Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 31, núm. 2, 2016. Pàg. 143–178. DOI: 10.2436/20.2002.01.70

Detecció d'ones gravitatòries

Joan Girbau

És per la Ment que se m'obra Natura
A l'ull golós; per ella em sé immortal
Puix que l'ordén, i ençà i allà del mal,
El temps és ú i pel meu ordre dura.

J. V. Foix (1893–1987)

Resum: L'objectiu d'aquest article és presentar la teoria bàsica d'ones gravitatòries i explicar, per a un lector matemàtic que tingui alguns coneixements de relativitat general, els mètodes que es poden usar per detectar-les. Explicarem també els trets fonamentals de l'observació duta a terme el 14 de setembre de 2015 pels detectors de LIGO.

Paraules clau: gravitació, ones gravitacionals, GW150914.

Classificació MSC2010: 83C35.

Introducció

L'11 de febrer de 2016 el web de LIGO (Laser Interferometer Gravitational-waves Observatory) publicava la notícia següent: «El 14 de setembre de 2015 a les 5:51, hora de l'Est (9:51 de temps universal coordinat), els dos detectors bessons de LIGO situats, respectivament, a Livingston (Louisiana) i Hanford (Washington) van mesurar ondulacions en el teixit de l'espaitemps —ones gravitacionals— que arribaven a la Terra procedents d'un cataclisme en l'Univers llunyà. Els dos detectors de LIGO acabaven d'entrar en funcionament per a les primeres observacions quan aquell senyal fort i clar va ser captat». L'endemà d'aquesta notícia el president Obama felicitava l'equip de científics de LIGO amb el tuit següent: «Einstein tenia raó! Felicitats a @NSF i @LIGO per la detecció d'ones gravitacionals, un avenç gegantí en la nostra comprensió de l'Univers».

La història de les ones gravitatòries comença el 1916, ara fa un segle. Aquell any Einstein va publicar els articles [7] i [8], on introdueix la relativitat general i estableix que les pertorbacions gravitacionals es propaguen per ones a la velocitat de la llum. Malgrat que mai fins ara no s'havien detectat directament, sí que se n'havia demostrat l'existència pels seus efectes. L'any 1974, Joseph Taylor i Russell Husle van observar dues estrelles de neutrons que giraven l'una entorn de l'altra cada vegada més de pressa seguint un model de pèrdua d'energia per emissió d'ones gravitatòries. La taxa d'acceleració causada per la suposada emissió d'ones, d'acord amb la relativitat general, coincidia exactament amb les observacions. Per aquest descobriment, Taylor i Husle van rebre el Nobel de Física l'any 1993.

Des de principi del segle actual han entrat en funcionament diversos observatoris dedicats a la detecció d'ones gravitatòries per interferometria. LIGO, als Estats Units, és el més antic i més gran. Va entrar en funcionament el 2002, però ha estat remodelat molt recentment (Advanced LIGO). També hi ha detectors a Itàlia (VIRGO), a Alemanya (GEO600) i al Japó (TAMA300). I cal remarcar que l'Agència Europea de l'Espai, en col·laboració amb la NASA, ha posat en òrbita recentment (el 2 de desembre de 2015) un detector espacial molt ambiciós anomenat Laser Interferometer Space Antenna (LISA).

Amb la detecció d'ones gravitacionals realitzada per LIGO s'obre una nova era en el nostre coneixement de l'Univers. En efecte, les ones gravitatòries ens poden aportar una informació que les ones electromagnètiques no ens poden donar. Per exemple, en l'explosió d'una supernova les ones electromagnètiques són dispersades una vegada i una altra per la matèria que rodeja l'estrella; les ones gravitatòries, no. De la mateixa manera, no podem esperar cap informació dels primers moments de l'Univers a través d'ones electromagnètiques (la famosa radiació còsmica de fons només ens aporta informació de l'anomenada *època de la recombinació*, entre 200 000 i 300 000 anys després del Big Bang), però a través de les ones gravitacionals, sí.

L'objectiu d'aquest article és presentar la teoria bàsica d'ones gravitatòries i explicar els mètodes que es poden usar per detectar-les. No cal dir que hi ha una amplíssima bibliografia de llibres i revistes sobre el tema. Vegeu, per exemple [13, 14], a part dels articles recents sobre la detecció concreta d'ones realitzada per LIGO el 14 de setembre de 2015 [1, 2, 3, 4]. Oferim aquí una presentació detallada dels trets bàsics de la teoria (amb demostracions rigoroses dels fets rellevants) per a un lector matemàtic que tingui alguns coneixements de relativitat general.

1 Preliminars matemàtics

En aquesta secció tractarem alguns temes matemàtics que convé recordar abans d'abordar la qüestió central d'aquest article, que és l'existència i els mètodes de detecció de les ones gravitatòries.

1.1 Ones periòdiques planes

Sigui $\vec{n}$ un vector unitari de $\mathbb{R}^3$ i a un número real. Designarem per $P_{\vec{n},a}$ el pla de $\mathbb{R}^3$ donat per $P_{\vec{n},a} = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } \vec{x} \cdot \vec{n} = a\}$.

Una *ona periòdica i plana* de $\mathbb{R}^3$ és una funció

$$\begin{aligned} A\colon\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\to \quad \mathbb{R} \\ (\vec{x}, t) &\to A(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

que compleix les propietats següents:

1. Existeix un vector unitari $\vec{n}$ (anomenat *direcció de propagació*) tal que si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in P_{\vec{n},a}$, llavors $A(\vec{x}_1, t) = A(\vec{x}_2, t)$ per a tot t. És a dir, dos punts del mateix pla $P_{\vec{n},a}$ tenen sempre el mateix valor de A.
2. Existeix un número real v, anomenat *velocitat de propagació*, tal que si posem $\vec{v} = v\vec{n}$ es compleix $A(\vec{x} + \vec{v}\tau, t + \tau) = A(\vec{x}, t)$ per a tots $\vec{x}$, t, τ. Això es llegeix dient que el valor de l'ona a l'instant t en el punt $\vec{x}$ és el mateix que el valor en el punt $\vec{x} + \vec{v}\tau$ a l'instant $t + \tau$.
3. $A(\vec{0}, t)$ és una funció periòdica de t.

Proposició 1. *Una ona periòdica i plana, $A\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sempre es pot expressar de la forma $A(\vec{x}, t) = f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$, on $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció periòdica de període 2π, ω és un número real i $\vec{k}$ és el vector $(\omega/v)\vec{n}$. El vector $\vec{k}$ s'anomena* vector d'ona *i ω s'anomena* freqüència angular*.*

Prova. Sigui $A\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una ona periòdica i plana de vector de propagació $\vec{n}$ i velocitat de propagació v. Sigui $g(t) = A(\vec{0}, t)$, que és una funció periòdica. Sigui T el seu període. Posem $\omega = 2\pi/T$. Definim $f(t) = g(t/\omega)$. Llavors $f(t)$ és periòdica de període 2π.

Fixat $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, sigui $\vec{u} = \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}$, de manera que $\vec{x}$ s'expressa com a suma $\vec{x} = \vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}$. Tindrem

$$A(\vec{x}, t) = A(\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}, t) = A\left(\vec{u} + v\vec{n}\left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v}\right), t\right) = A\left(\vec{u}, t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v}\right).$$

Ara bé, com que $\vec{u}$ està sobre el pla d'equació $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ que conté l'origen, resulta

$$A(\vec{x}, t) = A\left(\vec{u}, t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v}\right) = A\left(\vec{0}, t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v}\right) = g\left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{v}\right) = f\left(\omega t - \frac{\omega(\vec{x} \cdot \vec{n})}{v}\right).$$

Si posem $\vec{k} = \omega\vec{n}/v$, obtindrem $A(\vec{x}, t) = f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$. □

Exemple. L'exemple típic d'ona periòdica i plana és l'ona de la forma $A(\vec{x}, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi)$, on $\vec{k}$ és un cert vector de $\mathbb{R}^3$ i ω, φ i A_0 són números reals. Fent un canvi d'origen de temps, l'ona anterior s'expressa com a $A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$ (o bé com a $A_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$). Per comoditat, es treballa amb l'ona complexa

$$\varphi(\vec{x}, t) = A_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

de la qual $A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$ és la part real. També es pot treballar amb

$$\psi(\vec{x}, t) = A_0 \mathrm{e}^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

que té la mateixa part real.

Cal remarcar que la suma de dues ones periòdiques i planes no és una ona periòdica i plana.

1.2 Alguns conceptes relatius a les varietats pseudoriemannianes

Comencem recordant que una varietat pseudoriemanniana (M, g) es defineix de manera anàloga a una varietat riemanniana, amb l'única diferència que els productes escalars g_x, que en les varietats riemannianes s'exigeix que siguin definits positius per a cada $x \in M$, en les pseudoriemannianes només es demana que siguin no singulars (això vol dir que $g_x(u, v) = 0$ per a tot u implica $v = 0$).

Si bé suposarem conegudes del lector les nocions bàsiques sobre varietats pseudoriemannianes, explicitarem ara algunes propietats que necessitarem i que, pel fet de no formar part dels coneixements considerats més bàsics, poden ser desconegudes del lector.

1.2.1 Camps de Jacobi en varietats pseudoriemannianes Sigui $\gamma(t)$ una corba d'una varietat pseudoriemanniana (M, g). Suposem que t varia en un interval tancat $I = [a, b]$. Una *variació de la corba* γ és una aplicació contínua

$$\begin{aligned} \alpha\colon\ (-\varepsilon, \varepsilon) \times I &\to M \\ (s, t) &\to \alpha(s, t), \end{aligned}$$

diferenciable en cada punt interior de $(-\varepsilon, \varepsilon) \times I$, que compleix $\alpha(0, t) = \gamma(t)$.

Per a cada $(s_0, t_0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times I$ definim els vectors $\partial/\partial s$ i $\partial/\partial t$ de l'espai tangent $T_{\alpha(s_0,t_0)}(M)$ com els vectors respectivament tangents a les corbes $s \to \alpha(s, t_0)$ i $t \to \alpha(s_0, t)$ (només seran camps definits sobre la imatge de α). El camp $\partial/\partial s$ s'anomena *camp transvers de la variació*.

Considerem ara una geodèsica $\gamma(t)$ de (M, g) i una variació α de γ que compleixi la condició que per a cada s la corba $t \to \alpha(s, t)$ sigui geodèsica. Una tal variació direm que és una *variació de* γ *per geodèsiques* i provarem que compleix la propietat següent:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} = R\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\partial}{\partial t}. \tag{1}$$

En efecte, com que les derivades parcials commuten, es té $[\partial/\partial t, \partial/\partial s] = 0$, i, per tant,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Resulta, doncs,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} + R\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Però com que totes les corbes $t \to \alpha(s,t)$ són geodèsiques, es té $\nabla_{\partial/\partial t}\partial/\partial t = 0$ i la igualtat anterior es converteix en (1).

La igualtat (1) s'utilitza per definir el concepte de *camp de Jacobi* al llarg d'una geodèsica:

Definició 2. Sigui γ una geodèsica de (M, g). Un camp vectorial ξ sobre la corba s'anomena *camp de Jacobi* si compleix l'equació

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\xi = R(\dot\gamma, \xi)\dot\gamma.$$

Els càlculs anteriors demostren el teorema següent:

Teorema 3. *La restricció sobre una geodèsica del camp transvers d'una variació d'aquesta geodèsica per geodèsiques és un camp de Jacobi.*

El recíproc d'aquest teorema és també cert, de demostració relativament senzilla, però nosaltres no el necessitarem.

1.2.2 Derivada de Lie La derivada de Lie $L_X K$ d'un camp tensorial K respecte a un camp vectorial X es defineix de la manera següent: Sigui $\{\varphi_t\}$ el grup uniparamètric local de transformacions associat al camp vectorial X. $L_X K$ és el camp tensorial del mateix tipus que el camp K que en cada punt $x \in M$ val

$$(L_X K)_x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((d\varphi_t)^{-1}(K_{\varphi_t(x)}) - K_x).$$

Es demostra que si Y és un camp vectorial, $L_X Y = [X, Y]$, i que si f és una funció, $L_X(f) = X(f)$. També es demostra que L_X és una derivació que commuta amb les contraccions, i, per tant, si α és un camp tensorial dues vegades covariant, hom té:

$$(L_X\alpha)(Y, Z) = X(\alpha(Y, Z)) - \alpha([X, Y], Z) - \alpha(Y, [X, Z]). \tag{2}$$

Malgrat que el concepte de derivada de Lie és un concepte propi de les varietats diferenciables, sense cap estructura addicional, en el cas que estiguem en una varietat pseudoriemanniana aquesta expressió es pot escriure d'una altra manera, tal com ens assegura la proposició següent:

Proposició 4. *Si α és un tensor dues vegades covariant en una varietat pseudoriemannniana, es compleix*

$$(L_X\alpha)(Y, Z) = (\nabla_X\alpha)(Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha(Y, \nabla_Z X).$$

Prova. La derivada covariant de α té l'expressió següent (similar a (2)):

$$(\nabla_X\alpha)(Y, Z) = X(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Aïllant d'aquí $X(\alpha(Y,Z))$ i substituint $\nabla_X Y$ per $\nabla_Y X + [X,Y]$ i $\nabla_X Z$ per $\nabla_Z X + [Z,X]$, s'obté

$$X(\alpha(Y,Z)) = (\nabla_X\alpha)(Y,Z)+\alpha(\nabla_Y X,Z)+\alpha(Y,\nabla_Z X)+\alpha([X,Y],Z)+\alpha(Y,[X,Z]).$$

Substituint això a (2) resulta l'expressió desitjada. □

COROL·LARI 5. *En una varietat pseudoriemanniana (M,g) hom té*

$$(L_X g)(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X).$$

PROVA. Basta aplicar la proposició anterior al tensor mètric g tenint en compte que $\nabla_X g = 0$ per a qualsevol camp vectorial X. □

1.2.3 Pertorbació de la curvatura produïda per una pertorbació de la mètrica Sigui (M,g) una varietat pseudoriemanniana de dimensió n. Sigui g' una altra mètrica pseudoriemanniana pròxima a g, de la forma $g' = g + h$. L'objectiu d'aquesta secció és establir un resultat (teorema 6) que expressi de manera aproximada els tensors de curvatura i de Ricci de g' en funció de h i dels tensors corresponents de g.

Designem per ∇ la connexió associada a g i per ∇' la connexió associada a g'. Posem

$$Q(X,Y) = \nabla'_X Y - \nabla_X Y,$$

on X i Y són camps vectorials. Si f és una funció, llavors

$$Q(X,fY) = \nabla'_X(fY) - \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla'_X Y - X(f)Y - f\nabla_X Y = fQ(X,Y).$$

Igualment es prova que $Q(fX,Y) = fQ(X,Y)$ i que $Q(X,Y) = Q(Y,X)$. Així, doncs, Q és un camp tensorial dues vegades covariant i una vegada contravariant, simètric en els factors covariants. Designem per $R'(X,Y)Z$ el tensor de curvatura de g' i per $R(X,Y)Z$ el de g. Volem ara expressar la diferència entre els dos tensors de curvatura (el de g' i el de g) en funció del tensor Q. Tindrem:

$$\begin{aligned}
R'(X,Y)Z &= \nabla'_X\nabla'_Y Z - \nabla'_Y\nabla'_X Z - \nabla'_{[X,Y]}Z = \\
&= \nabla'_X(\nabla_Y Z + Q(Y,Z)) - \nabla'_Y(\nabla_X Z + Q(X,Z)) - \nabla_{[X,Y]}Z - Q([X,Y],Z) = \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + Q(X,\nabla_Y Z) + \nabla_X Q(Y,Z) + Q(X,Q(Y,Z)) - \\
&\qquad - \text{el mateix, permutant } X \text{ i } Y - \nabla_{[X,Y]}Z - Q([X,Y],Z) = \\
&= R(X,Y)Z + Q(X,\nabla_Y Z) + \nabla_X Q(Y,Z) + Q(X,Q(Y,Z)) - \\
&\qquad - \text{el mateix, permutant } X \text{ i } Y - Q([X,Y],Z).
\end{aligned}$$

Recordem que $\nabla_X Q$ s'expressa de la forma següent:

$$(\nabla_X Q)(Y,Z) = \nabla_X(Q(Y,Z)) - Q(\nabla_X Y, Z) - Q(Y, \nabla_X Z).$$

Si a l'expressió anterior de $R'(X,Y)Z$ substituïm el terme $\nabla_X Q(Y,Z)$ per $(\nabla_X Q)(Y,\, Z) + Q(\nabla_X Y,\, Z) + Q(Y,\, \nabla_X Z)$, tindrem:

$$
\begin{aligned}
R'(X,Y)Z = R(X,Y)Z + (\nabla_X Q)(Y,Z) - (\nabla_Y Q)(X,Z) + \\
+ Q(X,Q(Y,Z)) - Q(Y,Q(X,Z)). \quad (3)
\end{aligned}
$$

Voldríem expressar ara aquesta mateixa fórmula en components, però abans hauríem de precisar les notacions que usarem relatives a les components d'un tensor. En primer lloc convindrem que índexs repetits a dalt i a baix indicaran sempre que s'ha de sumar respecte a aquests índexs (malgrat que s'hagi suprimit el sumatori). D'altra banda, si t és un tensor r vegades contravariant i s vegades covariant, que en una carta local s'expressa

$$t = t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

(recordem que per la convenció anterior no explicitem els sumatoris), designarem per $\nabla_i t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ les components de la derivada covariant $\nabla_{\partial/\partial x_i} t$. És a dir:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} t = \nabla_i t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}.$$

Haurem de precisar també la convenció que fem servir per escriure l'ordre dels índexs de les components del tensor de curvatura:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = R^r_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^r}.$$

Amb aquestes convencions, expressem ara la fórmula (3) en components:

$$R'^r_{ijk} = R^r_{ijk} + \nabla_j Q^r_{ki} - \nabla_k Q^r_{ji} + Q^r_{jl} Q^l_{ki} - Q^r_{kl} Q^l_{ji}. \quad (4)$$

Voldríem expressar el tensor Q en funció de la mètrica inicial g i de h (recordeu que $g' = g + h$). Hem d'utilitzar ara la ben coneguda fórmula de Riemann que dóna la derivada covariant en funció de la mètrica:

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - \\
- g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X])\}. \quad (5)
\end{aligned}
$$

Utilitzant aquesta fórmula tindrem:

$$
\begin{aligned}
2g'(Q(X,Y),Z) &= 2g'(\nabla'_X Y - \nabla_X Y, Z) = \\
&= X(g'(Y,Z)) + Y(g'(Z,X)) - Z(g'(X,Y)) - g'(X,[Y,Z]) - \\
&\quad - g'(Y,[X,Z]) - g'(Z,[Y,X]) - 2g'(\nabla_X Y, Z).
\end{aligned}
$$

Substituint aquí g' per $g + h$ i utilitzant una altra vegada la fórmula de Riemann (5), ens queda:

$$\begin{aligned}2g'(Q(X,Y),Z) = {} & X(h(Y,Z)) + Y(h(Z,X)) - Z(h(X,Y)) - \\ & - h(X,[Y,Z]) - h(Y,[X,Z]) - h(Z,[Y,X]) - 2h(\nabla_X Y, Z).\end{aligned}$$

Substituïm ara el terme $X(h(Y,Z))$ d'aquesta expressió per $(\nabla_X h)(Y,Z) + h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X Z)$, i els termes $Y(h(Z,X))$ i $Z(h(X,Y))$ per expressions similars. Ens queda, finalment:

$$2g'(Q(X,Y),Z) = (\nabla_X h)(Y,Z) + (\nabla_Y h)(Z,X) - (\nabla_Z h)(X,Y).$$

Aquesta fórmula s'expressa en components de la manera següent:

$$Q^i_{jk} = \frac{1}{2} g'^{il} (\nabla_j h_{kl} + \nabla_k h_{lj} - \nabla_l h_{jk}), \tag{6}$$

on (g'^{il}) indica, com sempre, la matriu inversa de (g'_{il}).

Per tenir Q en funció de g i de h tal com volem, hauríem d'expressar en la fórmula anterior la matriu inversa (g'^{il}) de (g'_{il}) en funció de la mètrica inicial g i de h. No perseguim una fórmula exacta, sinó que ens acontentarem amb una expressió aproximada tenint en compte que suposem que la diferència h entre g' i g és petita i té derivades petites (més endavant ja precisarem el sentit d'aquestes paraules). De $g' = g + h = g(1 + g^{-1}h)$, on 1 indica la matriu identitat, deduïm $g'^{-1} = (1 + g^{-1}h)^{-1} g^{-1}$. Designem per H la matriu $g^{-1}h$. Com que

$$(1 + H)^{-1} = 1 - H + H^2 - H^3 + \cdots,$$

negligint els termes d'ordre > 1 en h, tindrem $g'^{-1} = (1 + H)^{-1} g^{-1} \approx g^{-1} - Hg^{-1} = g^{-1} - g^{-1} h g^{-1}$. Per tant:

$$g'^{jk} \approx g^{jk} - g^{jl} h_{li} g^{ik}. \tag{7}$$

D'ara endavant utilitzarem la mètrica inicial g per identificar cada espai tangent amb el seu dual. Això ens permetrà identificar, quan ens convingui, tensors covariants i contravariants (pujarem i baixarem índexs utilitzant la mètrica inicial g). La fórmula anterior s'escriu llavors:

$$g'^{jk} \approx g^{jk} - h^{jk}. \tag{8}$$

Substituint aquesta expressió a (6) i suprimint els termes d'ordre > 1 en h, obtindrem:

$$Q^i_{jk} \approx \frac{1}{2} g^{il} (\nabla_j h_{kl} + \nabla_k h_{lj} - \nabla_l h_{jk}). \tag{9}$$

Quan substituïm aquesta expressió a (4), els termes en els quals hi ha un producte de dues Q resultaran d'ordre > 1 en h. Per tant, només haurem de calcular en funció de h els termes que contenen una derivada covariant de Q. Operant, tenim finalment:

$$R'^{r}_{ijk} \approx R^{r}_{ijk} + \frac{1}{2} g^{rl} \left\{ \nabla_j \nabla_k h_{il} - \nabla_k \nabla_j h_{il} + \nabla_j \nabla_i h_{lk} - \right. \\ \left. - \nabla_j \nabla_l h_{ki} + \nabla_k \nabla_l h_{ij} - \nabla_k \nabla_i h_{lj} \right\}. \quad (10)$$

D'aquesta fórmula podem obtenir les components del tensor de Ricci per contracció dels índexs r, j, ja que $R_{ik} = R^{r}_{irk}$. Operant ens queda

$$R'_{ik} \approx R_{ik} + \frac{1}{2} g^{rl} (\nabla_r \nabla_k h_{il} + \nabla_r \nabla_i h_{lk} - \nabla_r \nabla_l h_{ki}) - \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_i \operatorname{tr} h, \quad (11)$$

on $\operatorname{tr} h$ designa la traça de h, o sigui, $g^{rl} h_{rl}$.

Podem resumir tot el que hem fet en el teorema següent:

TEOREMA 6. *Sigui (M, g) una varietat pseudoriemanniana. Sigui h un camp tensorial d'ordre* 2*, simètric, tal que $g' = g + h$ continuï sent una mètrica pseudoriemanniana. Aleshores el tensor de curvatura i el tensor de Ricci de g' s'expressen en funció dels tensors corresponents de g per les fórmules* (10) *i* (11)*, on el símbol $\approx$ significa que els membres que figuren a la dreta i a l'esquerra del símbol difereixen en un terme $T(h)$ que depèn de h, tal que* $\lim_{t\to 0} T(th)/t = 0$ *(és a dir, un terme d'ordre > 1 en h).*

2 Rudiments de relativitat general

L'any 1905, Einstein va introduir la relativitat especial [5, 6]. Però el seu plantejament deixava la gravitació fora del camp d'estudi de la teoria. De fet, el mateix Einstein va necessitar onze anys per trobar la manera d'incloure-hi els fenòmens gravitatoris, i això va donar lloc a la relativitat general, presentada el 1916 [7]. Per arribar a aquesta fita va ser necessari, però, que Hermann Minkowski descobrís el 1908 [12] que les transformacions de Lorentz que estan a la base de la relativitat especial són isometries de $\mathbb{R}^4$ respecte a un producte escalar que avui es coneix amb el seu nom. Aquest fet permetia interpretar tots els fenòmens de la relativitat especial des d'un punt de vista geomètric, a $\mathbb{R}^4$. Aprofitant aquest punt de vista, Einstein, que ja s'havia adonat que la força gravitatòria associada a la matèria no és un concepte físic intrínsec, sinó que és fruit d'una elecció particular dels sistemes de coordenades, va ser capaç de formular de manera precisa la teoria que explica el comportament dels camps gravitatoris. Va descobrir que un tal camp no fa altra cosa que deformar la mètrica de l'espaitemps, que deixa de ser la de Minkowski i passa a ser una determinada mètrica de Lorentz. L'equació (en derivades parcials) que relaciona la matèria que crea el camp gravitatori amb aquesta mètrica de Lorentz es coneix amb el nom d'*equació d'Einstein de la gravitació* (equació que substitueix la famosa llei de Newton en el marc de la relativitat).

El lector que desitgi adquirir els coneixements bàsics de la relativitat general té a l'abast una infinitat de llibres i articles. Nosaltres recomanem, per exemple, els següents: [10], [13] i el capítol II de [11]. Malgrat que el llibre [11] que acabem de citar és molt especialitzat, el seu capítol II ofereix una presentació força intuïtiva de la relativitat, tant de l'especial com de la general.

Recordem que una varietat de Lorentz és una varietat pseudoriemanniana (V, g), on V és una varietat diferenciable de dimensió 4 i g és un camp tensorial diferenciable, covariant, d'ordre 2, simètric, que en cada punt $x \in V$ dóna lloc a un producte escalar de $T_x(V)$ (que depèn diferenciablement de x) no singular i d'índex 1. Això vol dir que en cada punt $x \in V$ es pot trobar una base de $T_x(V)$ en la qual la matriu del producte escalar g_x sigui la matriu diagonal $\mathrm{diag}[1, 1, 1, -1]$.

En cada punt $x \in V$ es poden definir els conceptes de *vector temporal*, *vector espacial* i *vector lumínic* de la manera següent: un vector $v \in T_x(V)$ és temporal si $g_x(v, v) < 0$, és espacial si $g_x(v, v) > 0$ i és lumínic si $g_x(v, v) = 0$.

En el context de les varietats de Lorentz, quan usem lletres gregues per designar índexs, suposarem que varien d'1 a 4, i quan usem índexs llatins, suposarem que varien d'1 a 3. Per exemple, un sistema de coordenades (x^1, x^2, x^3, x^4) el podem escriure (x^α).

En el marc de la relativitat general, la física de qualsevol sistema que actua sota l'acció d'un camp gravitatori es representa sempre en una certa varietat de Lorentz (V, g), dotada d'una orientació temporal i d'un camp tensorial covariant T, d'ordre 2, simètric, que descriu la matèria responsable del camp gravitatori. Aquest tensor T, que s'anomena *tensor d'impulsió-energia*, està relacionat amb la mètrica de Lorentz g per les equacions (d'Einstein) següents:

$$\begin{cases} \mathrm{Ric}(g) - \dfrac{1}{2}R(g)g + \Lambda g = \dfrac{8\pi G}{c^4}T, \\ \mathrm{div}_g\, T = 0, \end{cases} \tag{12}$$

on $\mathrm{Ric}(g)$ designa el tensor de Ricci de la mètrica g, $R(g)$ designa la seva curvatura escalar, Λ és una certa constant anomenada *constant cosmològica*, G és la constant de gravitació de Newton i c és la velocitat de la llum.

La constant cosmològica Λ té un valor molt petit que només és significatiu en problemes cosmològics en què intervenen distàncies (de temps o d'espai) molt grans. Malgrat que les ones gravitatòries que estudiarem poden provenir d'estrelles molt llunyanes, nosaltres ens interessarem només pel seu comportament ara i aquí, i en aquest sentit podem suposar sense cap recança que $\Lambda = 0$.

Una altra manera d'escriure la primera equació de (12) en el nostre cas és la següent:

$$\mathrm{Ric}(g) = \chi\left(T - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g\, T)g\right), \tag{13}$$

on χ designa la constant $8\pi G/c^4$ i $\mathrm{tr}_g T$ designa la traça de T respecte a la mètrica g. En efecte, la primera equació de (12), amb $\Lambda = 0$, s'escriu en coordenades:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}.$$

Sigui $(g^{\alpha\beta})$ la matriu inversa de $(g_{\alpha\beta})$. Multiplicant la igualtat anterior per $g^{\alpha\beta}$ i sumant respecte a α i β, s'obté

$$R - 2R = \chi \,\mathrm{tr}\, T.$$

Per tant, $R = -\chi \,\mathrm{tr}\, T$. Substituint aquest valor a la primera equació de (12) (amb $\Lambda = 0$) s'obté (13).

3 Observadors en caiguda lliure: conceptes bàsics

Considerem un observador en caiguda lliure sota l'acció d'un cert camp gravitatori. Hem dit que la física dels fenòmens que s'esdevenen sota l'acció d'aquest camp gravitatori, dintre del marc de la relativitat general, és descrita per una certa varietat de Lorentz (V, g) dotada d'una orientació temporal. La vida d'aquest observador vindrà representada per una certa corba $\gamma(t)$ de V de vector tangent temporal que apunta cap al futur. Se suposa que el paràmetre t és el temps propi de l'observador. Això vol dir que $g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) = -c^2$ (o també, que la norma de $\dot\gamma$ és $\sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)} = ic$). El fet que l'observador estigui en caiguda lliure es tradueix en el fet que la corba $\gamma(t)$ és geodèsica.

En qualsevol instant t_0 del seu temps propi, l'espai de tres dimensions de l'observador és l'espai E_{t_0} ortogonal al vector $\dot\gamma(t_0)$ dintre de l'espai tangent $T_{\dot\gamma(t_0)}(V)$. Com que en principi aquest espai tangent no està inclòs en la varietat, l'«espai» de l'observador en qualsevol instant tampoc no ho està i, per tant, els seus punts no són esdeveniments físics. Aquest fet pot sorprendre una mica. Però, pensem que quan jo estic parlant amb un amic situat a 1 metre meu, el que jo veig d'ell s'ha esdevingut 3.3×10^{-9} segons abans, i les paraules que ara jo sento han sortit de la seva boca 0.003 segons abans. Com que jo sóc incapaç de detectar aquests intervals tan petits de temps, tinc la sensació que el meu amic està en el meu mateix espai ara mateix, encara que la realitat física del meu amic conversant amb mi és ben diferent, i seria encara més diferent si el meu amic estigués a 2 metres de mi. Tot això és per dir que l'espai de tres dimensions on jo ara (a l'instant $t = t_0$) situo el meu amic és quelcom que no existeix físicament, i que és lògic que el modelitzem com un subespai de l'espai tangent de l'espaitemps en el punt $\gamma(t_0)$, una cosa que no forma part de la varietat on situem els esdeveniments físics. Si volgués considerar que el meu espai de tres dimensions en un instant t_0 del meu temps propi és quelcom on es poden situar els esdeveniments físics que passen en aquell instant, hauria d'identificar d'alguna manera l'espai E_{t_0} amb alguna subvarietat de tres dimensions de V. O, si més no, un cert entorn U_{t_0} de l'origen de E_{t_0} amb alguna subvarietat S_{t_0} de V. La manera de fer això que s'adiu més amb la intuïció és a través de l'aplicació que s'anomena *exponencial geodèsica*, que nosaltres designarem per φ_{t_0} i de la qual recordarem a continuació la definició.

Donat un vector $v \in E_{t_0}$, sigui $\tilde{v}$ el vector unitari $v/\|v\|$, on $\|v\| = \sqrt{g_{\gamma(t_0)}(v,v)}$. Sigui $s \to z_{t_0}(s,\tilde{v})$ l'única geodèsica tal que $z_{t_0}(0,\tilde{v}) = \gamma(t_0)$ i que $\dot{z}_{t_0}(0,\tilde{v}) = \tilde{v}$, on $\dot{z}_{t_0}$ indica el vector tangent en aquell punt. Com que el vector $\tilde{v}$ és unitari, la geodèsica $s \to z_{t_0}(s,\tilde{v})$ estarà parametritzada per la longitud de l'arc de corba comprès entre $z_{t_0}(0,\tilde{v})$ i $z_{t_0}(s,\tilde{v})$ (això s'abreuja dient que està parametritzada per l'arc). Sigui φ_{t_0} l'aplicació de E_{t_0} a la varietat V que a cada $v \in E_{t_0}$ fa correspondre el punt $z_{t_0}(\|v\|,\tilde{v})$. Com que la geodèsica $s \to z_{t_0}(s,\tilde{v})$ pot no estar definida per a tot s, l'aplicació φ_{t_0} pot no estar definida sobre tot E_{t_0}, però sí que ho estarà en una certa bola oberta U_{t_0} de E_{t_0} de centre l'origen i radi δ_{t_0}. Posem $S_{t_0} = \varphi_{t_0}(U_{t_0})$. Observeu que si identifiquem els punts de U_{t_0} amb els de S_{t_0} a través de φ_{t_0}, la longitud d'un cert radi de U_{t_0} que uneix l'origen amb un cert v serà igual a la distància geodèsica a S_{t_0} entre $\varphi_{t_0}(v)$ i $\gamma(t_0)$.

Si considerem un tros finit de la vida de l'observador comprès entre dos instants de temps, $a \le t \le b$, es pot demostrar que és possible trobar un sol δ de manera que, per a tot $t \in [a,b]$, φ_t estigui definida sobre la bola oberta U_t de E_t de radi δ (o sigui, un radi comú per a totes les φ_t).

Estem ara en condicions de definir un sistema de coordenades que denominarem *coordenades adaptades a l'observador* i que tradueix geomètricament en el marc de la varietat de Lorentz (V,g) la situació següent:

Suposem que jo vaig dintre d'una nau espacial en caiguda lliure a l'interior de la qual hi ha tres eixos perpendiculars de coordenades, i que jo em trobo a l'origen d'aquests eixos. Mitjançant aquesta referència puc descriure en cada moment la posició de qualsevol objecte dintre de la nau pels quatre números (x^1,x^2,x^3,t), on els tres primers són les coordenades de l'objecte a l'instant t del meu temps propi.

Com es tradueix aquesta situació en el marc geomètric de la varietat (V,g), tenint en compte que els eixos no poden estar a la varietat sinó als espais tangents en els diversos punts corresponents als diversos instants de la meva vida?

La meva vida és descrita per una geodèsica $\gamma(t)$ de V de vector tangent temporal que apunta cap al futur, corba que suposo parametritzada pel meu temps propi. Els tres eixos que viatgen amb mi donaran lloc a tres camps vectorials $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ sobre la corba $\gamma(t)$. El fet que els tres eixos estiguin quiets, sense girar durant el viatge, es modelitza imposant que són paral·lels al llarg de la corba, és a dir, $\nabla_{\dot{\gamma}} e_i = 0$. En relació amb això, cal tenir en compte que si fixem un instant t_0 i fixem tres vectors e_1, e_2, e_3 de $E_{t_0} = \langle\dot{\gamma}(t_0)\rangle^\perp$ que formin una base ortonormal, existeixen uns únics camps $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ sobre la corba, paral·lels, que per a $t = t_0$ coincideixen amb els vectors e_1, e_2, e_3 donats. Pel fet de ser paral·lels pertanyeran a E_t i seran base ortonormal d'aquest espai per a tot t.

Fixats dos instants a i b del meu temps, amb $a < b$, sigui δ un número positiu tal que, per a tot $t \in [a,b]$, φ_t estigui definida sobre la bola oberta U_t de E_t de radi δ. Siguin a' i b' dos altres números tals que $a < a' < b' < b$ (puc pensar que a' és proper a a i b' proper a b). Sigui U la bola oberta de $\mathbb{R}^3$ de radi δ i centre l'origen. Considerem l'aplicació

$$\begin{array}{rcccl} & \mathbb{R}^4 & & & \\ & \bigcup & & & \\ \psi\colon & U \times (a', b') & \to & V & \\ & (x^1, x^2, x^3, t) & \to & \varphi_t(\sum_{i=1}^{3} x^i e_i(t)), & \end{array} \tag{14}$$

la qual donarà lloc a una carta local $(\psi(U \times (a', b')), \psi^{-1})$.

En el sistema de coordenades corresponent a aquesta carta, l'observador $\gamma(t)$ té coordenades $(0, 0, 0, t)$ per a tot t; les subvarietats S_t (que hem identificat amb l'«espai» de l'observador a l'instant t) són les llesques horitzontals t = constant; la matriu de $g_{\gamma(t)}$ és $\operatorname{diag}[1, 1, 1, -c^2]$; la geodèsica que uneix qualsevol punt $p = (p^1, p^2, p^3, t) \in S_t$ amb $\gamma(t) = (0, 0, 0, t)$ està determinada paramètricament per $s \to (\frac{sp^1}{\|p\|}, \frac{sp^2}{\|p\|}, \frac{sp^3}{\|p\|}, t)$, amb $\|p\| = \sqrt{\sum_i (p^i)^2}$; i, finalment, la distància geodèsica entre $p \in S_t$ i $\gamma(t)$ és $\|p\|$.

4 Acceleració que un observador en caiguda lliure atribueix a un altre observador en caiguda lliure

Considerem ara dos observadors A i B pròxims l'un de l'altre i en caiguda lliure. Siguin γ_A i γ_B les dues corbes de V que representen les seves vides. A la figura 1 es dibuixen aquestes corbes, juntament amb els espais (de tres dimensions) del primer observador, S_{t_1}, S_{t_2}, S_{t_3}, en tres instants del seu temps propi (considerats com a subvarietats de V pel procediment explicat a la secció anterior). Observeu que S_{t_1}, S_{t_2}, S_{t_3} són perpendiculars a la corba $\gamma_A(t)$ del primer observador, però no ho són a la corba $\gamma_B(t)$ del segon. En el dibuix es posa de manifest que l'observador A veurà que B va canviant de posició a l'espai (a l'espai de tres dimensions de A) i li atribuirà una acceleració que ens proposem calcular a continuació. Remarquem abans, però, que cada un d'aquests dos observadors està en caiguda lliure i cap d'ells no nota que sobre ell actuï cap força. Tanmateix, veurem que A atribuirà a B una certa acceleració.

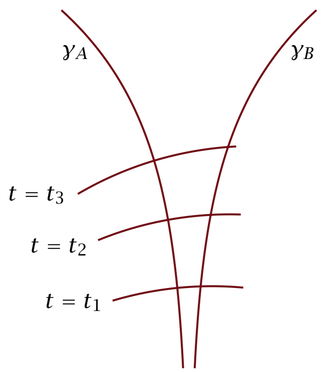

FIGURA 1

Fixem un instant de temps $t = t_0$ de l'observador A. Com que volem estudiar la posició relativa de B respecte a A en els instants propers a t_0, per simplificar-ho farem un canvi d'origen en el temps de l'observador A de manera que l'instant que hem fixat passi a ser l'origen de temps $t = 0$. Provarem el lema següent:

LEMA 7. *Existeix un número real positiu ε tal que si B és un observador en caiguda lliure tal que la geodèsica $\tau \to \gamma_B(\tau)$ talla S_0 en un punt a distància geodèsica de $\gamma_A(0)$ menor que ε, llavors existeix una variació*

$$\begin{array}{rlcl} \alpha\colon & (-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon) & \to & V \\ & (s,\tau) & \to & \alpha(s,\tau), \end{array}$$

que compleix:

1) $\alpha(0,\tau) = \gamma_A(\tau)$.
2) *Les corbes $\tau \to \alpha(s,\tau)$ són geodèsiques de vector tangent de norma ic en tot punt.*
3) *Per a un cert valor s_B de s es compleix $\alpha(s_B,\tau) = \gamma_B(\tau)$.*
4) *$s \to \alpha(s,0)$ és la geodèsica de S_0 que dóna la distància mínima a $\gamma_A(0)$.*
5) *El camp $\frac{\partial}{\partial s}$ de la variació α és perpendicular a $\frac{\partial}{\partial \tau}$ sobre la corba $\tau \to \alpha(0,\tau) = \gamma_A(\tau)$.*

Aquest lema ens assegura que tot observador B en caiguda lliure pròxim a A en un cert instant $t = 0$ del temps de A forma part d'una família α_s d'observadors en caiguda lliure parametritzada per un paràmetre $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, de la qual formen part A (per a $s = 0$) i B (per a $s = s_B$).

Deixarem la prova del lema per al final d'aquesta secció i ara, utilitzant-lo, calcularem l'acceleració que A atribuirà a B a l'instant $t = 0$ del seu temps. La posició que A atribuirà a B a l'instant t serà el punt p_t intersecció de la geodèsica $\tau \to \alpha(s_B,\tau)$ amb S_t. Sigui $\xi_t \in \langle\dot\gamma_A(t)\rangle^\perp \subset T_{\gamma_A(t)}(V)$ el vector tal que $\varphi_t(\xi_t) = p_t$. El vector posició que A atribuirà a B a l'instant t serà ξ_t. Per tant, l'acceleració que A atribuirà a B a l'instant $t = 0$ serà $\nabla_{\dot\gamma_A(0)}\nabla_{\dot\gamma_A(t)}\xi_t$.

En el sistema de coordenades (14) adaptat a l'observador A, tindrem

$$\alpha^\lambda(s,\tau) \approx \alpha^\lambda(0,\tau) + \frac{\partial\alpha^\lambda(0,\tau)}{\partial s}s, \quad \lambda = 1,\dots,4,$$

on el símbol $\approx$ indica igualtat llevat de termes d'ordre > 1 en s. Com que el vector $\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{s=0}$ és perpendicular a $\dot\gamma_A(\tau)$ per a qualsevol τ, la quarta coordenada de $\frac{\partial\alpha^\lambda(0,\tau)}{\partial s}$ serà nul·la. Com que, d'altra banda, $\alpha(0,\tau) = \gamma_A(\tau)$, tindrem

$$\alpha(s,\tau) \approx \left(\frac{\partial\alpha^1(0,\tau)}{\partial s}s, \frac{\partial\alpha^2(0,\tau)}{\partial s}s, \frac{\partial\alpha^3(0,\tau)}{\partial s}s, \tau\right). \tag{15}$$

El punt p_t intersecció de la geodèsica $\tau \to \alpha(s_B,\tau)$ amb S_t és

$$p_t \approx \left(\frac{\partial\alpha^1(0,t)}{\partial s}s, \frac{\partial\alpha^2(0,t)}{\partial s}s, \frac{\partial\alpha^3(0,t)}{\partial s}s, t\right)$$

(aclarim aquí que hem designat per τ el temps propi dels observadors $\tau \to \alpha(s,\tau)$ per a tot s, i per t el temps de l'observador A. És a dir, que $\tau = t$ quan $s = 0$). El vector ξ_t serà, doncs, aproximadament igual a $s_B \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(0,t)}$. Com que la variació α és per geodèsiques, el vector $\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{(0,t)}$ és un camp de Jacobi sobre la geodèsica γ_A, i pel teorema 3

$$\nabla_{\dot\gamma_A(0)}\nabla_{\dot\gamma_A(t)}\xi_t \approx R(\dot\gamma_A(0),\xi_0)\dot\gamma_A(0).$$

Resumim a continuació en el teorema següent les conclusions a què hem arribat:

TEOREMA 8. *Sigui A un observador en caiguda lliure i sigui $\gamma_A(t)$ la geodèsica que representa la seva vida. Sigui B un altre observador en caiguda lliure que durant un cert període de temps està suficientment a prop de A perquè aquest li pugui mesurar la seva posició. Sigui ξ_t el vector posició que A atribueix a B (vector que depèn de t). L'acceleració que A atribuirà a B és $R(\dot\gamma_A,\xi)\dot\gamma_A$, on R indica aquí el tensor de curvatura de (V,g).*

Donem a continuació la prova del lema.

PROVA DEL LEMA 7. Considerem una carta local adaptada a l'observador A donada per una ψ de la forma (14) tal que $0 \in (a',b')$. Suposem que la corba $\gamma_B(\tau)$ intercepta la subvarietat S_0 d'equació $t = 0$ en un cert punt p. Fem un canvi d'origen en el temps propi τ de B de manera que el punt p correspongui a $\tau = 0$. En les coordenades de la carta local que hem pres, la geodèsica $a(s)$ de S_0 que uneix p amb $\gamma_A(0)$ serà $a(s) = (\frac{sp^1}{\|p\|}, \frac{sp^2}{\|p\|}, \frac{sp^3}{\|p\|}, 0)$, amb $\|p\| = \sqrt{\sum_i (p^i)^2}$. Els espais tangents $T_{a(s)}(V)$ en els diversos punts $a(s)$ de la geodèsica $a(s)$ estan tots continguts en una varietat comuna, que és el fibrat tangent $T(V)$. Sigui $s \to b(s) \in T(V)$ una corba diferenciable de $T(V)$ que compleixi: 1) $b(s) \in T_{a(s)}(V)$ per a tot s; 2) $b(0) = \dot\gamma_A(0)$; 3) $b(\|p\|) = \dot\gamma_B(0)$; 4) tots els $b(s)$ són temporals i tenen norma ic, és a dir, $g_{a(s)}(b(s), b(s)) = -c^2$. Com que els $b(s)$ són temporals i per a $s = 0$ el vector $b(0) = \dot\gamma_A(0)$ apunta cap al futur, apuntaran cap al futur per a tot s. Sigui $\tau \to \gamma_s(\tau)$ l'única geodèsica tal que $\gamma_s(0) = a(s)$ i $\dot\gamma_s(0) = b(s)$. Cada geodèsica $\tau \to \gamma_s(\tau)$ en principi només estarà definida en un cert interval $-\varepsilon_s < \tau < \varepsilon_s$ que depèn de s, però el teorema d'existència, unicitat i dependència diferenciable de les condicions inicials de l'equació de les geodèsiques ens assegura que existeix un ε tal que $\tau \to \gamma_s(\tau)$ està definit per a tot $(s,\tau) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\varepsilon,\varepsilon)$. Definim llavors la variació α posant $\alpha(s,\tau) = \gamma_s(\tau)$.

Aquesta variació α, per construcció, és una variació per geodèsiques de γ_A tal que per a $s = |p|$ s'obté γ_B. Designem per s_B aquest valor de s (és a dir, $s_B = |p|$). El camp transvers $\frac{\partial}{\partial s}$ d'aquesta variació és perpendicular per construcció a $\frac{\partial}{\partial \tau}$ per a $s = 0$ i $\tau = 0$. Provem que això implica que $\frac{\partial}{\partial s}$ és perpendicular a $\frac{\partial}{\partial \tau}$ per a $s = 0$, qualsevol que sigui τ. En efecte, com que $g(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial\tau}) = c^2$, la seva derivada respecte a s és nul·la. Per tant,

$$0 = \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial\tau}\right) = 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial\tau}\right).$$

O sigui que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial\tau}$ és sempre perpendicular a $\frac{\partial}{\partial\tau}$. D'altra banda,

$$\frac{\partial}{\partial\tau} g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial\tau}\right) = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau}} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial\tau}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau}} \frac{\partial}{\partial\tau}\right).$$

Però $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau}} \frac{\partial}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial\tau}$ perquè les derivades parcials commuten, per tant, el primer terme del segon membre de la igualtat anterior és nul i el segon terme, també, perquè $\tau \to \alpha(s,\tau)$ són geodèsiques per a tot s. Per tant, el producte escalar de $\frac{\partial}{\partial s}$ i $\frac{\partial}{\partial\tau}$ no depèn de τ. Com que per a $s = 0$ i $\tau = 0$ s'anul·la, també s'anul·larà per a $s = 0$ i qualsevol τ. □

5 Equació d'Einstein per a petites pertorbacions de la mètrica de Minkowski

Sortosament nosaltres vivim en una regió on els camps gravitatoris són molt petits des del punt de vista relativista. Si no hi haguessin camps gravitatoris, la física seria descrita per la relativitat especial, que des del punt de vista geomètric es modela a l'espai de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta)$, on η designa la mètrica que en la base canònica de $\mathbb{R}^4$ té per matriu la matriu diagonal $\eta = \mathrm{diag}[1,1,1,-c^2]$. Estudiarem el cas d'un camp gravitatori creat per una matèria amb tensor d'impulsió-energia T petit i derivades de T petites, i suposarem que la mètrica de Lorentz g' a $\mathbb{R}^4$ associada al camp gravitatori és una pertorbació petita de la mètrica de Minkowski. És a dir, $g' = \eta + h$, amb h petit i derivades de h petites. L'equació d'Einstein (13) s'escriurà:

$$\mathrm{Ric}(g') = \chi\left(T - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{g'} T)g'\right).$$

Com que $g' = \eta + h$, i tenint en compte la fórmula (8) que ens dóna de manera aproximada la matriu $(g'^{\alpha\beta})$, tindrem

$$\begin{aligned}(\mathrm{tr}_{g'} T)g' &= (g'^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta})g' \approx \\ &\approx ((\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta})T_{\alpha\beta})(\eta + h) \approx (\eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta})\eta = (\mathrm{tr}_\eta T)\eta,\end{aligned}$$

on hem suprimit (per petits) els termes que porten productes de h i T o producte de dues h.

Per tant, l'equació d'Einstein s'escriu de manera aproximada:

$$\mathrm{Ric}(\eta + h) \approx \chi\left(T - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_\eta T)\eta\right). \tag{16}$$

Sigui $D(h)$ el 2-tensor covariant a $\mathbb{R}^4$ donat per

$$D(h)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu}(\nabla_\lambda\nabla_\beta h_{\alpha\mu} + \nabla_\lambda\nabla_\alpha h_{\mu\beta} - \nabla_\lambda\nabla_\mu h_{\beta\alpha}) - \frac{1}{2}\nabla_\beta\nabla_\alpha \operatorname{tr} h,$$

on ∇ indica la derivada covariant associada a la mètrica inicial (que en aquest cas és la de Minkowski).

En virtut de la fórmula (11) es té

$$\operatorname{Ric}(\eta + h) \approx \operatorname{Ric}(\eta) + D(h).$$

Com que el tensor de Ricci de η és nul, l'equació (16) s'escriu de manera aproximada

$$D(h) \approx \chi\left(T - \frac{1}{2}(\operatorname{tr}_\eta T)\eta\right). \tag{17}$$

Aquesta equació, tot i ser aproximada, encara és massa complicada. Per tal de simplificar-la, en comptes de considerar totes les mètriques de Lorentz de la forma $g' = \eta + h$ amb h petit, ens limitarem només a aquelles mètriques $g' = \eta + h$ tals que h (a més de ser petit) compleix la condició suplementària

$$\operatorname{div} h = \frac{1}{2} d \operatorname{tr} h, \tag{18}$$

on d indica la diferencial exterior. Aquesta condició s'escriu en components:

$$\nabla^\mu h_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}\nabla_\alpha \operatorname{tr} h.$$

Tenint en compte que les derivades covariants associades a la mètrica de Minkowski són les derivades ordinàries i que ∇_α commuta amb ∇_β, es veu trivialment que per a les h que compleixen la condició (18) hom té

$$D(h)_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\nabla^\mu\nabla_\mu h_{\beta\alpha} = -\frac{1}{2}\Box h_{\beta\alpha},$$

on l'operador $\Box$ és l'operador de d'Alembert que actua sobre les funcions f de $\mathbb{R}^4$ així:

$$\Box f = \frac{\partial^2 f}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(x^3)^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Per tant, per a les h que compleixen (18), l'equació (17) s'escriu:

$$-\frac{1}{2}\Box h_{\alpha\beta} = \chi S_{\alpha\beta}, \tag{19}$$

on S designa el tensor $T - (1/2)(\operatorname{tr}_\eta T)\eta$ que apareix al segon membre de (17). Observeu que en les regions de $\mathbb{R}^4$ on el tensor T s'anul·la (on no hi ha matèria), també S s'anul·la i en aquestes regions l'equació d'Einstein s'escriu de manera aproximada:

$$\Box h_{\alpha\beta} = 0,$$

que és l'equació d'ona per a cada una de les 10 components $h_{\alpha\beta}$ de h.

Resumint: l'equació d'Einstein aproximada corresponent a una mètrica $g' = \eta + h$ i a un tensor d'impulsió-energia T (amb T i h petits) és (17). Ara bé, per a les mètriques g' que provenen d'un h que compleix (18), l'equació d'Einstein aproximada es pot escriure de la forma més senzilla (19). Cal, doncs, preguntar-nos per la significació física de la condició (18). Per fer això cal estudiar l'acció dels difeomorfismes pròxims a la identitat sobre l'equació (17).

6 Acció de difeomorfismes pròxims a la identitat sobre les mètriques

La pràctica totalitat dels llibres clàssics de relativitat, en arribar a aquest punt, fan uns càlculs senzills en coordenades per explicar que la condició (18) és irrellevant des del punt de vista físic, càlculs que amaguen una mica que aquest fet involucra difeomorfismes de la varietat pròxims a la identitat i derivades de Lie respecte als camps que parametritzen aquests difeomorfismes. Per posar de manifest tot això de manera clara convé considerar un marc una mica més general que el de l'apartat anterior. Situem-nos en el context d'una varietat de Lorentz (V, g) per a la qual existeix una mètrica de Riemann γ tal que la varietat de Riemann (V, γ) és completa. En aquesta situació, podem parametritzar els difeomorfismes de V pròxims a la identitat pels camps vectorials ξ pròxims a zero a través de l'exponencial geodèsica de γ, tal com explicarem a continuació.

Donat un camp vectorial ξ, designem per f_ξ el difeomorfisme

$$\begin{aligned} f_\xi\colon\ V &\to V \\ x &\to z(x, 1, \xi), \end{aligned}$$

on $t \to z(x, t, \xi)$ indica l'única geodèsica de la varietat de Riemann (V, γ) tal que $z(x, 0, \xi) = x$ i $\dot z(x, 0, \xi) = \xi$. Sigui $g' = g + h$ una mètrica de Lorentz pròxima a g. Posem per $g' \circ f_\xi = (f_\xi^{-1})^* g'$. Designem per ∇' la derivada covariant associada a la mètrica g' i per ∇ la derivada covariant associada a g. Si la mètrica g' és de la forma $g' = g + h$ amb h petit, la mètrica $g' \circ f_\xi$ quan ξ és petit també serà pròxima a g i, per tant, serà de la forma $g' \circ f_\xi = g + h_\xi$ amb h_ξ petit. La proposició següent descriu la relació entre h_ξ i h:

PROPOSICIÓ 9. *Es compleix*

$$h_\xi \approx h - L_\xi g,$$

i en qualsevol carta local això es pot escriure

$$(h_\xi)_{\alpha\beta} \approx h_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \xi_\beta - \nabla_\beta \xi_\alpha.$$

PROVA. Aplicant la fórmula de Taylor a la corba $t \to z(x, t, \xi)$, obtenim:

$$z^\alpha(x, 1, \xi) = z^\alpha(x, 0, \xi) + \dot z^\alpha(x, 0, \xi)(1 - 0) + \cdots$$

Això dóna

$$f_\xi^\alpha(x) = x^\alpha + \xi^\alpha(x) + T^\alpha(\xi), \tag{20}$$

on $T(\xi)$ indica un terme d'ordre > 1 en ξ.

L'expressió (20) ens permet calcular el jacobià

$$\frac{\partial f_\xi^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} + \cdots$$

El jacobià del difeomorfisme invers serà

$$\frac{\partial (f_\xi^{-1})^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} + \cdots \tag{21}$$

Com que

$$((f_\xi^{-1})^*(g'))_x\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = g'_{f_\xi^{-1}(x)}\left((f_\xi^{-1})_*\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, (f_\xi^{-1})_*\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right),$$

tenint en compte l'expressió (21) del jacobià del difeomorfisme invers, tindrem

$$\begin{aligned}(g' \circ f_\xi)_{\alpha\beta}(x) &= g'_{\alpha\beta}(f_\xi^{-1}(x)) - \\ &- (\partial_\alpha \xi^\lambda) g'_{\lambda\beta}(f_\xi^{-1}(x)) - (\partial_\beta \xi^\lambda) g'_{\alpha\lambda}(f_\xi^{-1}(x)) + \cdots,\end{aligned} \tag{22}$$

on ∂_α designa, com sempre, $\partial/\partial x^\alpha$.

Ara bé, per la fórmula de Taylor resulta

$$\begin{aligned}g'_{\alpha\beta}(f_\xi^{-1}(x)) &= g'_{\alpha\beta}(x) + \sum_\lambda (f_\xi^{-1}(x)^\lambda - x^\lambda)\partial_\lambda g'_{\alpha\beta} + \cdots = \\ &= g'_{\alpha\beta}(x) + \sum_\lambda ((x^\lambda - \xi^\lambda) - x^\lambda)\partial_\lambda g'_{\alpha\beta} + \cdots\end{aligned}$$

Això s'escriu com

$$g'_{\alpha\beta}(f_\xi^{-1}(x)) = g'_{\alpha\beta}(x) - \xi(g'_{\alpha\beta}) + \cdots,$$

on $\xi(g'_{\alpha\beta})$ indica el camp ξ actuant (com a derivació) sobre la funció $g'_{\alpha\beta}$.

Substituint aquesta expressió a (22) s'obté

$$\begin{aligned}(g' \circ f_\xi)_{\alpha\beta}(x) &= g'_{\alpha\beta}(x) - \xi(g'_{\alpha\beta}) - \\ &- (\partial_\alpha \xi^\lambda) g'_{\lambda\beta}(x) - (\partial_\beta \xi^\lambda) g'_{\alpha\lambda}(x) + \cdots\end{aligned} \tag{23}$$

Ara bé, els termes $-(\partial_\alpha \xi^\lambda) g'_{\lambda\beta}(x) - (\partial_\beta \xi^\lambda) g'_{\alpha\lambda}(x)$ de l'expressió anterior es poden escriure com

$$g'\left(\left[\xi, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right], \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) + g'\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \left[\xi, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right]\right).$$

Substituint això a (23) i tenint en compte l'expressió (2) de la derivada de Lie, obtenim

$$(g' \circ f_\xi)_{\alpha\beta}(x) = g'_{\alpha\beta}(x) - (L_\xi g')_{\alpha\beta}(x) + \cdots \tag{24}$$

Utilitzant la notació de la subsecció 1.2.3, tindrem

$$\nabla'_{\partial/\partial x^\alpha}\xi = \nabla_{\partial/\partial x^\alpha}\xi + Q(\partial/\partial x^\alpha, \xi) = \nabla_{\partial/\partial x^\alpha}\xi + Q_{\alpha\beta}\xi^\beta.$$

Ara bé, els termes $Q_{\alpha\beta}\xi^\beta$ contenen productes de h i de ξ (ambdós petits). Seran, per tant, negligibles i (24) s'escriurà

$$\begin{aligned}(g' \circ f_\xi)_{\alpha\beta} &\approx g'_{\alpha\beta} - (\nabla_\alpha\xi^\lambda)g'_{\lambda\beta} - (\nabla_\beta\xi^\lambda)g'_{\alpha\lambda} = \\ &= g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - (\nabla_\alpha\xi^\lambda)(g_{\lambda\beta} + h_{\lambda\beta}) - (\nabla_\beta\xi^\lambda)(g_{\alpha\lambda} + h_{\alpha\lambda}) \approx \\ &\approx g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - (\nabla_\alpha\xi^\lambda)g_{\lambda\beta} - (\nabla_\beta\xi^\lambda)g_{\alpha\lambda} = \\ &= g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\xi_\beta - \nabla_\beta\xi_\alpha.\end{aligned}$$

Això prova la proposició. □

7 Elecció d'una referència convenient per a l'equació de gravitació

Tornem-nos a situar en el marc de la secció 5. Estàvem a $\mathbb{R}^4$ amb la mètrica η de Minkowski. L'equació d'Einstein aproximada corresponent a una mètrica $g' = \eta + h$ i a un tensor d'impulsió-energia T (amb T i h petits) era (17). Per a les mètriques g' que provenien d'un h que complia (18), l'equació d'Einstein aproximada es podia escriure de la forma més senzilla (19). En aquesta situació establirem el teorema següent:

TEOREMA 10. *Si h és solució de*

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\,\Box h_{\alpha\beta} \approx \chi S_{\alpha\beta} \\ \nabla^\rho h_{\rho\alpha} \approx \dfrac{1}{2}\nabla_\alpha \operatorname{tr} h, \end{cases} \tag{25}$$

llavors h és solució de l'equació d'Einstein aproximada (17)*. D'altra banda, si h és solució de l'equació d'Einstein aproximada* (17)*, llavors es pot trobar un difeomorfisme f_ξ pròxim a la identitat (difeomorfisme associat a un camp ξ) tal que si posem $(f_\xi^{-1})^*(\eta + h) = \eta + h_\xi$, aleshores h_ξ sigui solució de* (25)*.*

Dit de manera menys precisa: les equacions aproximades (25) *són equivalents a l'equació aproximada d'Einstein* (17)*.*

Del fet d'escollir un difeomorfisme adequat perquè es compleixi la segona equació aproximada de (25) els físics en diuen escollir una *gauge*. Nosaltres traduirem el mot anglès *gauge* (emprat arreu) per *referència*.

PROVA. La primera implicació ja l'hem demostrat a la secció 5. Per demostrar la segona vegem en primer lloc que l'equació (17) és invariant per l'acció de difeomorfismes infinitesimals. És a dir, quan s'aplica un difeomorfisme infinitesimal a aquella equació s'obté *exactament* la mateixa equació. Comencem pel primer membre de (17). Vegem, amb la notació de l'apartat anterior, que si ξ és un camp vectorial es té $D(h)$=$D(h_\xi)$. En efecte, de la definició de $D(h)$ hom té

$$D(h_\xi)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu}(\nabla_\lambda\nabla_\beta(h_\xi)_{\alpha\mu} + \nabla_\lambda\nabla_\alpha(h_\xi)_{\mu\beta} - \nabla_\lambda\nabla_\mu(h_\xi)_{\beta\alpha}) - \frac{1}{2}\nabla_\beta\nabla_\alpha \operatorname{tr} h_\xi.$$

Substituint aquí h_ξ per l'expressió $(h_\xi)_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\xi_\beta - \nabla_\beta\xi_\alpha$ donada per la proposició 9, s'obté per un càlcul senzill que $D(h_\xi)$=$D(h)$.

Naturalment, si el primer membre de (17) és invariant per l'acció d'un difeomorfisme infinitesimal, el segon membre, també. De totes maneres això es pot veure directament de la manera que explicarem tot seguit.

Recordem que havíem designat per $S = T - (1/2)(\operatorname{tr}_\eta T)\eta$. Els mateixos càlculs que hem fet per establir la fórmula (24) ens portarien a l'expressió

$$(S \circ f_\xi) = S - L_\xi S + \cdots$$

En virtut de (2), tindrem

$$(L_\xi S)_{\alpha\beta} = \xi(S_{\alpha\beta}) - S\left(\left[\xi, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right], \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) - S\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \left[\xi, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right]\right).$$

En cada un d'aquests termes, hi intervenen productes de ξ i de S, ambdós petits. Per tant, $L_\xi S \approx 0$ i $(S \circ f_\xi) \approx S$.

El segon pas que farem és veure que, donada una mètrica $g' = \eta + h$ pròxima a η, podem trobar un camp vectorial ξ per al qual la mètrica $g' \circ f_\xi = \eta + h_\xi$ compleixi la condició (18), que s'escriu

$$\nabla^\rho(h_\xi)_{\rho\alpha} = \frac{1}{2}\nabla_\alpha \operatorname{tr} h_\xi. \tag{26}$$

Com que $(h_\xi)_{\alpha\rho} = h_{\alpha\rho} - \nabla_\alpha\xi_\rho - \nabla_\rho\xi_\alpha$, el primer membre de (26) esdevé

$$\nabla^\rho(h_\xi)_{\rho\alpha} = \nabla^\rho h_{\rho\alpha} - \nabla_\alpha \operatorname{div}\xi - \Box\xi_\alpha.$$

Per altra banda, $\operatorname{tr} h_\xi = \operatorname{tr} h - 2\operatorname{div}\xi$. Per tant (26) s'escriu, finalment

$$\Box\xi_\alpha = \nabla^\rho h_{\alpha\rho} - \frac{1}{2}\nabla_\alpha \operatorname{tr} h. \tag{27}$$

Això, per a h donat, és una equació en ξ que té infinites solucions depenent de les condicions inicials que s'imposin a ξ. Qualsevol d'aquestes solucions ens dóna un difeomorfisme infinitesimal com el que busquem.

Prenguem ara h que sigui solució de l'equació d'Einstein aproximada (17). Pel procediment que acabem d'indicar trobem un camp ξ tal que el h_ξ corresponent compleixi la segona equació aproximada de (25). Com que l'equació (17) és invariant per l'acció de difeomorfismes infinitesimals i h era solució de (17), h_ξ també ho serà. Per tant, h_ξ serà solució de la primera equació de (25). $\Box$

Més endavant necessitarem el lema tècnic següent relacionat amb l'afirmació de la segona part del teorema anterior.

LEMA 11. *Si h és solució de l'equació d'Einstein aproximada* (17)*, si ξ és un camp vectorial tal que h_ξ és solució de* (25) *i si ζ és qualsevol camp que compleix $\Box\zeta_\alpha = 0$, llavors el camp $\xi' = \xi + \zeta$ és tal que $h_{\xi'}$ també és solució de* (25)*.*

PROVA. A la demostració de la segona part del teorema 10 havíem pres com a camp ξ qualsevol camp que fos solució de (27). Naturalment, si ξ és solució de (27) i ζ compleix $\Box\zeta_\alpha = 0$, el camp $\xi' = \xi + \zeta$ també és solució de (27). □

Einstein va donar solucions explícites de les equacions (25) en els articles [8] i [9]. Per veure com es poden resoldre, diguem que és ben conegut que en mecànica clàssica el potencial gravitatori (a $\mathbb{R}^3$) produït per una matèria amb densitat $\rho(x)$ ve donat per

$$V(x) = -G\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|}\,dy,$$

i que això correspon a la solució de l'equació de Poisson

$$\Delta V = 4\pi G\rho$$

que s'anul·la a l'infinit.

De manera anàloga, es pot demostrar que a $\mathbb{R}^4$ la solució de

$$\Box V = 4\pi G\rho$$

que per a cada t s'anul·la a l'infinit de $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$ és el potencial

$$V(x,t) = -G\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y, t \pm \frac{1}{c}|x-y|)}{|x-y|}\,dy.$$

Per tant, les $h_{\alpha\beta}$ solucions de (25) que busquem són

$$h_{\alpha\beta}(x,t) = \frac{\chi}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{S_{\alpha\beta}(y, t - \frac{1}{c}|x-y|)}{|x-y|}\,dy. \tag{28}$$

Ara bé, cal preguntar-nos si aquestes $h_{\alpha\beta}$ compleixen també la segona equació de (25). Veurem que sí. En efecte, sabem que el tensor T d'impulsió-energia té divergència nul·la. Això porta com a conseqüència que el tensor $S = T - (1/2)(\mathrm{tr}_\eta T)\eta$ compleix la condició

$$\nabla^\rho S_{\rho\alpha} = \frac{1}{2}\nabla_\alpha \operatorname{tr} S.$$

Utilitzant aquesta condició es pot veure que les solucions $h_{\alpha\beta}$ donades per (28) compleixen automàticament la segona equació de (25).

8 Què entenem per *ona gravitatòria*

Ja hem dit al començament de la secció 5 que sortosament nosaltres vivim en una regió on els camps gravitatoris són molt petits des del punt de vista relativista i que la física del nostre entorn és modelada per pertorbacions petites de la mètrica de Minkowski $\eta + h$; i si el nostre entorn és el buit, ara i aquí el tensor h, llevat d'un cert difeomorfisme de $\mathbb{R}^4$, complirà l'equació d'ona $\Box h_{\alpha\beta} = 0$. Estaríem, doncs, temptats de dir que una ona gravitatòria és una pertorbació petita de la mètrica de Minkowski η de manera que es pot trobar un cert difeomorfisme de $\mathbb{R}^4$ tal que aquesta pertorbació s'expressa com $\eta + h$, amb el tensor h que compleix l'equació d'ona $\Box h_{\alpha\beta} = 0$. Ara bé, si les components $h_{\alpha\beta}$ no depenguessin del temps, la pertorbació corresponent de la mètrica de Minkowski podria considerar-se una ona gravitatòria? Evidentment que no, perquè la idea intuïtiva que tenim d'ona està associada a alguna cosa que varia amb el temps.

Si les $h_{\alpha\beta}$ no depenen del temps, l'equació d'ona $\Box h_{\alpha\beta} = 0$ esdevé l'equació de Laplace

$$\Delta h_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial (x^i)^2} = 0$$

perquè $\partial^2 h_{\alpha\beta}/\partial t^2 = 0$. Aquest és el cas del camp gravitatori produït per qualsevol estrella esfèrica (en particular, pel Sol), camp estàtic que no dóna lloc a cap ona gravitacional. Vegem amb detall com són les $h_{\alpha\beta}$ en aquesta situació.

És ben conegut que la mètrica de $\mathbb{R}^4$ associada al camp gravitatori d'una estrella esfèrica és la de Schwarzchild,

$$g = \left(\frac{1}{1-\frac{k}{r}}\right) dr^2 + r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\theta^2) - c^2\left(1 - \frac{k}{r}\right) dt^2,$$

amb $k = 2Gm/c^2$, on m és la massa de l'estrella i G és la constant de gravitació de Newton (r, φ i θ són coordenades esfèriques de $\mathbb{R}^3$, amb φ designant la colatitud i θ la longitud). Quan $m = 0$, l'expressió anterior coincideix amb la mètrica de Minkowski. Sigui $h = g - \eta$. Les úniques components no nul·les de h són les següents: $h_{rr} = \frac{k}{k-r}$ i $h_{tt} = \frac{c^2 k}{r}$. Si ens cenyim a la teoria linealitzada i no pas a la de les solucions exactes, tenim

$$h_{rr} = \frac{k}{k-r} = \frac{k/r}{k/r - 1} = -\frac{k}{r}\frac{1}{1-k/r} \approx -\frac{k}{r}\left(1 + \frac{k}{r}\right) \approx -\frac{k}{r}, \quad h_{tt} = \frac{c^2 k}{r}.$$

Es pot veure que l'operador de d'Alembert $\Box$ en les coordenades (r, φ, θ, t) s'expressa

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{cotan}\varphi}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Les nostres $h_{\alpha\beta}$ no nul·les només depenen de r i són, llevat d'una constant multiplicativa, el potencial clàssic $1/r$. Compleixen $\Box h_{\alpha\beta} = \Delta h_{\alpha\beta} = 0$.

9 Ones gravitacionals monocromàtiques, planes

Les ones que ens arriben procedents d'alguna estrella llunyana podem considerar que són ones planes. Per tant, tenint present l'exemple de la subsecció 1.1, estudiarem ones de la forma

$$h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i(k_1x^1+k_2x^2+k_3x^3-\omega t)}), \tag{29}$$

on $A_{\alpha\beta}$ són constants reals que formen una matriu simètrica i $\mathrm{Re}(\quad)$ designa la part real del que hi ha entre parèntesis. D'ara endavant, per comoditat, ometrem l'escriptura de $\mathrm{Re}(\quad)$ i la sobreentendrem. Les ones h de la forma (29) no són pas totes les que compleixen l'equació d'Einstein aproximada (en el buit), però sí que qualsevol solució no estàtica d'aquesta equació pot ser expressada per superposició de Fourier d'ones de la forma (29).

En l'expressió (29) s'utilitzen les coordenades (x^1,x^2,x^3,t) de l'espai de Minkowski, en les quals la mètrica s'expressa com $\mathrm{diag}[1,1,1,-c^2]$. Posem $x^4=ct$ i usem les coordenades (x^1,x^2,x^3,x^4) en les quals la mètrica té l'expressió $\mathrm{diag}[1,1,1,-1]$. Com que $t = x^4/c$, si posem $k_4 = -\omega/c$, l'ona (29) s'expressarà per

$$h_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}\,\mathrm{e}^{k_\nu x^\nu}, \tag{30}$$

on hem omès $\mathrm{Re}(\quad)$ perquè ho sobreentenem.

No cal dir que a l'espai de Minkowski identifiquem 1-formes i vectors a través de la mètrica i que k pensada com 1-forma té components (k_ν) amb $k_4 = -\omega/c$, mentre que la mateixa k pensada com a vector té components (k^ν) amb $k^4 = \omega/c$.

És immediat veure que la condició que les $h_{\alpha\beta}$ de (30) compleixin $\Box h_{\alpha\beta} = 0$ equival al fet que k compleixi $k_\lambda^\lambda = 0$ (o sigui, $\eta(k,k) = 0$, pensant k com a vector). També és immediat veure que la condició $\mathrm{div}\, h = \frac{1}{2} d\,\mathrm{tr}\, h$ equival al fet que la matriu $A = (A_{\alpha\beta})$ compleixi $A_{\mu\beta}k^\mu = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\, A)k_\beta$. Per tant, s'haurà de complir

$$k_\lambda k^\lambda = 0, \quad A_{\mu\beta}k^\mu = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\, A)k_\beta. \tag{31}$$

Analitzem la primera d'aquestes dues condicions. Recordem que a la subsecció 1.1 definíem el vector d'ona com el vector $\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$ donat per $\vec{k} = (\omega/v)\vec{n}$, on $\vec{n}$ era el vector unitari en la direcció de propagació de l'ona. D'aquí es desprèn que la norma de $\vec{k}$ compleix $|\vec{k}| = \omega/v$. En aquesta secció hem afegit, però, una quarta component a k i l'hem considerat com un vector de l'espai de Minkowski. Recordem que $k^4 = \omega/c$ i $k_4 = -\omega/c$. Així, doncs, tindrem $k_\lambda k^\lambda = k_ik^i + k_4k^4$ (l'índex i varia d'1 a 3). Per tant, $k_\lambda k^\lambda = (\omega/v)^2 - (\omega/c)^2$. Veiem, doncs, que la condició $k_\lambda k^\lambda = 0$ equival a dir que la velocitat de propagació v de l'ona sigui igual a la de la llum c.

10 Polaritzacions de les ones gravitatòries planes

De les dues condicions de (31), la primera es compleix sempre que la velocitat de propagació de l'ona (30) sigui la de la llum. La segona igualtat de (31) ens dóna quatre condicions (una per a cada β) que relacionen els elements de la matriu A. Com que la matriu A és simètrica, en el cas genèric tindrà 10 elements diferents. Si aquests 10 elements estan relacionats per 4 equacions (segona condició de (31)), en quedaran 6 d'independents. És a dir, en el cas genèric, la matriu A tindrà 6 elements independents i els altres seran determinats per (31).

Veurem a continuació, però, que podem trobar un difeomorfisme infinitesimal ζ convenient de $\mathbb{R}^4$ tal que la h_ζ corresponent sigui de la forma

$$(h_\zeta)_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} \mathrm{e}^{k_\nu x^\nu} \tag{32}$$

de manera que la matriu B compleixi les mateixes condicions que complia A, però tingui només 2 elements independents en comptes de 6. Amb aquest propòsit considerem un camp vectorial ζ de $\mathbb{R}^4$ de la forma

$$\zeta^\alpha = \mathrm{Re}(P^\alpha \mathrm{e}^{k_\nu x^\nu}), \tag{33}$$

amb els P^α números complexos a determinar. Com sempre, d'ara endavant ometrem Re( ) en els càlculs. En virtut de la proposició 9, la h_ζ relativa a aquest camp ζ estarà relacionada amb la h que teníem per mitjà de

$$(h_\zeta)_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \zeta_\beta - \nabla_\beta \zeta_\alpha.$$

Substituint aquí les $(h_\zeta)_{\alpha\beta}$, les $h_{\alpha\beta}$ i les ζ_α pels seus valors donats a (32), (30) i (33) i operant, s'obté:

$$B_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - ik_\alpha P_\beta - ik_\beta P_\alpha. \tag{34}$$

Aquesta fórmula relaciona les matrius $A = (A_{\alpha\beta})$ i $B = (B_{\alpha\beta})$, i a partir d'ella es veu fàcilment que si la matriu A complia (31), la matriu B compleix automàticament les mateixes relacions, és a dir, $B_{\mu\beta}k^\mu = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\, B)k_\beta$, independentment dels valors que prenguin les P_α que encara no hem fixat.

Fixat un vector temporal u de l'espai de Minkowski, podem escollir els valors de les quatre P_α de manera que es compleixin les quatre relacions $B_{\alpha\beta}u^\beta = 0$. Això es fa imposant

$$(A_{\alpha\beta} - ik_\alpha P_\beta - ik_\beta P_\alpha)u^\beta = 0.$$

Es determinen les quatre P_α en funció de les $A_{\alpha\beta}$ a partir de les quatre equacions anteriors. En resum, la matriu B que finalment obtindrem complirà d'una banda les quatre relacions $B_{\mu\beta}k^\mu = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\, B)k_\beta$ i les quatre relacions $B_{\alpha\beta}u^\beta = 0$. Com que la norma del vector temporal u escollit no influeix en la condició $B_{\alpha\beta}u^\beta = 0$ que hem imposat, suposarem que u té norma ic. Si, per fixar les idees, escollim una base de l'espai de Minkowski que tingui u com a quart element, $u = (0, 0, 0, 1)$, la condició $B_{\alpha\beta}u^\beta = 0$ s'escriu $B_{\alpha 4} = 0$.

En resum, la matriu B que finalment obtinguem a partir de (34) complirà d'una banda les quatre relacions $B_{\mu\beta}k^\mu = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\, B)k_\beta$ i de l'altra, les quatre relacions $B_{\alpha 4} = 0$ que hem imposat. En total, 8 relacions per a 10 de les components de B. Per tant, només n'hi haurà 2 d'independents.

A més, aquesta matriu B tindrà traça nul·la. En efecte, fent $\beta = 4$ a les relacions $B_{\mu\beta}k^{\mu} = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} B)k_{\beta}$, com que els $B_{\mu 4}$ són nuls, ens queda $(\operatorname{tr} B)k_4 = 0$ i, com que $k_4 \neq 0$, la traça de B s'ha d'anul·lar.

Suposem que prenem els tres eixos de $\mathbb{R}^3$ de manera que l'ona gravitatòria (32) que ens arriba segueix la direcció de l'eix de les z negatives (ens arriben de dalt del cel!). Aleshores el vector d'ona de $\mathbb{R}^3$ serà $k = (0, 0, -\omega/c)$ i les components k^{α} del vector d'ona de l'espai de Minkowski seran $(0, 0, -\omega/c, \omega/c)$. Així, la relació $B_{\mu 1}k^{\mu} = 0$ ens dóna $B_{31} = 0$, la relació $B_{\mu 2}k^{\mu} = 0$ ens dóna $B_{32} = 0$ i la relació $B_{\mu 3}k^{\mu} = 0$ ens dóna $B_{33} = 0$. Com que la traça ha de ser nul·la, la matriu B adopta la forma següent:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 \\ B_{12} & -B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Considerem les dues matrius següents:

$$A_{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Òbviament, la matriu B s'expressa com a combinació lineal d'aquestes dues. Per tant, tota ona gravitatòria plana de la forma (32) que ens arriba a nosaltres en la direcció de les z negatives és combinació lineal de $h_{+} = A_{+}\cos(\omega(\frac{z}{c} + t))$ i de $h_{\times} = A_{\times}\cos(\omega(\frac{z}{c} + t))$, que s'anomenen *ones gravitatòries polaritzades*. Com que l'origen de temps és arbitrari, canviant t per $t + t_0$ a $\omega(\frac{z}{c} + t)$ ens queda de la forma $\omega(\frac{z}{c} + t) + \zeta$, on ζ indica la fase. Per tant, l'expressió més general seria $h_{+} = A_{+}\cos(\omega(\frac{z}{c} + t) + \zeta)$, $h_{\times} = A_{\times}\cos(\omega(\frac{z}{c} + t) + \zeta)$.

Observeu que, com que la tercera fila de les matrius anteriors és nul·la, les ones no tenen component en z i són, per tant, transverses a la direcció de propagació. Aclarim que els símbols $+$ i $\times$ de h_{+} i $h_{\times}$ no tenen cap relació amb cap suma ni producte, sinó que indiquen «en creu» i «en aspa», denominació que quedarà justificada més endavant. La *gauge* determinada de manera que l'ona que ens arriba en la direcció de l'eix de les z tingui la forma (35) rep el nom anglès de *Transverse Traceless Lorentz gauge*, abreujadament, *TT-gauge*, i nosaltres en direm *referència TT*.

11 Efectes d'una ona gravitatòria sobre partícules lliures

Suposem una partícula en una regió lliure de camps gravitatoris. La seva vida serà descrita per una recta de l'espai de Minkowski de vector director temporal u. Quan arriba una ona en la direcció de l'eix de les z, ona formada per la superposició d'ones monocromàtiques de la forma (29), elegim la referència TT de manera que el vector u que ens servia per fixar les quatre P_{α} sigui el vector u de la vida d'aquesta partícula, i elegim llavors la base de l'espai de Minkowski de manera que u sigui el quart element de la base. La vida de les partícules lliures serà descrita per geodèsiques $\gamma(\tau)$ les components de les quals compliran les equacions de les geodèsiques

$$\frac{d^2\gamma^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{d\gamma^\alpha}{d\tau}\frac{d\gamma^\beta}{d\tau}. \tag{36}$$

Veurem ara que en la referència TT els símbols de Christoffel Γ^λ_{44} són nuls. En efecte,

$$\Gamma^\lambda_{44} \approx \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu}(\partial_4 h_{\mu 4} + \partial_4 h_{4\mu} - \partial_\mu h_{44}). \tag{37}$$

Però, en virtut de la forma (35) de les amplituds de les $h_{\alpha\beta}$, totes les $h_{\alpha 4}$ són nul·les. Aleshores, de (37) se segueix que $\Gamma^\lambda_{44} = 0$.

La vida de la partícula que considerem, abans que l'ona hi arribés, era representada per una recta vertical $\gamma(\tau) = (x_0, y_0, z_0, \tau)$ de l'espai de Minkowski, amb x_0, y_0, z_0 constants. Quan arriba l'ona, la mètrica de l'espai canvia i passa a ser $\eta + h$. Però com que els símbols de Christoffel Γ^λ_{44} de la nova mètrica s'anul·len, la mateixa corba $\gamma(\tau) = (x_0, y_0, z_0, \tau)$ compleix les equacions (36) i és una geodèsica de la nova mètrica. Per tant, segueix en caiguda lliure i no nota cap acceleració. Això no és gens estrany ja que qualsevol partícula en caiguda lliure segueix en caiguda lliure quan canvia el camp gravitatori. El que aquí pot sorprendre és el fet que la descripció en coordenades de la vida $\gamma(\tau)$ de la partícula sigui exactament la mateixa.

Com que la mètrica ha canviat en arribar l'ona, l'única manera que té un observador intel·ligent que viatgi amb la partícula d'adonar-se de la presència de l'ona és mesurant la posició de partícules pròximes. L'observador atribuirà a les partícules pròximes una acceleració donada pel teorema 8 de la secció 4. Segons aquest teorema, l'acceleració que l'observador atribuirà a una partícula pròxima de vector posició ξ serà $R(\dot\gamma, \xi)\dot\gamma$. Designem per a^i les tres components d'aquest vector acceleració. Tindrem

$$a^i = \xi^j R^i_{4j4}. \tag{38}$$

Per aplicar aquesta fórmula ens cal calcular les components del tensor de curvatura de la mètrica $\eta + h$ en la referència TT. La fórmula (10) aplicada a la mètrica $\eta + h$ ens dóna

$$\begin{aligned} R^\rho_{4\mu 4} \approx \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\nabla_\mu\nabla_4 h_{4\lambda} - \nabla_4\nabla_\mu h_{4\lambda} + \nabla_\mu\nabla_4 h_{\lambda 4} - {}&\\ - \nabla_\mu\nabla_\lambda h_{44} + \nabla_4\nabla_\lambda h_{4\mu} - \nabla_4\nabla_4 h_{\lambda\mu}).& \end{aligned} \tag{39}$$

Les components de derivades covariants que apareixen en aquesta fórmula (per exemple, $\nabla_4 h_{4\lambda}$) s'expressen com a derivades ordinàries ($\partial_4 h_{4\lambda}$) més termes on apareixen productes de símbols de Christoffel per $h_{\lambda\mu}$. Com que els símbols de Christoffel s'expressen en funció de les $h_{\lambda\mu}$, aquests termes contindran dues $h_{\lambda\mu}$ i en el context de l'aproximació lineal que fem són negligibles. Per tant, les derivades covariants que apareixen a (39) podem considerar que són derivades ordinàries. D'altra banda, en la referència TT totes les $h_{4\lambda}$ són nul·les. Per tant, ens queda

$$R^{\rho}_{4\mu 4} \approx -\frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}\frac{\partial^2}{\partial t^2}h_{\lambda\mu}.$$

Tenint en compte que ξ és el vector posició de la partícula respecte a l'observador i que l'acceleració de la partícula respecte a l'observador és $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, la fórmula (38) ens quedarà (recordem que els índexs grecs varien d'1 a 4 i els llatins d'1 a 3):

$$a^i = \frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\frac{1}{2}\xi^j\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2}.$$

Tot i que ξ varia amb el temps, podem substituir amb tota tranquil·litat el vector ξ que apareix al segon membre de l'equació anterior pel valor ξ_0 que pren a l'instant $t = 0$ perquè tots els valors de ξ són molt propers a ξ_0. Ens queda, doncs,

$$a^i = \frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\frac{1}{2}\xi_0^j\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2}. \tag{40}$$

Aplicarem ara aquesta fórmula per veure com són les acceleracions de les partícules segons la posició que ocupen respecte a l'observador. Recordem que en la referència TT que usem se suposa que l'ona avança en la direcció de les z negatives (ve de dalt). Suposem que l'observador es troba a l'origen i que observa una partícula inicialment situada al punt $\xi_0 = (\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta, 0)$. Per simplificar-ho, suposem que l'ona que passa (monocromàtica) té polarització + (qualsevol ona és suma d'una ona amb polarització + i una altra amb polarització $\times$). Sigui H l'amplitud d'aquesta ona. Com hem vist a la secció 10, les components $h_{\alpha\beta}$ no nul·les d'aquesta ona (en el pla $z = 0$) són $h_{11} = H\cos(\omega t+\zeta)$, $h_{22} = -H\cos(\omega t+\zeta)$. Prenguem l'origen de temps de manera que la fase ζ de l'ona sigui $-\pi/2$, amb la qual cosa $h_{11} = H\sin\omega t = -h_{22}$. Tindrem $\frac{\partial^2 h_{11}}{\partial t^2} = -H\omega^2\sin\omega t$ i $\frac{\partial^2 h_{22}}{\partial t^2} = H\omega^2\sin\omega t$. D'acord amb (40), el vector acceleració serà

$$a = \frac{\varepsilon\omega^2 H\sin\omega t}{2}(\cos\theta, -\sin\theta, 0).$$

Els valors d'aquesta acceleració corresponents a $\theta = 0$ i $\theta = \pi$ (dues partícules inicialment en posicions oposades sobre l'eix de les x) són

$$a[0] = \frac{\varepsilon\omega^2 H\sin\omega t}{2}(1,0,0), \quad a[\pi] = \frac{\varepsilon\omega^2 H\sin\omega t}{2}(-1,0,0).$$

Constatem que sobre elles actuen forces oposades. I els valors corresponents a $\theta = \pi/2$ i $\theta = -\pi/2$ (partícules inicialment en posicions oposades sobre l'eix de les y) són

$$a[\pi/2] = \frac{\varepsilon\omega^2 H\sin\omega t}{2}(0,-1,0), \quad a[-\pi/2] = \frac{\varepsilon\omega^2 H\sin\omega t}{2}(0,1,0).$$

Sobre elles també actuen forces oposades, però amb sentit diferent de les de l'eix de les x (vegeu la figura 2).

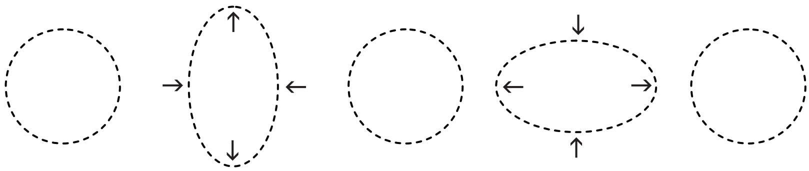

FIGURA 2

Si en comptes de treballar amb una ona de polarització + ho haguéssim fet amb una de polarització $\times$ hauríem arribat a conclusions similars sobre les partícules situades en posicions oposades sobre les rectes $y = x$ i $y = -x$.

Fins ara hem calculat l'acceleració que l'observador mesurarà d'una partícula situada inicialment en la posició $\xi_0 = (\varepsilon \cos\theta, \varepsilon \sin\theta, 0)$. Preocupem-nos ara, no de l'acceleració, sinó de la posició que l'observador mesurarà al llarg del temps. La integral general de (40) és

$$\xi^1 = -\frac{\varepsilon H}{2} \cos\theta \sin\omega t + k^1 t + C^1,$$

$$\xi^2 = \frac{\varepsilon H}{2} \sin\theta \sin\omega t + k^2 t + C^2,$$

amb k^1, k^2, C^1, C^2 constants d'integració. Les constants k^1 i k^2 hauran de ser nul·les per excloure moviments uniformes de la partícula respecte de l'observador, i les constants C^1, C^2 s'han d'escollir de manera que, per a $t = 0$, la posició de la partícula sigui ξ_0. Ens queda, finalment,

$$\xi = \left(\varepsilon \cos\theta - \frac{\varepsilon H}{2} \cos\theta \sin\omega t, \varepsilon \sin\theta + \frac{\varepsilon H}{2} \sin\theta \sin\omega t, 0\right). \qquad (41)$$

Com hem fet abans amb l'acceleració, explicitem aquest vector posició ξ per a dues partícules situades inicialment sobre l'eix de les x en posicions oposades (corresponents a $\theta = 0$ i $\theta = \pi$) i per a partícules en posicions oposades sobre l'eix de les y (corresponents a $\theta = \pi/2$ i $\theta = -\pi/2$). Tindrem:

$$\begin{aligned} \xi[0] &= \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon H}{2} \sin\omega t, 0, 0\right), \qquad \xi[\pi] = \left(-\varepsilon + \frac{\varepsilon H}{2} \sin\omega t, 0, 0\right), \\ \xi[\pi/2] &= \left(0, \varepsilon + \frac{\varepsilon H}{2} \sin\omega t, 0\right), \quad \xi[-\pi/2] = \left(0, -\varepsilon - \frac{\varepsilon H}{2} \sin\omega t, 0\right). \end{aligned} \qquad (42)$$

Com passava amb les acceleracions, veiem aquí també que les vibracions de les dues partícules sobre l'eix de les x i de les dues sobre l'eix de les y són oposades. Quan les primeres s'allunyen, les segones s'apropen i viceversa. Com hem dit abans, també, si en comptes de treballar amb una ona de polarització + ho haguéssim fet amb una de polarització × hauríem arribat a conclusions similars sobre les partícules situades en posicions oposades sobre les rectes $y = x$ i $y = -x$.

12 Aparells per detectar ones gravitacionals

Si bé al llarg dels cent anys d'història de la relativitat general s'han ideat diversos aparells per detectar ones gravitatòries, els que s'han imposat últimament són els basats en la mesura per interferometria dels canvis oscil·latoris produïts en la distància entre partícules situades en direccions perpendiculars, donats per (42).

Abans de descriure el seu funcionament recordem que vivim en una regió on els camps gravitatoris pròxims no produeixen ones gravitacionals. En efecte, hem dit a la secció 8 que els camps gravitatoris estàtics (que no depenen del temps) no produeixen ones. Per tant, el camp de la Terra (el més pròxim), considerat aïlladament, no produeix ones. El camp global del Sistema Solar sí que produeix ones en virtut del moviment dels planetes, però són d'una intensitat molt petita i d'una freqüència també molt petita. Quan més endavant comentem l'ona captada pels detectors de LIGO el 14 de setembre de 2015, analitzarem un senyal de mig segon de durada. Com que la variació de la posició dels diferents planetes del Sistema Solar en mig segon és pràcticament negligible, les ones gravitacionals produïdes per aquesta variació també ho són.

Dit això, passem a descriure el funcionament dels detectors d'ones basats en la interferometria. L'esquema d'aquests detectors està il·lustrat en la figura 3. Suposem que ens arriba una ona de polarització +. Suposem que el detector està orientat de manera que els eixos x, y de l'esquema de la figura 3 corresponguin als eixos x, y de la referència TT adaptada a l'ona (segons aquesta referència l'ona es propaga en la direcció de l'eix de les z). Fem entrar a l'aparell per A un raig làser de llum monocromàtica de longitud d'ona λ (en principi aquesta longitud d'ona λ pot ser arbitrària i no té res a veure amb l'ona gravitatòria). Aquest raig incideix en un prisma que actua com a separador del raig. Una meitat del raig és reflectida pel prisma (que actua com a mirall) i enviada al mirall M_1 i l'altra meitat del raig travessa el prisma i va cap al mirall M_2. Cada un dels dos raigs que han sortit del prisma separador és reflectit pel mirall corresponent (per M_1 o per M_2) i torna al prisma separador. Allà els dos raigs són enviats a un fotodetector B.

Abans de passar l'ona, la distància entre el prisma separador (que suposarem situat a l'origen de coordenades de la referència TT que hem pres) i cada un dels miralls M_1 i M_2 és L (la mateixa distància). Però aquestes distàncies oscil·len quan passa l'ona, i segons (42), quan l'una creix en ΔL l'altra decreix en la mateixa quantitat, de manera que quan els dos raigs que han seguit camins diferents tornen a retrobar-se en el prisma separador, arriben amb fases diferents i això és el que detecta el fotodetector B.

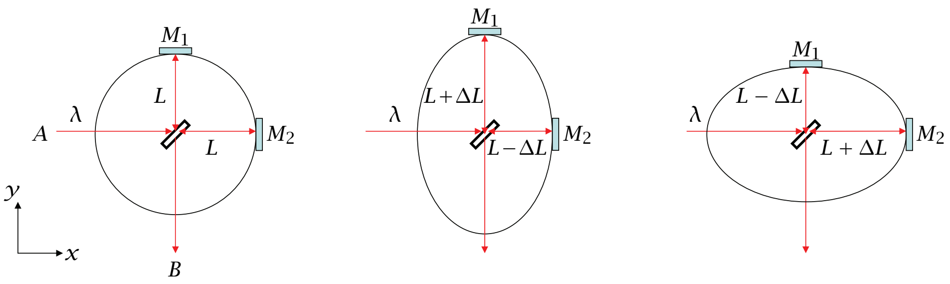

FIGURA 3

En la deducció de les fórmules (41) i (42) hem suposat que tant l'observador com la partícula de la qual aquest mesura la posició estan en *caiguda lliure*. Per tant, en el disseny de l'aparell anterior, tant el prisma separador com els miralls M_1 i M_2 haurien d'estar en caiguda lliure. Com que això és impossible de realitzar en un aparell terrestre, pensem per un moment què passaria si el prisma separador i els miralls M_1 i M_2 estiguessin penjats d'un fil (en comptes d'estar en caiguda lliure). Recordem que hem suposat, de moment, que els eixos x, y de l'esquema de la figura 3 corresponen als eixos x, y de la referència TT adaptada a l'ona, la qual es propaga en la direcció de l'eix de les z. Per tant, les variacions en la distància entre el separador i els miralls només es produeixen en el pla de les x, y, i no en la direcció vertical de l'eix de les z. Així doncs, si els miralls i el separador estiguessin penjats d'un fil (en comptes d'estar en caiguda lliure), com que el fil només anul·la el moviment d'aquests miralls en la direcció de l'eix de les z, la distància entre ells en passar l'ona seria la mateixa que si estiguessin en caiguda lliure. Naturalment, això que els miralls i el separador estiguin «penjats d'un fil» és una manera simplificada de dir *convenientment lliures*, sense estar subjectes a terra de forma sòlida.

Tot això que hem dit fa referència a una situació en què l'ona té polarització + i que, a més, l'aparell és orientat de tal manera que els eixos x, y d'aquest coincideixin amb els eixos x, y de la referència TT de l'ona (la qual viatja en la direcció de l'eix de les z). Però l'aparell és una construcció molt sofisticada amb els dos braços que uneixen el separador central amb els miralls M_1 i M_2 d'una longitud molt gran (en el LIGO són de 4 km) i no podem pas orientar l'aparell per adaptar-lo a cada ona particular que ens pugui arribar. En aquestes circumstàncies, mesurarà alguna cosa un detector com el que acabem de descriure?

Per veure-ho, continuem suposant de moment que l'ona viatja en la direcció de l'eix de les z, però suposem que els braços de l'aparell al final dels quals es troben els miralls M_1 i M_2 formen un angle θ amb els eixos x i y de la referència TT de l'ona, tal com indica la figura 4. La fórmula (41) ens donarà la posició del mirall M_2 al llarg del temps (la fórmula s'ha d'aplicar amb $\varepsilon = L$, distància abans del pas de l'ona entre M_2 i el prisma separador). Així, doncs, la posició de M_2 en el pla de les x i les y serà:

$$M_2 = L\left(\cos\theta\left(1 - \frac{H}{2}\sin\omega t\right), \sin\theta\left(1 + \frac{H}{2}\sin\omega t\right)\right).$$

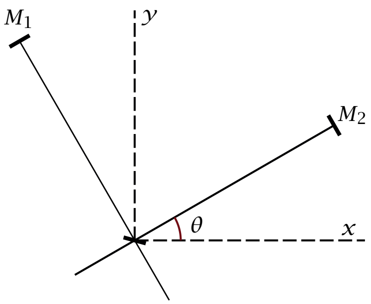

FIGURA 4

La distància de M_2 al prisma separador situat a l'origen és la norma del vector anterior, és a dir,

$$L\sqrt{1 - H\cos 2\theta\sin\omega t + \frac{H^2}{2}\sin^2\omega t}.$$

Tenint en compte que $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \cdots$, aquesta distància queda (tenint en compte que H és molt petit i es poden negligir els termes en H^2):

$$L\left(1 - \frac{H\cos 2\theta}{2}\sin\omega t\right).$$

Per tant, l'increment de longitud d'aquest braç, ΔL (diferència entre l'expressió anterior i L), serà $-L(H/2)\cos 2\theta\sin\omega t$. Si fem el mateix càlcul per al braç que conté el mirall M_1, obtindrem que l'increment ΔL d'aquest braç és $L(H/2)\cos 2\theta\sin\omega t$.

Fixem-nos que quan l'angle θ és de 45 graus, els increments dels dos braços són nuls i l'aparell no detecta res. Tot això, suposant que la polarització de l'ona és $+$. Ja hem dit que les ones amb polarització $\times$ es comporten anàlogament però amb un gir de 45 graus. Per tant, quan l'angle entre el braç de l'aparell que conté M_2 i l'eix de les x de la referència TT de l'ona és de 45 graus, l'aparell no detecta les ones amb polarització $+$, però sí que detecta (i amb amplitud màxima!) les de polarització $\times$. Com que normalment les ones que arriben tenen components en les dues polaritzacions, l'aparell sempre és capaç de detectar l'ona.

Tots aquests càlculs i raonaments els hem fet, però, suposant que l'ona ens arriba verticalment, en la direcció de l'eix de les z. Si no és així, les amplituds quedaran afectades pel cosinus de l'angle entre la direcció de propagació i la vertical. Per tant, com més s'aparti la direcció de l'ona de la vertical més feble serà el senyal captat.

13 L'esdeveniment astronòmic GW150914

Ja hem dit a la introducció que el 14 de setembre de 2015, a les 9:50:45 de temps universal, els dos detectors bessons de LIGO van captar un senyal d'unes dues dècimes de segon de durada, que després d'una anàlisi acurada s'ha atribuït a les ones gravitatòries produïdes per la fusió de dos forats negres situats a uns 410 Mpc de distància, és a dir, a uns 1340 milions d'anys llum. Aquell esdeveniment astronòmic ha rebut el nom científic de GW150914 i no va ser anunciat públicament fins al 14 de febrer de 2016, data en què va aparèixer publicat a la revista *Physical Review Letters* un article [3], signat per 1023 investigadors de LIGO i de VIRGO, que oferia informació científica de la descoberta. Paral·lelament altres articles van ser penjats a Internet, entre els quals [1] i [2]. També hem dit a la introducció que actualment hi ha al món diversos detectors d'ones gravitatòries, els més sensibles dels quals són els dos bessons de LIGO, un a Livingston (Louisiana) i l'altre a Hanford (Washington), i VIRGO, a Itàlia, però justament el dia de la detecció del senyal GW150914 l'aparell de VIRGO estava fora de servei per treballs de posada al dia, de manera que només va poder ser captat pels detectors de LIGO.

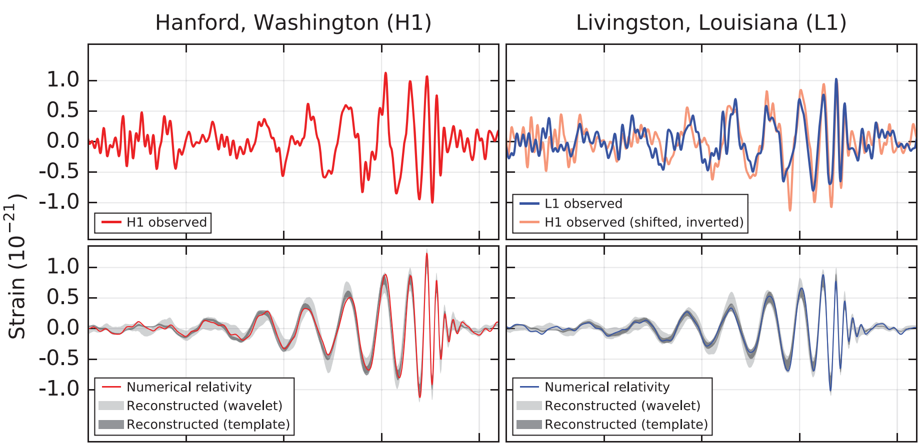

FIGURA 5

El senyal en qüestió està representat en les gràfiques de la figura 5. Les unitats marcades a l'eix d'abscisses corresponen a 0.30, 0.35, 0.40 i 0.45 segons, i les unitats marcades a l'eix d'ordenades corresponen a l'amplitud de l'ona; d'elles en parlarem després més extensament. Les dues gràfiques de dalt (de la figura 5) són pròpiament els senyals captats pels dos observatoris, mentre que les dues gràfiques de baix corresponen a simulacions teòriques.

En aquest article hem explicat bastant detalladament la naturalesa de les ones gravitatòries que ens arriben a nosaltres (que vivim en una regió de l'Univers lliure de camps gravitacionals intensos), però no hem tractat en absolut la manera com les ones són produïdes en regions llunyanes. I això és fonamental per saber quin tipus de senyals esperem detectar. Un tipus d'ona molt estudiat des del punt de vista teòric és el produït per parells d'estrelles que giren l'una entorn de l'altra a grans velocitats. Aquests sistemes poden romandre estacionaris durant temps i poden acabar amb un col·lapse i fusió de les dues estrelles. Les dues estrelles que orbiten l'una entorn de l'altra poden ser forats negres quan les densitats de massa són molt grans. Justament en les dues gràfiques de baix de la figura 5 es mostren les simulacions teòriques que més s'adiuen amb les gràfiques reals observades, i aquestes simulacions corresponen a la fusió de dos forats negres. La freqüència del senyal és justament la que indica la massa de les estrelles que es fusionen i l'amplitud del senyal és la que ens permet estimar la distància nostra a les estrelles.

Observeu que en els articles científics sobre aquest esdeveniment s'ofereixen dades bastant precises sobre la massa estimada dels dos forats negres que col·lideixen i sobre la seva distància a nosaltres, però es parla de manera molt imprecisa de la seva localització. No es pot concretar de cap manera a quina galàxia corresponen. Això és degut al fet que els detectors no poden precisar la direcció dels raigs que reben. Hem vist a la secció 12 que l'amplitud del senyal és afectada pel cosinus de l'angle entre la direcció de propagació de l'ona i la vertical. Si una ona és detectada en diversos llocs de la Terra, coneixent els temps d'arribada del senyal als diferents indrets i les amplituds d'aquests senyals es podria determinar la direcció de propagació. Però com que l'ona de la qual parlem només va ser detectada per dos observatoris separats per 3030 km, això és molt difícil. L'única dada certa sobre això és que el senyal va arribar a Livingston 10 mil·lisegons abans que a Hanford. Tot i la dificultat d'establir la direcció de l'ona en aquestes condicions, els científics de LIGO situen la seva font en una zona concreta d'uns 600 graus quadrats de l'hemisferi sud celeste.

Hem deixat per al final el tema de les unitats de l'eix d'ordenades de les gràfiques de la figura 5, perquè és el que més pot donar idea de l'enorme dificultat tecnològica de la detecció d'aquestes ones. Aquestes unitats mesuren el quocient $\Delta L/L$ entre la variació de longitud dels braços de l'interferòmetre en passar l'ona i la longitud inicial. Es tracta, doncs, d'una magnitud sense dimensió (longitud dividit per longitud). En les gràfiques de la figura 5, les unitats de l'eix d'ordenades van afectades del factor 10^{-21}. Comentem això una mica:

La unitat astronòmica (au) és la distància mitjana de la Terra al Sol i val aproximadament $1.495\,98 \times 10^{14}$ mil·límetres. O sigui que apreciar un mil·límetre en la distància de la Terra al Sol seria de l'ordre de 10^{-14}. I nosaltres estem parlant de 10^{-21}. Això representa apreciar un mil·límetre en una distància 6 600 000 vegades més gran que la distància de la Terra al Sol! Val a dir, però, que l'aparell no cal que mesuri la longitud L dels braços amb tantíssima precisió (cosa absolutament impossible), sinó que el que ha de detectar són les variacions ΔL d'aquesta longitud.

Referències

[1] Abbot, B. P. [*et al.*] (LIGO Scientific Collaboration and VIRGO Collaboration). «Observing gravitational-wave transient GW150914 with minimal assumptions». `https://dcc.ligo.org/public/0122/P1500229/031/GW150914_burst.pdf`.

[2] Abbot, B. P. [*et al.*] (LIGO Scientific Collaboration and VIRGO Collaboration). «Properties of the binary black hole merger GW150914». *Phys. Rev. Lett.*, 116, 241102 (2016). `https://dcc.ligo.org/public/0122/P1500218/014/PhysRevLett.116.241102.pdf`.

[3] Abbot, B. P. [*et al.*] (LIGO Scientific Collaboration and VIRGO Collaboration). «Observation of gravitational waves from binary black hole merger». *Phys. Rev. Lett.*, 116, 061102 (2016). `https://dcc.ligo.org/public/0122/P150914/014/LIGO-P150914_Detection_of_GW150914.pdf`.

[4] Berti, E. «Viewpoint: The first sounds of merging black holes». *Physics*, 9, 17 (February 11, 2016). `https://physics.aps.org/articles/v9/17`.

[5] Einstein, A. «Zur Elektrodynamik bewegter Körper». *Ann. der Phys. (4)*, 17 (1905), 891–921.

[6] Einstein, A. «Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhänging?» *Ann. der Phys. (4)*, 18 (1905), 639–641.

[7] Einstein, A. «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie». *Ann. der Phys. (4)*, 49 (1916), 769–822.

[8] Einstein, A. «Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation». *Berl. Ber.*, 1916 (1916), 688–696.

[9] Einstein, A. «Über Gravitationswellen». *Berl. Ber.*, 1918 (1918), 154–167.

[10] Girbau, J. «Relatividad: un curso acelerado». *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 2 (2) (1999), 237–262.

[11] Girbau, J.; Bruna, L. *Stability by linearization of Einstein's field equation*. Basilea: Birkhäuser Verlag, 2010. (Progress in Mathematical Physics; 58)

[12] Minkowski, H. «Raum und Zeit». *Physikalische Zeitschrift*, 10 (1909), 104–111. [Conferència donada a la vuitantena reunió de científics naturals i metges alemanys, a Colònia, el 21 de setembre de 1908]

[13] Schutz, B. F. *A first course in general relativity*. 2a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[14] Stephani, H. *General relativity. An introduction to the theory of the gravitational field*. Cambridge; Nova York: Cambridge University Press, 1982.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Institut d'Estudis Catalans
girbau@mat.uab.cat