii) *parell, i. e., $DK = D(-K)$ per a tot $K \in \mathcal{K}^n$;*
- (iii) *homogeni de grau 1, i. e., $D(\lambda K) = \lambda DK$ per a tot $K \in \mathcal{K}^n$;*
- (iv) *invariant per translacions, i. e., $D(K+t) = DK$ per a tots $K \in \mathcal{K}^n$ i $t \in \mathbb{R}^n$;*
- (v) *$GL(n)$ -covariant, i. e., $D(gK) = gDK$ per a tot $K \in \mathcal{K}^n$ i tot $g \in GL(n)$;*
- (vi) *additiu, i. e., $D(K+L) = DK+DL$ per a tot $K, L \in \mathcal{K}^n$;*
- (vii) *una valoració (de Minkowski), i. e., $DK+DL = D(K \cup L) + D(K \cap L)$ per a tot $K, L \in \mathcal{K}^n$ tals que $K \cup L \in \mathcal{K}^n$;*
- (viii) *monòton, i. e., si $K \subset L$, llavors $DK \subset DL$;*
- (ix) *continu respecte de la distància de Hausdorff.*

A més a més, D preserva dimensions, i. e., si $K \in \mathcal{K}^n$ té dimensió k , $k \in \{0, \dots, n\}$, llavors $\dim(DK) = k$.

PROVA. Les propietats (i) i (ii) es dedueixen directament de $K+(-K) = -K+(K)$.

Les propietats (iii) i (v) s'obtenen de la commutativitat de les transformacions afins i la suma de Minkowski, i. e., $D(gK) = gK + (-gK) = g(K + (-K)) = gDK$. En particular, $\lambda K + (-\lambda K) = \lambda(K + (-K))$ per a tot $\lambda > 0$.

El punt (vi) és clar, ja que la suma de Minkowski és distributiva respecte del producte per escalars i commutativa. La propietat (iv) és un cas particular, ja que $D(\{p\}) = \{0\}$.

Per provar que l'operador diferència és una valoració de Minkowski, el més directe és utilitzar l'additivitat que acabem de veure i la relació (2) que afirmen

$$D(K \cup L) + D(K \cap L) = D(K \cup L + K \cap L) = D(K + L) = DK + DL.$$

La monotonia del cos diferència és directa a partir de la seva definició, ja que si $K \subset L$, aleshores també $-K \subset -L$.

Encara que no és difícil, no provarem la continuïtat de l'operador diferència.

El fet que D preservi dimensions se segueix directament de la definició de la suma de Minkowski. En efecte, si K està contingut en un espai afí A , podem aplicar una translació i suposar $0 \in A$. Llavors, $-K$ també està contingut en A traslladat i la suma de Minkowski $K + (-K)$ només pot contenir punts de A . \square

Cotes per al volum del cos diferència en termes del volum del cos inicial

L'última propietat geomètrica del cos diferència que presentem dona cotes per al volum del cos diferència DK en termes del volum de K .

TEOREMA 30 ([12]). *Sigui $K \in \mathcal{K}^n$. Llavors,*

$$2^n V_n(K) \leq V_n(DK) \leq \binom{2n}{n} V_n(K). \quad (7)$$

Les igualtats es donen trivialment si $\dim K < n$. Per a $K \in \mathcal{K}^n$ tals que $\dim K = n$, la igualtat en la cota inferior es dona si i només si $K = -K$ i en la cota superior si i només si K és un símplex.

La desigualtat inferior s'obté directament de la desigualtat de Brunn-Minkowski (1). En efecte, considerant $L = -K$ a (1), tenim $V_n(K + (-K))^{1/n} \geq 2V_n(K)^{1/n}$, la cota inferior per a $V_n(DK)$.

La cota superior, anomenada *desigualtat de Rogers-Shephard*, és la part nova del resultat. Encara que la demostració no és difícil, és força llarga i no la donarem aquí. La idea bàsica, però, consisteix a utilitzar la representació següent del cos diferència:

$$DK = \{x \in \mathbb{R}^n : K \cap (K + x) \neq \emptyset\}. \quad (8)$$

3.1 Caracteritzacions del cos diferència

Tal com hem comentat, una de les àrees més actives de la geometria convexa es dedica a la caracterització dels operadors i de les operacions que s'han utilitzat clàssicament (com la suma de Minkowski o la funció suport). Aquest estudi permet obtenir nous operadors amb propietats geomètriques naturals (o necessàries per al problema que es vol tractar), o bé confirmar que una certa operació no es pot definir d'una altra manera.

El primer resultat de classificació en geometria convexa, amb conseqüències profundes en geometria integral, i un dels més coneguts, va ser donat per Hadwiger, que va classificar els volums intrínsecs. Si $K \in \mathcal{K}^n$, el *j-volum intrínsec* de K està definit com a $V_j(K) = c_{n,j} V(K[j], B^n[n-j])$, on, al volum mixt, K hi apareix j vegades i la bola unitat B^n , $n-j$ vegades, i $c_{n,j}$ denota una constant. Els volums intrínsecs inclouen el volum, l'àrea de la superfície i la característica d'Euler.

TEOREMA 31. *Un funcional continu $\mu: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és invariant per rotacions i translacions i satisfà la propietat de valoració, i. e., $\mu(K) + \mu(L) = \mu(K \cup L) + \mu(K \cap L)$ per a tot $K, L \in \mathcal{K}^n$ tals que $K \cup L \in \mathcal{K}^n$, si i només si és una combinació lineal de volums intrínsecs.*

Els primers resultats de caracterització de funcionals $\varphi: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$, on tant l'espai de sortida com d'arribada són els conjunts convexos, es remunten als anys setanta, quan Schneider va començar un estudi dels operadors additius que són covariants per rotacions (com el cos diferència) i invariants per translacions i va donar diferents caracteritzacions de l'operador diferència. Un estudi sistemàtic no va ser, però, començat fins a principis d'aquest segle. El 2005, Ludwig [11] va obtenir el resultat següent, que caracteritza l'operador diferència.

TEOREMA 32. *Un operador $\varphi: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$ és continu, invariant per translacions, és una valoració i és $SL(n)$ -covariant si i només si existeix $\lambda \geq 0$ tal que $\varphi K = \lambda DK$.*

Després d'aquest resultat, es va començar un estudi de les valoracions de \mathcal{K}^n a \mathcal{K}^n . En aquests resultats es relaxa alguna de les hipòtesis o es canvia la covariància per la contravariància (vegeu la proposició 47(v)). Recomanem [14, secció 10.6] per tenir-ne un recull. Més recentment, el 2013, Gardner, Hug i Weil [5] van començar un estudi sistemàtic de les operacions entre convexos, i. e., de les aplicacions $\mathcal{K}^n \times \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$ (per exemple, la suma de Minkowski). En aquest treball, els autors també obtenen un teorema de classificació del cos diferència, on no es demana la propietat de valoració.

TEOREMA 33. *Un operador $\varphi: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$ és continu, invariant per translacions i $GL(n)$ -covariant si i només si existeix $\lambda \geq 0$ tal que $\varphi K = \lambda DK$.*

Recentment, juntament amb Colesanti i Saorín Gómez, hem estudiat el paper de la desigualtat (7) com a propietat per caracteritzar el cos diferència. Aquesta propietat, encara que en principi és més feble que les propietats d'invariància, permet donar les caracteritzacions següents.

TEOREMA 34. *Un operador $\varphi: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$ és invariant per translacions, és una valoració, satisfà (7) i és monòton si i només si existeix $g \in GL(n)$ tal que $\varphi K = gDK$.*

Per a $n \geq 3$, un operador $\varphi: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$ és continu, invariant per translacions, és una valoració, satisfà (7) i és $SO(n)$ -covariant (i. e., $\varphi(gK) = g\varphi(K)$ per a tot $g \in SO(n)$) si i només si existeix $\lambda > 0$ tal que $\varphi K = \lambda DK$.

En general, per demostrar els teoremes anteriors es fan servir, d'una banda, tècniques geomètriques de descomposició de politops (si es té, per exemple, la condició de $SL(n)$ -covariància) i, d'altra banda, resultats demostrats els últims anys, en gran part per Alesker, de l'àrea de la geometria integral. Més en concret, cal un estudi aprofundit de l'espai de valoracions $\mu: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Una vegada coneguts aquests resultats, s'han d'adaptar al cas de valoracions $\varphi: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$ a partir de la funció suport, ja que, fixada una direcció $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, la funció $K \mapsto h_{\varphi K}(u)$ és una valoració (per la linealitat de la funció suport) que pren valors reals.

3.2 Covariogram

El covariogram de K es defineix a partir de l'expressió (8) del cos diferència.

DEFINICIÓ 35. Sigui $K \in \mathcal{K}^n$ amb interior no buit. El *covariogram de K* és la funció $g_K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$g_K(x) := V_n(K \cap (K + x)).$$

Notem que suposar que K té interior no buit ens evita considerar la funció constant igual a zero. Notem també que $g_K(0) = V_n(K \cap K) = V_n(K)$. També es compleix $g_K(-x) = g_K(x)$.

Considerant la definició de la funció suport, del cos diferència i de l'amplada (vegeu la definició 22), tenim que $h(DK, u)$ coincideix amb l'amplada de K en la direcció $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. D'altra banda, es pot veure que el covariogram d'un convex K en determina l'amplada, en cada direcció. Per tant, el covariogram determina la funció suport de DK . La pregunta natural, plantejada per primera vegada per Matheron el 1986, demana si un convex K queda determinat, mòdul translacions, pel covariogram. És a dir, existeixen convexos K, L tals que $K \neq L + t$ per a tot $t \in \mathbb{R}^n$, amb $g_K = g_L$? Si K és simètric respecte de l'origen, llavors sí que el covariogram determina K , mòdul translacions. En els altres casos, actualment es pot respondre la pregunta de la manera següent:

TEOREMA 36 (BIANCHI, AVERKOV-BIANCHI (2005, 2009)). *Tot convex de dimensió 2 queda determinat pel seu covariogram.*

Tot polítop de dimensió 3 queda determinat pel seu covariogram.

A \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, existeixen convexos que no estan determinats pel seu covariogram.

Una idea bàsica en la prova del resultat anterior consisteix a escriure la funció g_K com a convolució de les funcions indicatrius de K i $-K$ i llavors aplicar mètodes de l'anàlisi de Fourier.

El covariogram té diverses aplicacions importants, per exemple, a l'òptica, a la mecànica quàntica (relacionat amb la unicitat de les matrius de Pauli), a l'astronomia, a la microscòpia, etc. En aquestes aplicacions el covariogram apareix relacionat amb el problema de recuperació de fase que, en general, és fortament indeterminat, i només imposant condicions o donant informació *a priori* es pot reconstruir la funció que defineix la fase. Destaquem finalment que, des d'aquest punt de vista, el covariogram és important en cristal·lografia de raigs X, una tècnica que permet determinar l'estructura dels àtoms en un cristall, i que aplicacions d'aquesta tècnica, especialment a la química orgànica i a la biologia, han estat objecte dels treballs de diversos premis Nobel, des de l'any 1962 fins al 2009.

3.3 Convexos centralment simètrics

Els cossos diferència són sempre simètrics respecte de l'origen. En aquest apartat estudiem els convexos centralment simètrics, sense considerar-los imatge del cos diferència.

DEFINICIÓ 37. Un convex K és *o-simètric* si $K = -K$; i. e., si és simètric respecte de l'origen. Denotem per \mathcal{K}_s^n el conjunt de cossos *o-simètrics*. Diem que un cos K és *centralment simètric* si existeix $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $K + t$ és *o-simètric*.

Per exemple, els discs, els quadrats, els polígons regulars amb un nombre parell de costats o les el·lipses són centralment simètrics.

La classe dels cossos *o-simètrics* satisfà sovint propietats més bones i algunes desigualtats o teoremes es poden millorar si ens restringim a considerar convexos *o-simètrics* (vegeu, p. ex., el teorema 43).

El resultat següent ens dona un criteri per comprovar si un convex és *o-simètric*: n'hi ha prou amb comprovar si cada projecció a un subespai vectorial de dimensió 2 és un convex *o-simètric*.

TEOREMA 38 (BLASCHKE-HESSBERG (1917)). $K \in \mathcal{K}^n$ és centralment simètric si i només si per a cada $E \subset \mathbb{R}^n$, subespai vectorial de dimensió 2, el convex $K|E$ és centralment simètric.

PROVA. Vegem primer que si $K \in \mathcal{K}^n$ és centralment simètric, llavors $K|E \in \mathcal{K}^n$ és centralment simètric per a cada $E \subset \mathbb{R}^n$ subespai vectorial de dimensió 2. Considerem una translació de K tal que $K \in \mathcal{K}_s^n$. L'afirmació se satisfà si

$$h(K|E, u) = h(K|E, -u), \quad \text{per a tot } u \in E.$$

Per la proposició 20(v) tenim, però, que la igualtat anterior és equivalent a $h(K, u) = h(K, -u)$, per a tot $u \in E$, que es compleix ja que $K \in \mathcal{K}_s^n$.

Passem a la part no trivial de l'enunciat. Considerem $p, q \in K$ tals que $\text{diam}(K) = d(p, q)$, i. e., p i q són a distància màxima (notem que existeixen ja que K és compacte). Sigui m el punt mitjà del segment $[p, q]$. Desplacem el convex K de manera que m coincideixi amb l'origen de coordenades i denotem per \tilde{p} i \tilde{q} els punts desplaçats de p i q . Sigui $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ una direcció linealment independent amb la direcció $u := \overline{\tilde{p}\tilde{q}}$. Llavors, u, v generen un pla E_0 de dimensió 2. La projecció de K a E_0 , que denotem per K' , és, per hipòtesi, un convex simètric i conté els punts $m = 0$, \tilde{p} i \tilde{q} . En aquesta situació tenim que K' és simètric respecte de $m = 0$, ja que, si no, hi hauria un segment contingut a K' amb longitud més gran que $d(\tilde{p}, \tilde{q})$ i $d(\tilde{p}, \tilde{q})$ no coincidiria amb el diàmetre de K (vegeu la definició 3). Com que K' és simètric respecte de l'origen, es compleix $h(K', v) = h(-K', v) = h(K', -v)$ i tenint en compte la proposició 20(v), deduïm $h(K, v) = h(K, -v)$, amb $v \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{\pm u\}$ arbitrari. Com que també $h(K, u) = h(K, -u)$, concloem que $h(K, \cdot)$ és parell, com volíem veure. \square

Per acabar aquest apartat, donem una caracterització important dels cossos centralment simètrics.

TEOREMA 39 (BLASCHKE (1917)). *Sigui $K \in \mathcal{K}^n$. Llavors, $K \in \mathcal{K}_s^n$ si i només si tots els hiperplans que passen per l'origen tallen el convex en dues parts amb el mateix volum.*

3.3.1 Un resultat per a convexos o-simètrics de la geometria de números

La geometria de números, que va néixer com una branca de la teoria de números i va ser batejada per Minkowski, és actualment una àrea d'estudi important i independent, amb nombroses aplicacions. Recomanem el llibre de Gruber [6] per a una exposició detallada de la geometria dels números (així com una introducció a la geometria convexa, en la qual ens hem inspirat en part per a la secció 2 d'aquest article). Un dels problemes d'estudi de la geometria de números consisteix a entendre el nombre de punts (diferent de l'origen) amb coordenades enteres que hi pot haver dins d'un convex amb volum donat. Aquest problema és equivalent al problema aritmètic de trobar una solució $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$, $u \neq 0$, de la desigualtat $f(x_1, \dots, x_n) \leq 1$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Minkowski va estudiar la versió geomètrica del problema i va provar el resultat següent, conegut com a *primer teorema fonamental de Minkowski*.

TEOREMA 40 (MINKOWSKI (1893)). *Sigui $K \in \mathcal{K}_s^n$ convex o-simètric tal que $V_n(K) \geq 2^n$. Llavors, K conté almenys un punt diferent de l'origen amb totes les coordenades enteres.*

PROVA. Suposem primer que $V_n(K) > 2^n$. Observem que per ser $K \in \mathcal{K}_s^n$ si $x \in K$, llavors $-x \in K$. Aquest fet, juntament amb la convexitat de K , implica que si $x, y \in K$, llavors $\frac{x-y}{2} \in K$. Provarem que podem trobar punts $x_0, y_0 \in \frac{1}{2}K$ tals que $x_0 - y_0$ és un enter. Com que $x_0 - y_0 = \frac{2x_0 - 2y_0}{2}$ pertany a K , el resultat quedarà provat.

A \mathbb{R}^n considerem tots els plans paral·lels a un dels plans coordenats i que passen per punts amb coordenades enteres. Així obtenim una descomposició de l'espai \mathbb{R}^n en cubs de volum 1, anomenada reticle.

Considerem el convex $K' = \frac{1}{2}K$. Suposem que m és el nombre de cubs (en els quals hem descompost \mathbb{R}^n) diferents que contenen algun punt de K' i anomenem C_i , $1 \leq i \leq m$, aquests cubs. Definim els convexos $K_i = K' \cap C_i$, $i = 1, \dots, m$. Traslladem cada cub C_i (juntament amb K_i), $2 \leq i \leq m$ de manera que C_i coincideixi amb el cub C_1 . Anomenem \tilde{K}_i la imatge de K_i per a aquesta translació (vegeu la figura 11).

Per altra banda, observem que $V_n(K') = 2^{-n}V_n(K) > 1$. Així, $V_n(K_1) + \dots + V_n(K_m) > 1$ i tenim que almenys dos dels convexos traslladats, \tilde{K}_j i \tilde{K}_k , tenen intersecció no buida (si cap parella té intersecció, llavors $V_n(K_1) + \dots + V_n(K_m) \leq 1$). Siguin $\tilde{x} \in \tilde{K}_j \cap \tilde{K}_k$ i $x_0 \in K_j$, $y_0 \in K_k$ els punts corresponents per la translació (com a la figura 11). Es compleix que $x_0 - y_0$ té coordenades enteres, ja que x_0 i y_0 difereixen només en la translació que passa del cub C_j al cub C_k i, per la definició dels cubs, aquestes translacions estan donades per vectors amb coordenades enteres. Així doncs, l'enunciat queda demostrat si $V_n(K) > 2^n$.

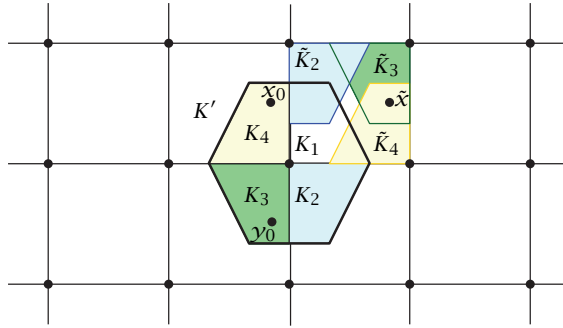


FIGURA 11: Representació de la descomposició en quadrats, en un hexàgon.

Per provar-lo en el cas $V_n(K) = 2^n$, considerem els convexos $(1 + \epsilon)K$, $\epsilon > 0$. Cada un d'aquests té volum estrictament més gran que 2^n i sabem que conté un punt amb coordenades enteres. Passant al límit, seguim tenint un punt de coordenades enteres, ja que K és tancat. \square

És senzill trobar convexos amb volum arbitrari i sense cap punt de coordenades enteres.

3.4 Esferes i el·lipsoïdes

Un cas particular de convexos centralment simètrics són les esferes i els el·lipsoïdes. La noció d'el·lipse és ben coneguda des de l'antiguitat quan es van estudiar les seccions còniques. Una altra manera de definir les el·lipses, i els el·lipsoïdes, i que és la que utilitzarem a continuació, és la següent:

DEFINICIÓ 41. Un *el·lipsoïde* $E \subset \mathbb{R}^n$ és un convex obtingut com a transformació afí de la bola euclidiana, és a dir, $E \subset \mathbb{R}^n$ és un el·lipsoïde si existeix $g \in \text{GL}(n) := \{A \in M_{n \times n} : \det A \neq 0\}$ tal que

$$E = gB^n,$$

on $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ és la bola euclidiana amb centre l'origen i radi 1.

Aquesta manera d'interpretar els el·lipsoïdes té nombrosos avantatges i porta, per exemple, cap a l'estudi de la geometria afí.

També ens permet calcular el volum dels el·lipsoïdes, si coneixem la transformació g . En efecte, si $E = gB^n$, amb $g \in \text{GL}(n)$, llavors

$$V_n(E) = V_n(gB^n) = |\det g|V_n(B^n).$$

Hi ha diversos resultats —la majoria de principis del segle xx— que donen propietats geomètriques que caracteritzen les el·lipses i les esferes. Aquí, però, només en donarem un, relacionant els el·lipsoïdes amb els billars.

3.4.1 Taules de billar, càustiques i el·lipses Tots tenim la imatge d'una taula de billar, de forma rectangular. Res impedeix, però, considerar una taula de billar d'una altra forma, per exemple, un disc, una el·lipse, un triangle... , en definitiva, un convex. Llavors, com al joc tradicional, considerem un punt p (la bola) que es mou per sobre el convex (la taula). Suposem que no hi ha fricció i que el punt es mou indefinidament, i només es para si toca un dels vèrtexs del convex (de la taula). Si com a convex tenim, per exemple, un disc, no hi ha cap vèrtex, i la bola de billar no es parerà mai. Suposem que la bola es desplaça en línia recta a una velocitat constant i segueix la llei de reflexió clàssica quan toca la vora, és a dir, l'angle d'incidència és igual a l'angle de reflexió. Anomenarem *trajectòria* la corba descrita pel punt que es mou a dins del convex. Els billars apareixen en diverses branques de les matemàtiques, com als sistemes dinàmics, la geometria de Finsler, la geometria simplèctica, o bé de la física, com a l'òptica o a la mecànica clàssica de partícules elàstiques. Per a més informació sobre billars, recomanem el llibre de Tabachnikov [16].

En aquest apartat donem només un resultat sobre billars que caracteritza els el·lipsoides.

Anomenarem *càustic* tot convex $L \subset K$ tal que si una trajectòria és tangent una vegada a la vora de L , llavors hi és tangent cada vegada després de topar amb la vora de K i continuar-hi reflectida. Es coneix que qualsevol taula de billar a \mathbb{R}^2 sense vèrtexs i amb la vora prou regular té «molts» càustics. La figura 12 en dona dos exemples.

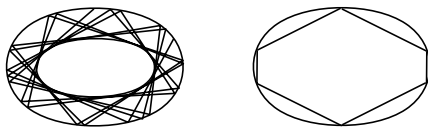


FIGURA 12: Càustics en una el·lipse: una altra el·lipse i un hexàgon.

També podem pensar, però, en taules de billar de dimensió $n \geq 3$, és a dir, considerem un convex a \mathbb{R}^n i un punt que es mou a dins, seguint les mateixes regles. Podem imaginar-nos que tenim un punt que es mou dins d'una esfera, dins d'un cub... A \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, el comportament dels càustics és completament diferent. L'existència d'un càustic en un billar tridimensional ens diu que la taula de billar és un el·lipsoide:

TEOREMA 42 (GRUBER (1995)). *Si $K \in \mathcal{K}^n$, $n \geq 3$, una taula de billar. Si K té algun càustic, llavors K és un el·lipsoide.*

3.4.2 El·lipsoide de John i de Löwner En aquesta secció donem dues maneres d'associar un el·lipsoide a un convex. La més coneguda consisteix a prendre l'el·lipsoide amb volum més gran contingut a dins d'un convex, l'anomenat *el·lipsoide de John*. Anàlogament, podem considerar l'el·lipsoide més petit que conté un convex: l'*el·lipsoide de Löwner*.

En aquest apartat provem l'existència de l'el·lipsoide de John E_J per a un convex K . A més a més, veurem que K està contingut a un dilatat de E_J i que hi ha un factor de dilatació vàlid per a tots els convexos de \mathbb{R}^n .

El resultat següent té nombroses aplicacions, sobretot per demostrar desigualtats geomètriques, ja que ens permet acotar un convex per una el·lipse.

TEOREMA 43. *Si $K \in \mathcal{K}^n$. Llavors, existeix un únic el·lipsoide E_J , anomenat el·lipsoide de John, tal que*

$$E_J \subset K \subset n(E_J - c) + c,$$

on c és el centre de l'el·lipsoide E_J .

Si $K \in \mathcal{K}^n$ és centralment simètric, llavors $E_J \subset K \subset \sqrt{n}E_J$.

El resultat anterior és òptim en el sentit que els factors n i \sqrt{n} no es poden millorar: si considerem un cub C_n , amb longitud de cada costat igual a 2 i centrat a l'origen, ens cal exactament el factor \sqrt{n} per tal que l'el·lipsoide de John associat al cub compleixi $C_n \subset \sqrt{n}E_J$. En aquest cas, E_J coincideix amb la bola euclidiana de radi 1, centrada a l'origen. Si considerem un símplex, llavors necessitem el factor n .

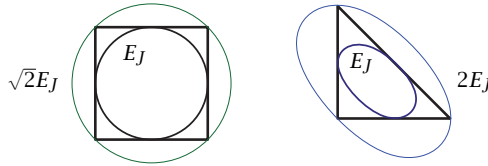


FIGURA 13: El·lipsoide de John d'un quadrat i d'un símplex.

El teorema anterior va ser obtingut per John el 1948 com a aplicació d'una generalització de la regla dels multiplicadors de Lagrange a (possiblement una quantitat infinita de) condicions donades per desigualtats (en comptes d'igualtats), que John demostra en el mateix article [8].

PROVA DEL TEOREMA 43. L'existència de l'el·lipsoide de John s'obté per un argument de compacitat: denotem per \mathcal{E} el conjunt de tots els el·lipsoïdes continguts a K amb volum diferent de zero. Definim $a := \sup\{V_n(E) : E \in \mathcal{E}\}$. Per definició de \mathcal{E} tenim $a > 0$. Volem provar que hi ha un el·lipsoide amb volum exactament a . Aquest serà l'el·lipsoide de John, E_J .

Considerem una successió $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'el·lipsoïdes de \mathcal{E} tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} V_n(E_i) = a$. Aquesta successió existeix per la definició de suprem. De la definició d'el·lipsoide tenim que per a cada $i \in \mathbb{N}$, existeix $g_i \in \text{GL}(n)$ tal que $E_i = g_i B^n$. Per altra banda, $V_n(E_i) = |\det g_i| V_n(B^n)$. Així,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\det g_i| = \frac{a}{V_n(B^n)}.$$

Com que la successió $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \text{GL}(n)$ és acotada, tenim que té una parcial que convergeix a $g \in \text{GL}(n)$ i $|\det g| = \frac{a}{V_n(B^n)}$. Per tant, l'el·lipsoide $E_J := gB^n$ compleix $E_J \subset K$, ja que l'hem obtingut com a límit d'el·lipsoïdes continguts a K (i K és tancat) i $V_n(E_J) = a$.

Per provar-ne la unicitat, suposem que hi ha dos el·lipsoïdes diferents E_1, E_2 tals que $V_n(E_1) = V_n(E_2)$ i aquest volum és màxim. De la definició d'el·lipsoïde tenim que existeixen $g_1, g_2 \in \text{GL}(n)$ tals que $|\det g_1| = |\det g_2|$ i $E_1 = g_1B^n$, $E_2 = g_2B^n$. Recordem que tota matriu $M \in \text{GL}(n)$ es pot descompondre en $M = M_1M_2$ amb M_1 simètrica i definida positiva i M_2 una rotació. Llavors, per ser la bola euclidiana B^n invariant per rotacions podem suposar que g_1 i g_2 són matrius definides positives i, per tant, podem treure el valor absolut a $|\det g_1| = |\det g_2|$ i suposar $\det g_1 = \det g_2$. Volem veure $g_1 = g_2$. Suposem que $g_1 \neq g_2$ i definim $g = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$. Es compleix $gB^n \subset K$ ja que K és convex i

$$gB^n = \frac{1}{2}g_1B^n + \frac{1}{2}g_2B^n, \quad \frac{1}{2}g_1B^n \subset \frac{1}{2}K \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}g_2B^n \subset \frac{1}{2}K.$$

Així, gB^n és un el·lipsoïde contingut a K . Si provem $V_n(gB^n) > V_n(E_1)$ tenim una contradicció i queda la unicitat demostrada. Per acotar el volum de l'el·lipsoïde gB^n necessitem la desigualtat següent:

Siguin $A, B \in \text{GL}(n)$ matrius definides positives. Llavors,

$$\det(A + B)^{\frac{1}{n}} \geq \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}.$$

La igualtat es compleix si i només si $B = cA$, $c > 0$.

La desigualtat anterior, coneguda com a *desigualtat de Minkowski per a determinants*, es pot provar a partir de la diagonalització simultània de les formes bilineals A i B i després aplicar-hi la desigualtat aritmeticogeomètrica.

Així doncs, utilitzant la desigualtat de matrius i que $\det g_1 = \det g_2$, tenim

$$\begin{aligned} V_n(gB^n) &= |\det g| V_n(B^n) = \frac{1}{2^n} |\det(g_1 + g_2)| V_n(B^n) \geq \\ &\geq \frac{1}{2^n} ((\det g_1)^{1/n} + (\det g_2)^{1/n})^n V_n(B^n) = \\ &= \frac{1}{2^n} (2(\det g_1)^{1/n})^n V_n(B^n) = |\det g_1| V_n(B^n) = V_n(E_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Com que per hipòtesi $g_1 \neq g_2$ i $\det g_1 = \det g_2$ no podem tenir $g_1 = cg_2$ per a cap $c > 0$ i la desigualtat (9) és estricta. Així obtenim la contradicció que buscàvem. \square

De manera semblant a l'el·lipsoïde de John se sap que existeix un únic el·lipsoïde de Löwner associat a un convex K . Segons Busemann [2], aquest el·lipsoïde va ser estudiat per Löwner, que va demostrar-ne la unicitat encara que no en va publicar mai el resultat.

A continuació donem dos resultats com a mostra dels que es poden obtenir utilitzant l'el·lipsoïde de John i de Löwner.

3.4.3 Desigualtat isoperimètrica invertida És ben conegut (desigualtat isoperimètrica) que les boles són els convexos amb àrea més petita entre tots els que tenen el mateix volum. Ens podem preguntar pels convexos amb àrea més gran, fixat el volum. Després d'un petit moment de reflexió, ens convencerem que podem trobar un convex amb àrea tan gran com vulguem i volum fixat. Un exemple el donen els convexos en forma «d'agulla» (vegeu la figura 14). En efecte, si pensem en el pla amb la base canònica $\{e_1, e_2\}$ i fixem el volum igual a 4, llavors els convexos K_N , $N \in \mathbb{N}$,

$$K_N = N[-e_1, e_1] + \frac{1}{N}[-e_2, e_2],$$

compleixen

$$\text{àrea}(K_N) = 2N \cdot \frac{2}{N} = 4 \quad \text{i} \quad \text{perímetre}(K_N) = 4N + \frac{4}{N}.$$

És clar que per a qualsevol $C > 0$ podem trobar una $N \in \mathbb{N}$ tal que $4N + \frac{4}{N} > C$.

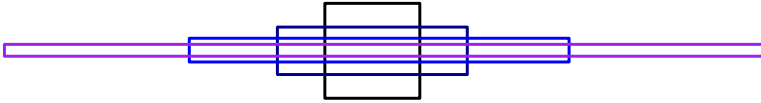


FIGURA 14: Convexos amb la mateixa àrea però perímetre diferent.

Per tant, si volem estudiar una versió de la desigualtat isoperimètrica invertida necessitem imposar alguna condició en els convexos que considerem. Una possibilitat per evitar el problema que hem comentat és considerar que tots els convexos K_N són «el mateix» i, així, el mateix que K_1 . Això ho podem formalitzar dient que considerem classes de convexos, on les classes estan donades per l'acció del grup de desplaçaments. D'aquesta manera tenim que tots els K_N pertanyen a la mateixa classe que el K_1 . També tenim que totes les el·lipses pertanyen a la mateixa classe que el cercle. Amb aquesta convenció, Ball [1] va provar que la classe del símplex maximitza l'àrea, fixat el volum:

TEOREMA 44. Denotem per $GL(n) \times \mathbb{R}^n$ el grup de transformacions lineals seguides d'un desplaçament. Llavors,

$$\frac{\text{àrea}(B^n)^{\frac{1}{n-1}}}{V_n(B^n)^{\frac{1}{n}}} \leq \max_{K \text{ convex}} \min_{g \in GL(n) \times \mathbb{R}^n} \frac{\text{àrea}(gK)^{\frac{1}{n-1}}}{V_n(gK)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\text{àrea}(S_n)^{\frac{1}{n-1}}}{V_n(S_n)^{\frac{1}{n}}},$$

on S_n denota el símplex regular de dimensió n .

3.4.4 Algoritmes de preprocessament Els el·lipsoides de John i Löwner han trobat diverses aplicacions en problemes d'optimització i geometria computacional. El primer objectiu en molts d'aquests problemes és assegurar que el

domini d'estudi no «és degenerat», per exemple, es vol evitar treballar amb dominis en forma d'agulla com els de la figura 14. Una solució per evitar aquests dominis és primer determinar l'el·lipsoide de John o de Löwner i llavors moure el domini per la transformació afí que porta l'el·lipsoide a una bola. En el context d'aplicacions en problemes d'optimització no es trobarà exactament l'el·lipsoide, sinó una aproximació, prou bona. Actualment es coneixen algorismes polinomials per trobar aproximacions dels el·lipsoïdes de John-Löwner. Una vegada fet aquest primer pas, es poden simplificar els problemes d'optimització. L'exemple més conegut d'aquesta aplicació es deu a Lenstra [10], que va donar un algorisme que resol problemes de programació entera en temps polinomial, si la dimensió de l'espai està fixada.

4 El cos de projecció

El cos de projecció associa a cada convex un altre convex obtingut a partir de les projeccions del primer a cada hiperplà. Per a més informació sobre el cos de projecció recomanem [14, secció 10.9] i [4, capítol 4].

DEFINICIÓ 45. Donat un convex $K \in \mathcal{K}^n$, el cos de projecció ΠK de K es defineix a partir de la seva funció suport com

$$h(\Pi K, u) = V_{n-1}(K|u^\perp), \quad u \in \mathbb{S}^{n-1},$$

on u^\perp denota l'hiperplà ortogonal a u . L'aplicació $K \mapsto \Pi K$ l'anomenem *operador projecció*.

Abans de res, hauríem de veure que el cos de projecció està ben definit. En principi, la funció $u \mapsto V_{n-1}(K|u^\perp)$ només està definida a l'esfera. Per definir-la a tot \mathbb{R}^n en considerem l'extensió 1-homogènia, és a dir, definim

$$h(\Pi K, u) = \|u\| V_{n-1}\left(K \left| \left(\frac{u}{\|u\|}\right)^\perp\right.\right), \quad u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

i $h(\Pi K, 0) = 0$. Llavors, pel teorema 21, el cos de projecció està ben definit si aquesta extensió és convexa. Per provar-ho utilitzem l'expressió següent de la funció suport del cos de projecció.

LEMA 46. *Sigui $K \in \mathcal{K}^n$ i $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Llavors,*

$$V_{n-1}(K|u^\perp) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(K, v).$$

PROVA. Per demostrar el lema es fa servir una de les idees recurrents en geometria convexa: expressem una quantitat geomètrica que està relacionada amb la que volem estudiar de dues maneres diferents. Igualant-les obtenim la informació que volem. Per obtenir la representació integral de $V_{n-1}(K|u^\perp)$

calculem $V_n(K + \lambda[-u, u])$, $\lambda > 0$, de dues maneres. La primera utilitza el principi de Cavalieri i el teorema de Fubini per obtenir

$$V_n(K + \lambda[-u, u]) = V_n(K) + 2\lambda V_{n-1}(K|u^\perp).$$

Per a la segona utilitzem els volums mixtos i la representació integral (6). Recordem que de l'última afirmació del teorema 26 tenim $V([-u, u], [-u, u], K_3, \dots, K_n) = 0$ per a tot $K_3, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$ ja que el segment $[-u, u]$ només conté un segment linealment independent. Llavors,

$$\begin{aligned} V_n(K + \lambda[-u, u]) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \lambda^i V(\overbrace{K, \dots, K}^i, \overbrace{[-u, u], \dots, [-u, u]}^{n-i}) = \\ &= V_n(K) + n\lambda V(K, \dots, K, [-u, u]) = \\ &= V_n(K) + \lambda \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{[-u, u]}(v) dS(K, v). \end{aligned}$$

Si ara comparem els coeficients dels polinomis en λ i recordem l'expressió de la funció suport d'un interval centrat, obtenim el resultat. \square

De l'expressió del lema 46 tenim que el cos de projecció està ben definit, ja que $u \mapsto |\langle u, v \rangle|$ és convexa, per a $v \in \mathbb{R}^n$ fixat.

Passem a estudiar el cos de projecció en alguns exemples.

EXEMPLES. (i) Si $K \in \mathcal{K}^n$ és un convex de dimensió $k \leq n - 2$, llavors $\Pi K = \{0\}$.

(ii) Si $K \in \mathcal{K}^n$ és un convex de dimensió $(n - 1)$ contingut en un hiperplà v^\perp , $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ fixat, llavors $\Pi K = V_{n-1}(K)[-v, v]$, *i. e.*, ΠK és homotètic al segment $[-v, v]$.

(iii) Si $K = B$ és una bola de radi 1 de \mathbb{R}^n , llavors $\Pi B = \omega_{n-1}B$, on ω_{n-1} denota el volum d'una bola de dimensió $(n - 1)$.

(iv) Si K és un quadrat, llavors ΠK també és un quadrat.

Per veure-ho podem utilitzar directament la definició i estudiar la longitud de les projeccions, o bé podem fer servir l'expressió de la funció suport del lema 46. En aquest cas, ens cal conèixer la mesura d'àrea d'un quadrat. Suposem que el quadrat Q és de la forma $[-e_1, e_1] + [-e_2, e_2]$. Aleshores, Q té vectors normals $\pm e_1$, $\pm e_2$ i la longitud del costat associat és 2. A partir de l'expressió (5) tenim que la mesura d'àrea està donada per $\mu = 2(\delta_{\pm e_1} + \delta_{\pm e_2})$ i fent un càlcul obtenim

$$h(\Pi Q, u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} |\langle u, v \rangle| d\mu(v) = 2(|\langle u, e_1 \rangle| + |\langle u, e_2 \rangle|),$$

que correspon al quadrat $2Q$.

(v) Més en general, si K és un politop es pot veure amb un argument anàleg a l'anterior que ΠK és un politop.

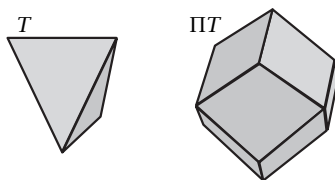


FIGURA 15: El cos de projecció d'un tetraedre regular T és un dodecaedre còncau.

A continuació, enumerem algunes de les propietats del cos de projecció. No en donarem les demostracions, que es poden obtenir a partir de la definició del cos de projecció, el lema 46, i les propietats de la mesura d'àrea i dels volums mixtos.

PROPOSICIÓ 47. *L'operador $\Pi: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$ té les propietats següents:*

- (i) ΠK és o-simètric per a cada $K \in \mathcal{K}^n$;
- (ii) Π és parell (i. e., $\Pi(-K) = \Pi(K)$);
- (iii) Π és homogeni de grau $n - 1$, i. e., $\Pi(\lambda K) = \lambda^{n-1}\Pi(K)$ per a $K \in \mathcal{K}^n$ i $\lambda > 0$;
- (iv) Π és invariant per translacions;
- (v) Π és $GL(n)$ -contravariant, i. e., si $g \in GL(n)$, llavors

$$\Pi(gK) = |\det g| g^{-T} \Pi K,$$

on g^{-T} denota la matriu inversa de la transposada de g ;

- (vi) Π és una valoració;
- (vii) Π és monòton;
- (viii) Π és continu;
- (ix) si $K, L \in \mathcal{K}^n$, llavors $V(K, \dots, K, \Pi L) = V(L, \dots, L, \Pi K)$.

Recordem que la definició de les propietats anteriors es pot trobar a la proposició 29. A l'apartat 3 hem donat cotes per al volum del cos diferència d'un convex K en termes del volum de K . En el cas del cos de projecció, es coneix la cota inferior òptima per al quocient

$$\frac{V_n(\Pi K)}{V_n(K)^{n-1}}$$

encara que la igualtat no està caracteritzada. Petty, el 1971, va conjeturar que el mínim s'assoleix només per a el·lipsoides. Avui se sap que en els el·lipsoides el quocient assoleix el valor mínim però hi podria haver altres convexos que també minimitzessin el quocient. La cota superior no es coneix.

Hi ha, però, una desigualtat que relaciona el volum de K amb el volum de $\Pi(K^*)$ on K^* denota el cos polar de K :

DEFINICIÓ 48. Sigui $K \in \mathcal{K}^n$ tal que conté l'origen al seu interior. Llavors, el cos polar K^* de K és

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1, y \in K\}.$$

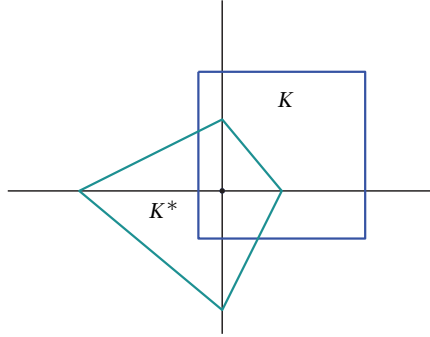


FIGURA 16: Cos polar del quadrat K .

El cos polar d'un disc de radi r centrat a l'origen és un altre disc centrat a l'origen però de radi $1/r$. El cos polar apareix en diverses situacions en geometria convexa, ja que proporciona una noció de dualitat. En general, es compleix $K^{**} = K$ per a tot $K \in \mathcal{K}^n$ que conté l'origen a l'interior.

A continuació, enunciem la desigualtat per al volum del cos de projecció del polar.

TEOREMA 49. Sigui $K \in \mathcal{K}^n$ amb interior no buit. Llavors,

$$\frac{1}{n^n} \binom{2n}{n} \leq V_n(K)^{n-1} V_n((\Pi K)^*) \leq \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_{n-1}} \right)^n,$$

on $\kappa_n = V_n(B^n)$ denota el volum de la bola unitat euclidiana B^n . La igualtat es té per a la cota superior si i només si K és un el·lipse i per a la cota inferior, si i només si K és un símplex.

La cota superior va ser donada per Petty el 1971 i actualment es coneix com a *desigualtat de projecció de Petty*. La cota inferior no va ser provada fins el 1991, per Zhang, i és coneguda com a *desigualtat de projecció de Zhang*.

Igual que per al cos diferència, recentment Ludwig ha obtingut resultats que caracteritzen el cos de projecció.

TEOREMA 50. Un operador $\varphi: \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$ és continu, invariant per translacions, és una valoració i és $SL(n)$ -contravariant si i només si existeix $\lambda \geq 0$ tal que $\varphi K = \lambda \Pi K$.

Un anàleg del teorema 33 (i del teorema 34) encara no es coneix. Notem que la caracterització del cos de projecció és més difícil, ja que es perd la propietat d'additivitat i passem d'una valoració homogènia de grau 1 (per l'operador diferència) a una valoració homogènia de grau $n - 1$ (per l'operador projecció). En aquesta situació, molts dels resultats utilitzats deixen de ser vàlids.

4.1 Zonoides

En aquest apartat definim i estudiem els zonoides, que veurem que són els convexos de la imatge de l'operador projecció.

La suma de Minkowski d'una quantitat finita de segments dona lloc al que anomenem *zonotop*. Per exemple, els paral·lelograms, els hexàgons i els polígons regulars amb un nombre parell de costats són zonotops. Els triangles, per contra, no són zonotops, ja que no es poden escriure com a suma de Minkowski de segments.

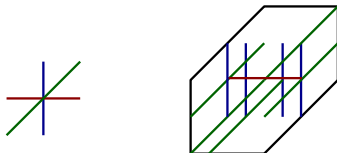


FIGURA 17: Hexàgon construït a partir de la suma de tres segments.

Observem primer de tot que els zonotops són centralment simètrics. En efecte, cada segment a \mathbb{R}^n és el traslladat d'un segment centrat a l'origen. Així, podem escriure qualsevol zonotop com a translació d'una suma de segments centrats a l'origen. Considerarem a partir d'ara que els zonotops estan centrats a l'origen i que cada un dels segments està centrat també a l'origen.

La funció suport d'un zonotop es pot trobar de manera senzilla a partir de la funció suport d'un segment i la linealitat de la funció suport (propietat (iii) de la proposició 20): Suposem que $K = S_1 + \dots + S_m$ on S_i és un segment de longitud α_i i direcció u_i , $i = 1, \dots, m$. Llavors,

$$h(K, x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i |\langle u_i, x \rangle|, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

Per altra banda, el recíproc també és cert: tota funció de la forma anterior és la funció suport d'un zonotop.

El resultat següent, que no demostrarem, ens dona un criteri per saber quan un polítop és un zonotop, de manera anàloga al teorema 38 per a convexos o -simètrics.

TEOREMA 51. *Un polítop és un zonotop si i només si cada cara 2-dimensional és centralment simètrica.*

Si ara considerem el conjunt de tots els zonotops, tenim que és un conjunt tancat respecte de la suma de Minkowski, és a dir, si considerem la suma de dos zonotops Z_1, Z_2 , obtenim un zonotop (que serà suma dels segments que generen Z_1 i els segments que generen Z_2). Les dilatacions de zonotops són, evidentment, zonotops.

Ara bé, també podem considerar límits de zonotops respecte de la distància de Hausdorff i aquest límit, en general, no serà un zonotop. Comencem per un exemple. Sigui D un disc a \mathbb{R}^2 . Podem aproximar D per zonotops. La idea és molt intuïtiva: aproximem el disc per polígons amb més costats cada vegada. Per exemple, podem considerar la successió de polígons regulars amb un nombre parell de costats i inscrits al cercle unitat. Aquesta successió convergeix al disc unitari. Però el disc no és un zonotop, ja que no es pot escriure com a suma finita de segments, o bé perquè tot zonotop és un polítop.

Definim els *zonoides* com els convexos que es poden aproximar en la distància de Hausdorff per zonotops o, equivalentment, els convexos tals que la seva funció suport es pot aproximar uniformement a \mathbb{S}^{n-1} per funcions de la forma (10). Així doncs, el disc és un zonoide, que no és zonotop.

Els zonoides formen una classe de convexos molt interessant ja que, com veurem a continuació, tenen una representació de la funció suport molt senzilla.

TEOREMA 52. *Un convex $K \in \mathcal{K}^n$ és un zonoide si i només si la seva funció suport ve donada per*

$$h(K, x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, v \rangle| d\rho(v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (11)$$

amb ρ una mesura parell a \mathbb{S}^{n-1} , és a dir, que compleix $\rho(\omega) = \rho(-\omega)$ per a tot borelià $\omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$.

PROVA. Demostrem només una implicació. Per a l'altra calen resultats d'aproximació d'anàlisi funcional.

Suposem que $K \in \mathcal{K}^n$ té funció suport de la forma (11). Volem veure que K és un zonoide. Per això, construirem una successió $\{Z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de zonotops tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} Z_j = K$ en la distància de Hausdorff. Per l'equivalència entre la convergència de convexos en la topologia de Hausdorff i la convergència uniforme de les funcions suport (vegeu l'equació (4)), la successió $\{Z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergeix a K si

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d_H(K, Z_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h(K, u) - h(Z_j, u)| = 0,$$

i. e., n'hi ha prou amb veure que per a tot $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ i tot $\epsilon > 0$ es té $|h(K, u) - h(Z_j, u)| < \epsilon$, si j és prou gran.

Sigui $\epsilon > 0$ fixat, $\delta = \epsilon/\rho(\mathbb{S}^{n-1})$ i $\{E_1, \dots, E_j\}$ una partició de \mathbb{S}^{n-1} tal que els seus elements són borelians no buits, disjunts i tenen diàmetre (vegeu la definició 3) més petit o igual que δ . Per a cada $1 \leq i \leq j$ escollim un element $v_i \in E_i$.

Definim Z_j el zonotop amb funció suport

$$h(Z_j, u) = \sum_{i=1}^j \rho(E_i) |\langle u, v_i \rangle|, \quad u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

A partir de la desigualtat de Cauchy-Schwarz i recordant que $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ i que cada E_i té diàmetre com a màxim δ , tenim la convergència de les funcions suport:

$$\begin{aligned} |h(K, u) - h(Z_j, u)| &= \left| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| d\rho(v) - \sum_{i=1}^j |\langle u, v_i \rangle| \rho(E_i) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^j \int_{E_i} (|\langle u, v \rangle| - |\langle u, v_i \rangle|) d\rho(v) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^j \int_{E_i} (|\langle u, v \rangle| + |\langle u, v_i \rangle|) d\rho(v) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^j \int_{E_i} |\langle u, v - v_i \rangle| d\rho(v) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^j \int_{E_i} |u| |v - v_i| d\rho(v) < \delta \sum_{i=1}^j \int_{E_i} d\rho(v) = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

A \mathbb{R}^2 es pot provar que tots els cossos o -simètrics són zonoides. Això no és cert a \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Shephard va provar que el politop amb vèrtexs $\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ per a $n \geq 3$ no és cap zonotop, ni cap zonoide. A més a més, els zonoides no són ni densos a l'espai de convexos simètrics, és a dir, no podem aproximar un convex o -simètric qualsevol per zonoides. Aquest fet ha portat a la definició dels zonoides generalitzats, dels quals no tractarem aquí.

4.1.1 Zonotops i tessellacions de l'espai Una tessellació del pla (o de l'espai) és una descomposició d'aquest pla en parts que no se solapen ni deixen cap espai buit. Les tessellacions amb un sol convex descomponen l'espai amb una sola figura geomètrica que es va desplaçant per tot l'espai. El concepte prové de les tessellacions que feien els romans, amb rajoles molt petites de forma quadrada, per a obtenir diferents representacions i decorar terres i parets. A la natura també trobem exemples de tessellacions: els ruscs de les abelles, la closca d'una tortuga o la pell dels mamífers estan tessellats per hexàgons.

La tessellació més senzilla del pla l'obtenim considerant quadrats, i la de l'espai, considerant cubs. De fet, ja hem utilitzat aquestes tessellacions per demostrar el teorema de Minkowski (teorema 40). En el pla, però, també podem obtenir tessellacions desplaçant un sol convex si considerem triangles

equilàters i hexàgons, així com paral·lelograms en comptes de quadrats. A més a més, si tenim una tessellació del pla amb un sol polígon, llavors ha de ser feta a partir de polígons amb 3, 4 o 6 costats. Per descomptat hi ha tessellacions que utilitzen més d'una figura geomètrica. La literatura sobre aquestes tessellacions és gran i no les considerarem aquí, ja que la motivació per introduir tessellacions és comentar el paper que hi tenen els zonotops.

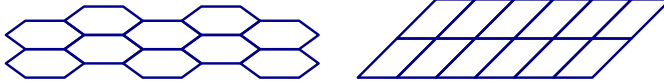


FIGURA 18: Tessellacions del pla amb hexàgons i paral·lelograms.

A l'espai \mathbb{R}^3 , si volem obtenir una tessellació regular, podem considerar paral·lelepípedes, però tenim moltes altres possibilitats. El resultat següent ens dona informació sobre els politops que permeten tessellacions regulars de \mathbb{R}^3 .

TEOREMA 53. *Sigui P un politop que tesseja l'espai. Llavors P és un zonotop tal que cada cara conté 4 o 6 arestes.*

4.2 Relació entre els zonoides i l'operador projecció

A continuació provarem que els cossos de projecció, *i. e.*, els convexos de la forma ΠK , amb $K \in \mathcal{K}^n$, són zonoides.

TEOREMA 54. *El cos de projecció de $K \in \mathcal{K}^n$ és un zonoide o -simètric.*

Recíprocament, si Z és un zonoide o -simètric amb interior no buit, llavors existeix $K \in \mathcal{K}^n$ amb interior no buit tal que $\Pi K = Z$.

PROVA. Sigui ΠK el cos de projecció de K . Llavors, pel lema 46 es compleix

$$\begin{aligned} h(\Pi K, u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(K, v) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(K, v) + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| dS(-K, v) \right) = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| d\rho(v) \end{aligned}$$

amb $\rho = \frac{1}{4}(S(K, \cdot) + S(-K, \cdot))$. Com que ρ és parell, ΠK és un zonoide o -simètric.

Per provar el recíproc, considerem Z un zonoide o -simètric amb interior no buit. Pel teorema 52, existeix una mesura parell ρ tal que

$$h(Z, u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| d\rho(v).$$

Pel teorema d'existència de Minkowski, teorema 24, sabem que hi ha un convex amb interior no buit K tal que $S(K, \cdot) = \rho$. Observem que podem aplicar el

teorema d'existència de Minkowski ja que, per ser K amb interior no buit, tenim que ρ no està concentrada a cap equador i, per ser parell, $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} v \, d\rho(v) = 0$. Així, pel lema 46, Z és el cos de projecció de $2K$. \square

4.3 El problema de Shephard

El problema de Shephard és un bon exemple del tipus de qüestions que es planteja la *tomografia geomètrica*. Aquesta disciplina estudia com reconstruir objectes (reals) a partir d'informació sobre les seves seccions o projeccions (vegeu el monogràfic [4] amb els fonaments i resultats actuals de tomografia geomètrica des del punt de vista de la geometria convexa).

Una de les aplicacions més conegudes de la tomografia geomètrica es troba en medicina, en el TAC, que reconstrueix la forma d'un òrgan a partir d'imatges de seccions obtingudes amb raigs X. Malauradament, a la pràctica, només es poden obtenir un nombre finit de seccions, cosa que implica que la solució matemàtica de la reconstrucció no és única i, per tant, només podem obtenir un resultat aproximat de la realitat.

Però en la part teòrica de la tomografia geomètrica, se suposa que es té informació en totes les direccions i no només en una quantitat finita. Això permet donar, a vegades, resultats d'unicitat. Una altra part important de la geometria tomogràfica la constitueixen els resultats d'estabilitat, que també són fonamentals per a les aplicacions: si sabem que certa informació sobre seccions o projeccions de dos cossos és «semblant», com de «semblants» són els cossos?

Segurament, el primer exemple que podem incloure en la història de la tomografia geomètrica el trobem en Aristòtil. Sembla ser que va concloure que la Terra és esfèrica observant que en un eclipsi lunar la projecció de la Terra sobre la Lluna és circular, fet que, intuïtivament és clar que només pot passar si la Terra té una forma més aviat rodona. Formulat diferentment, essencialment Aristòtil va utilitzar que l'esfera a \mathbb{R}^3 és l'únic cos convex tal que totes les seves projeccions són discs.

Passem a l'enunciat del problema de Shephard.

PROBLEMA 55 (PROBLEMA DE SHEPHARD). Siguin K i L dos cossos convexos de \mathbb{R}^n , simètrics respecte de l'origen. Suposem que es compleix $V_{n-1}(K|u^\perp) \leq V_{n-1}(L|u^\perp)$ per a tot $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. És cert que $V_n(K) \leq V_n(L)$?

Si comencem estudiant aquest problema al pla, ens convencerem aviat que la seva resposta és afirmativa en aquest cas. A continuació en donem una demostració.

TEOREMA 56. *Siguin $K, L \in \mathcal{K}_S^2$ simètrics respecte de l'origen. Si $V_1(K|u^\perp) \leq V_1(L|u^\perp)$, aleshores $V_2(K) \leq V_2(L)$.*

PROVA. Per a tot $M \in \mathcal{K}^2$ i $v \in \mathbb{S}^1$ es compleix $V_1(M|v) = h(M, v) + h(M, -v)$, ja que $V_1(M|v)$ mesura la longitud de la projecció de M a v , que coincideix amb l'amplada de M en la direcció v (vegeu la definició 22).

Sigui $u \in \mathbb{S}^1$ i v la rotació de $\pi/2$ en sentit antihorari de u . Com que K és o -simètric, tenim $V_1(K|u^\perp) = V_1(K|v) = 2h(K, v)$, i a partir de la condició $V_1(K|u^\perp) \leq V_1(L|u^\perp)$ obtenim que $h(K, \cdot) \leq h(L, \cdot)$, és a dir, per la proposició 20(iv) i el teorema 21, $K \subseteq L$. Així doncs, $V_2(K) \leq V_2(L)$. \square

A la demostració anterior hem utilitzat fortament que K i L són convexos de \mathbb{R}^2 ja que només en dimensió $n = 2$ a partir dels volums $V_{n-1}(K|u^\perp) = V_1(K|u^\perp)$, $u \in \mathbb{S}^1$, podem recuperar la funció suport d'un convex o -simètric.

A continuació estudiem el problema de Shephard a \mathbb{R}^n . Primer veiem que la condició que K i L siguin o -simètrics és necessària per a tot $n \geq 2$.

Comencem amb l'exemple següent: considerem un disc de radi $r < 1$ i un convex K_2 d'amplada constant igual a 2 (vegeu la definició 22) diferent del disc. Se sap que tots els convexos d'amplada constant igual a 2 tenen perímetre 2π . Aleshores l'àrea de K_2 ha de ser més petita que π . Aquesta última afirmació la podem provar a partir de la desigualtat isoperimètrica a \mathbb{R}^2 :

$$4\pi \text{àrea}(K) \leq \text{perímetre}(K)^2.$$

En efecte, utilitzant que el perímetre de K_2 és 2π i que la igualtat només es dona si K és un disc, tenim que l'àrea de K_2 és estrictament més petita que π , posem igual que $a\pi$ amb $a < 1$. Sigui $r > 0$ tal que $r^2 < a < 1$ i considerem el disc de radi r . Aquest té àrea $\pi r^2 \leq a\pi$, és a dir, àrea més petita que el convex d'amplada constant K_2 . Vegem que aquesta parella de convexos respon negativament al problema de Shephard. Hem de veure que la longitud de la projecció, en cada direcció, de K_2 és més gran que la corresponent del disc. Com que hem triat un convex d'amplada constant, la longitud de cada projecció coincideix amb l'amplada de K_2 , és a dir, és 2. Per altra banda, l'amplada del disc en cada direcció és $2r < 2$.

El problema de Shephard va ser resolt a \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, independentment, per Petty i Schneider. Aquí seguim bàsicament la resolució de Schneider. El resultat següent afirma que podem generalitzar el fet anterior per a qualsevol convex L que no sigui simètric. La demostració, que no donem, utilitza els volums mixtos i la primera desigualtat de Minkowski.

PROPOSICIÓ 57. *Per a cada convex no simètric $L \in \mathcal{K}^n$ amb interior no buit, existeix un convex simètric $K \in \mathcal{K}^n$ amb*

$$V_{n-1}(K|u^\perp) \leq V_{n-1}(L|u^\perp), \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1},$$

però $V_n(K) > V_n(L)$.

A continuació demostrem que si L (el cos amb projeccions més grans) és un zonoide, llavors la resposta al problema de Shephard és afirmativa.

PROPOSICIÓ 58. *Siguin $K, L \in \mathcal{K}^n$ amb interior no buit. Si L és un zonoide, llavors*

$$\Pi K \subseteq \Pi L \quad \Rightarrow \quad V_n(K) \leq V_n(L),$$

i $V_n(K) = V_n(L)$ si i només si K s'obté de L per translació.

PROVA. Sigui $M \in \mathcal{K}^n$ amb interior no buit tal que $\Pi M = L$. Notem que M existeix pel teorema 54. A partir de la proposició 47(ix) i de la monotonia dels volums mixtos, tenim

$$V(K, \dots, K, L) = V(M, \dots, M, \Pi K) \leq V(M, \dots, M, \Pi L) = V(L, \dots, L, \Pi M) = V_n(L).$$

Juntament amb la desigualtat de Minkowski $V(K, \dots, K, L)^n \geq V_n(K)^{n-1} V_n(L)$, teorema 27(ii), obtenim

$$V_n(L)^n \geq V(K, \dots, K, L)^n \geq V_n(K)^{n-1} V_n(L). \quad (12)$$

Llavors, es compleix $V_n(K) \leq V_n(L)$.

Els casos d'igualtat s'obtenen directament de la desigualtat de Minkowski, que té igualtat si i només si K i L són homotètics, *i. e.*, $K = \lambda L + v$ per a $\lambda > 0$, $v \in \mathbb{R}^n$. A partir de (12) es té $V_n(L)^n = \lambda^{n-1} V_n(L)^n$. Llavors, $\lambda = 1$ i K és una translació de L . \square

Si deixem de suposar que L és un zonoide, aleshores la resposta al problema de Shephard és negativa.

PROPOSICIÓ 59. *Sigui $L \in \mathcal{K}^n$ un convex simètric que no és zonoide. Llavors, existeix un convex simètric $K \in \mathcal{K}^n$ amb $V_{n-1}(K|u^\perp) \leq V_n(L|u^\perp)$ però $V_n(K) > V_n(L)$.*

La demostració de la proposició anterior utilitza esfèrics harmònics i el teorema de Funk-Hecke i no la presentem aquí.

Així doncs, si volem que el problema de Shephard tingui resposta afirmativa per a tota parella de convexos K, L simètrics respecte de l'origen, cal que tots els cossos o -simètrics siguin zonoides. Tal com hem comentat abans, això només passa a \mathbb{R}^2 .

En resum, el problema de Shephard a l'espai de convexos simètrics només té resposta afirmativa si $n = 2$.

Si ens restringim a la classe dels zonoides, en comptes dels convexos simètrics, llavors el problema de Shephard té resposta afirmativa per a tota dimensió $n \in \mathbb{N}$.

Agraïments

Vull donar les gràcies a l'Agustí Reventós per haver-me animat a escriure aquest article i encoratjat mentre l'escrivia.

Referències

- [1] BALL, K. «Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality». *J. London Math. Soc.* (2), 44 (2) (1991), 351-359.

- [2] BUSEMANN, H. «The foundations of Minkowskian geometry». *Comment. Math. Helv.*, 24 (1950), 156–187.
- [3] DANZER, L.; GRÜNBAUM, B.; KLEE, V. «Helly's theorem and its relatives». A: *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VII*. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1963, 101–180.
- [4] GARDNER, R. J. *Geometric Tomography*. 2a ed. Nova York: Cambridge University Press, 2006. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; 58)
- [5] GARDNER, R. J.; HUG, D.; WEIL, W. «Operations between sets in geometry». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 15 (6) (2013), 2297–2352.
- [6] GRUBER, P. M. *Convex and Discrete Geometry*. Berlín: Springer, 2007. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 336)
- [7] HELLY, ED. «Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten». *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 32 (1923), 175–176.
- [8] JOHN, F. «Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions». A: *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948*. Nova York: Interscience Publishers, Inc., 1948, 187–204.
- [9] KLEE, V. «What is a convex set?». *Amer. Math. Monthly*, 78 (1971), 616–631.
- [10] LENSTRA, H. W., JR. «Integer programming with a fixed number of variables». *Math. Oper. Res.*, 8 (4) (1983), 538–548.
- [11] LUDWIG, M. «Minkowski valuations». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357 (10) (2005), 4191–4213.
- [12] ROGERS, C. A.; SHEPHARD, G. C. «The difference body of a convex body». *Arch. Math. (Basel)*, 8 (1957), 220–233.
- [13] SANTALÓ, L. A. *Luis Antonio Santaló Selected Works*. Edició a cura d'A. M. Naveira i A. Reventós en col·laboració amb G. S. Birman i X. Gual. Berlín: Springer-Verlag, 2009. [Amb un prefaci de S. K. Donaldson]
- [14] SCHNEIDER, R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. 2a. ed. ampliada. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; 151)
- [15] SERRA, O. «La desigualtat de Brunn-Minkowski». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 26 (2) (2011), 185–220.
- [16] TABACHNIKOV, S. *Geometry and Billiards*. Providence, R. I.: American Mathematical Society; University Park, Pa: Mathematics Advanced Study Semesters, 2005. (Student Mathematical Library; 30)