Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 31, núm. 2, 2016. Pàg. 99–120. DOI: 10.2436/20.2002.01.68

Hi havia una vegada un punt fix…

Natàlia Castellana

Dedicat a la Laia, que m'ensenya cada dia a (ad)mirar les coses amb senzillesa.

Resum: Un dels resultats clàssics que trobem en la majoria de llibres de topologia algebraica és el teorema del punt fix de Brouwer, que utilitza tècniques d'espais recobridors, càlcul de grup fonamental i grups d'homologia. En aquest article presentarem una demostració basada en un lema de combinatòria topològica, el lema de Sperner, que fa accessible la demostració sense el coneixement de les tècniques abans mencionades.

Paraules clau: topologia algebraica, combinatòria, punt fix.

Classificació MSC2010: 55M20, 91A06.

1 Introducció

Un dels resultats clàssics que trobem en la majoria de llibres on es fa una introducció a la topologia algebraica és el teorema del punt fix de Brouwer (1912), que ens diu que tota aplicació contínua f de la bola de dimensió n, B^n, en sí mateixa té almenys un punt fix (és a dir, existeix $x \in B^n$ tal que $f(x) = x$).

Teorema del punt fix de Brouwer (1912). *Sigui B^n una bola de dimensió n. Tota aplicació contínua $f\colon B^n \to B^n$ té almenys un punt $x \in B^n$ tal que $f(x) = x$.*

Brouwer [2] demostra el resultat per a boles n-dimensionals utilitzant la noció de grau d'una aplicació contínua. En dimensió 2, aquest resultat apareix en molts llibres de text com una conseqüència del càlcul del grup fonamental del cercle S^1 i del fet que aquest grup no és trivial. En dimensions superiors s'usen altres eines de topologia algebraica com els grups d'homologia singular. Aquest resultat és equivalent al fet que les esferes no són contràctils.

Aquest article es basa en la lliçó inaugural del curs acadèmic 2015–2016 dels graus de matemàtiques, física i matemàtiques, estadística aplicada i estadística aplicada i sociologia de la Universitat Autònoma de Barcelona, impartida per l'autora.

Des d'un punt de vista més distès, aquest és un resultat que es pot explicar tot prenent una tassa de cafè. Si la taula té estovalles, penseu que cada punt de la superfície de la taula s'identifica amb un punt de les estovalles que té a sobre. Tot seguit, agafeu les estovalles, gireu-les, arrugueu-les..., i de qualsevol manera torneu-les a deixar a sobre de la taula (sobre tota o part de la superfície que ocupaven abans); aleshores hi ha almenys un punt de les estovalles que torna a estar en la vertical de la posició que ocupava abans. I si la taula no té estovalles? Fixeu-vos en la tassa de cafè. De manera informal, cada partícula de cafè ocupa una posició a l'interior de la tassa. Tot seguit remeneu el contingut de la manera que vulgueu (en un sentit, en l'altre, fent vuits...) i, quan el cafè torni a quedar quiet, afirmem que almenys una partícula està ocupant la mateixa posició que ocupava abans de remenar.

Donant una ullada al llibre *Introduction to Topology* [7], escrit per Solomon Lefschetz, veiem en l'índex que el teorema del punt fix de Brouwer per a la bola de dimensió n apareix demostrat molt abans del capítol en què s'introdueix el grup fonamental. Tot just s'han introduït els complexos simplicials. Si anem a la pàgina 117 d'aquest llibre, hi trobem el teorema 6.1, que es justifica de la manera següent:

> (6.1) Theorem. *Every mapping of the closed n-cell (= n-disk) into itself has a fixed point (Brouwer).*
>
> The proof merely requires the Sperner lemma in the form (5.5) and the existence of subdivisions of arbritarialy small mesh.

Atenció, només ens calen dos ingredients: el lema de Sperner i el procés de subdivisió baricèntrica. Molts segurament ja coneixeu el procés de subdivisió baricèntrica; així doncs, començarem la nostra aventura amb el lema de Sperner.

Les primeres quatre seccions estan dedicades a explicar la demostració d'aquest lema i, també, alguna de les aplicacions a problemes de repartiment just de béns. Per a la darrera secció tornarem a agafar el llibre de Lefschetz per la pàgina 134, on comença la secció dedicada a un altre dels teoremes clàssics en topologia algebraica: el teorema de Borsuk-Ulam. Com podem explicar aquest resultat prenent el sol a la platja? Agafem una pilota de platja inflada i aparellem tots els seus punts antipodals. Ara, la desinflem i la deformem de la manera que ens sembli. Tot seguit la posem a terra de qualsevol manera. Aleshores afirmem que almenys hi ha una parella de punts antipodals en la mateixa vertical.

Teorema de Borsuk-Ulam. *Sigui $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicació contínua. Aleshores existeix $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

El primer paràgraf de la secció IV.7 de [7] diu:

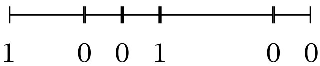
> The material in the present section has been communicated to the author by A. W. Tucker. A certain algebraic lemma resembling Sperner's lemma is first established and various known theorems are then deduced from the lemma.

Explicarem breument com es pot escriure una història paral·lela a partir del lema de Tucker amb uns actors diferents.

2 El lema de Sperner

El lema de Sperner és un lema de combinatòria topològica sobre subdivisions de símplexs. Comencem explicant què diu aquest lema en els casos de dimensió 1 i 2.

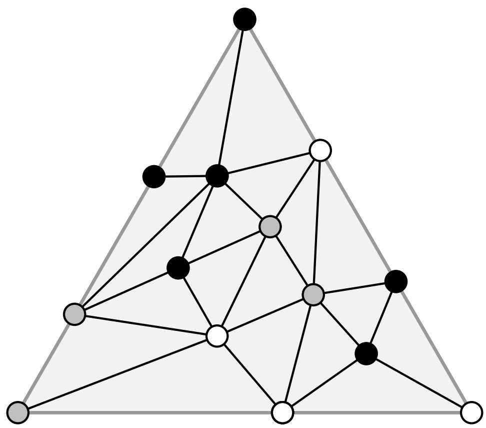
Sigui I l'interval $[0,1]$. El subdividim en n subintervals amb els punts $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < 1 = x_n$. Ara etiquetem els vèrtexs x_i, $i = 0,\ldots,n$, amb 0 o 1 amb l'única condició que els extrems, $\{0,1\} \in I$, tinguin etiquetes diferents. Direm que un subinterval és de tipus (a,b) si els seus extrems estan etiquetats amb a en un vèrtex i b en l'altre. Aleshores hi ha un nombre senar de subintervals de tipus $(0,1)$. Per què?



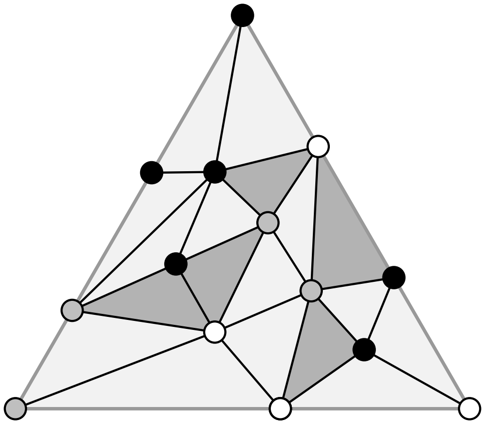
Per a cada subinterval comptem quants zeros té en els seus extrems i fem la suma sobre tots els intervals. Aquesta suma total és igual al nombre de subintervals de tipus $(0,1)$ més dues vegades la suma de subintervals de tipus $(0,0)$. Per tant, si provem que aquest nombre és senar ja haurem acabat. Ara bé, fixeu-vos que aquest nombre és també igual al doble de vèrtexs interiors amb etiqueta 0 més 1 (el que correspon a l'extrem amb etiqueta 0). Per tant, aquesta suma és senar i ja ho tenim.

Ara, vegem com es podria generalitzar aquesta situació a dimensió 2. Sigui T un triangle amb una subdivisió del seu interior en regions també triangulars (dues regions tenen intersecció o bé buida, o bé en una aresta sencera o bé en un vèrtex) .

Els vèrtexs d'aquesta subdivisió estan etiquetats amb elements del conjunt $\{0,1,2\}$, però de manera que se satisfan dues condicions. La primera és que els vèrtexs principals del triangle T tenen etiquetes diferents, i la segona és que l'etiqueta corresponent a un vèrtex situat en una de les arestes de T només pot tenir una de les dues etiquetes que apareixen en els vèrtexs situats a la vora de l'aresta.



Aleshores el lema de Sperner ens dirà que almenys hi ha un triangle de la subdivisió que té els vèrtexs etiquetats usant tots tres elements del conjunt $\{0, 1, 2\}$ i, de fet, n'hi ha un nombre senar.



Es pot provar fàcilment. Presentarem dues demostracions: una en què només es mostra l'existència d'aquests triangles i una altra de més constructiva.

La primera demostració es basa en un argument combinatori com en el cas del segment que hem vist abans. Direm que un triangle és de tipus (a, b, c) si els seus vèrtexs tenen les tres etiquetes $\{a, b, c\}$. Considerem ara les quantitats següents:

1. Q és el nombre de triangles de tipus $(0, 0, 1)$ o $(0, 1, 1)$.
2. R és el nombre de triangles de tipus $(0, 1, 2)$.
3. X és el nombre d'arestes de tipus $(0, 1)$ situades a la vora de T.
4. Y és el nombre d'arestes de tipus $(0, 1)$ interiors a T.

Aleshores podem comptar el nombre total d'arestes de tipus $(0, 1)$, un cop desmuntat el triangle, de dues maneres: a través de les arestes o a través dels triangles. Obtenim la igualtat següent:

$$2Q + R = 2Y + X.$$

Només hi ha arestes exteriors tipus $(0, 1)$ en un dels costats del triangle T, aquell costat tal que els seus vèrtexs tenen etiquetes 0 i 1. Si ens fixem, doncs, en aquesta aresta, tenim un segment subdividit i etiquetat de manera que els extrems tenen valors diferents. Aquest és el cas en dimensió 1 que tot just acabem de demostrar. Observem, doncs, que X és senar. Per tant, també $2Q + R$ és un número senar i, en particular, R és senar. Així, hi ha un nombre senar de triangles tipus $(0, 1, 2)$. En concret, almenys n'hi ha un.

La segona demostració s'explica amb una història i té un caràcter constructiu. Imagineu que el triangle amb la subdivisió és la planta d'un laberint d'habitacions triangulars de manera que només hi ha portes a les parets tipus $(0, 1)$. Ja sabem que només hi ha portes d'entrada en un dels costats del triangle, i a més n'hi ha un nombre senar. Dins del laberint hi ha tres tipus d'habitacions: sense portes en cap de les seves parets (mai no hi podrem accedir), amb dues portes i amb una sola porta. Les habitacions amb una sola porta són el nostre objectiu: les del tipus $(0,1,2)$.

Què hem de fer per arribar a una habitació de tipus $(0,1,2)$? Entrem al laberint per una porta exterior (n'hi ha un nombre senar) i ens fiquem en la primera habitació. Només tenim dues opcions: ja hem trobat l'habitació que buscàvem de tipus $(0,1,2)$ perquè només té una porta, o bé té dues portes. En el segon cas travessem la porta que no hem utilitzat i entrem en una nova habitació, i aquí podem repetir l'argumentació anterior. Com que hi ha un nombre finit d'habitacions, o bé acabarem el camí en una de tipus $(0,1,2)$, o bé aquest camí ens portarà cap a l'exterior un altre cop. Si sortim a l'exterior, segur que podem tornar a entrar per una porta que no hàgim utilitzat abans, ja que, com sabem, n'hi ha un nombre senar. Així que tard o d'hora trobarem una habitació de tipus $(0,1,2)$. Fixeu-vos que hem descrit un algorisme per trobar almenys un triangle tipus $(0,1,2)$. Podem afirmar que n'hi ha un nombre senar? De les que són accessibles des de l'exterior, sí que podem dir que n'hi ha un nombre senar. Però hi pot haver habitacions de tipus $(0,1,2)$ interiors a les quals no accedim amb aquest mètode. Bé, però fixeu-vos que han d'anar aparellades perquè si comencéssim el recorregut en una d'elles, a la força hauríem d'acabar en una altra del mateix tipus.

Noteu que en les dues demostracions hem provat el següent: donat un polígon amb una triangulació a la qual s'han assignat etiquetes $\{0,1,2\}$ als vèrtexs, el nombre de triangles de tipus $(0,1,2)$ és congruent amb el nombre d'arestes de tipus $(0,1)$ (amb multiplicitat) mòdul 2. La condició sobre les etiquetes a la vora només ens assegura que aquests nombres són senars.

Ara que ja tenim una mica d'intuïció sobre el que serà el lema de Sperner, introduirem els conceptes necessaris per enunciar-lo en general.

Definició 1. Donats $n+1$ punts independents de manera afí a $\mathbb{R}^m$ amb $m \geq n$, $\{p_0, \dots, p_n\}$, un *n-símplex* Δ és l'embolcall convex d'aquest conjunt de punts. Cada subconjunt finit de $k+1$ elements de $\{p_0, \dots, p_n\}$ determina un subsímplex de dimensió k que s'anomena una k-cara de Δ.

En particular, cada $x \in \Delta$ es pot expressar com una combinació lineal d'aquests punts $x = \sum \alpha_i p_i$, on $\sum \alpha_i = 1$ i $\alpha_i \geq 0$ per a cada i. Els coeficients α_i són les coordenades baricèntriques corresponents al punt $x \in \Delta$, $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Una propietat dels símplexs que farem servir més endavant és el fet que són tancats i acotats dins $\mathbb{R}^n$ per a algun n, i per tant són compactes.

Definició 2. Una *triangulació* d'un n-símplex Δ és una col·lecció finita de n-símplexs tals que la seva unió és Δ, amb la propietat que si dos d'aquests símplexs s'intersequen, aleshores ho fan en una cara sencera comuna a tots dos.

Definim ara en què consisteix en general etiquetar una triangulació d'un símplex.

Definició 3. Donat un n-símplex S amb una triangulació, un *etiquetatge de S* amb etiquetes $\{0,1,\ldots,n\}$ és una aplicació L del conjunt de vèrtexs al conjunt $\{0,1,\ldots,n\}$. Direm que L és un *etiquetatge propi* si es compleixen les dues condicions següents:

1. Els vèrtexs $p_i = (0,\ldots,1^{i+1)},\ldots,0)$, per a $i = 0,\ldots,n$, tenen etiquetes diferents, $L(p_i) \neq L(p_j)$, per a tot $i \neq j \in \{0,1,\ldots,n\}$.
2. Les etiquetes utilitzades en una cara de dimensió $n-1$ determinada per un subconjunt $\{p_{i_1},\ldots,p_{i_n}\}$ de vèrtexs corresponen al conjunt $\{L(p_{i_1}),\ldots,L(p_{i_n})\}$.

Direm que un n-subsímplex de la triangulació és distingit quan els seus $n+1$ vèrtexs utilitzen totes les etiquetes, és a dir, és de tipus $(0,1,\ldots,n)$.

Lema de Sperner (1928) [14]. *Donada una triangulació amb un etiquetatge propi d'un n-símplex, hi ha un nombre senar de n-símplexs distingits a la triangulació.*

Prova. Ja hem demostrat els casos $n = 1$ i $n = 2$. Suposem, doncs, que el resultat és cert per a símplexs de dimensions menors que n. Sigui K un n-símplex amb una triangulació i un etiquetatge propi. Considerem les quantitats següents:

1. Q és el nombre de n-símplexs de tipus $(0,1,\ldots,n-1,i)$, on $i = 0,1,\ldots,n-1$.
2. R és el nombre de n-símplexs de tipus $(0,1,\ldots,n)$, és a dir, distingits.
3. X és el nombre de $(n-1)$-símplexs de tipus $(0,1,\ldots,n-1)$ a la vora.
4. Y és el nombre de $(n-1)$-símplexs de tipus $(0,1,\ldots,n-1)$ interiors.

Se satisfà la igualtat $2Q + R = X + 2Y$. El lema de Sperner per a dimensió $n-1$ ens diu que X és senar: noteu que els $(n-1)$-símplexs a la vora de tipus $(0,1,\ldots,n-1)$ només es troben en una de les cares de dimensió $n-1$, aquella determinada per aquells vèrtexs principals p_i amb etiqueta al subconjunt $\{0,1,\ldots,n-1\}$. Per tant, de la igualtat deduïm que R ha de ser també senar.

Així mateix, es pot demostrar de manera constructiva imitant l'argument donat per al cas $n = 2$. És a dir, si imaginem que només podem travessar els $(n-1)$-símplexs de tipus $(0,1,\ldots,n-1)$. Aleshores dins la triangulació hi haurà n-símplexs amb una sola entrada, que són els distingits; dues entrades, o cap. El mateix raonament que hem fet servir per al cas de dimensió 2 ens porta a la mateixa conclusió. □

2.1 Sabíeu que…

Emanuel Sperner (1905–1980) va ser un matemàtic alemany. El 1934 fou catedràtic a Königsberg (actual Kaliningrad), ciutat coneguda entre els matemàtics perquè és la ciutat on se situa el problema dels ponts que va resoldre Leonhard Euler. També va ser membre fundador del centre de recerca Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Alemanya).

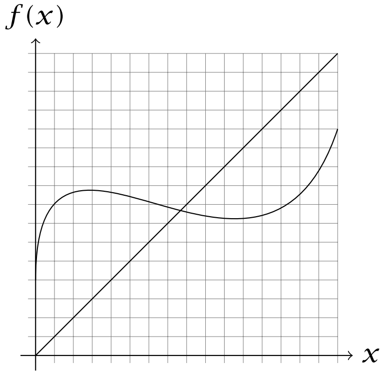
El lema de Sperner apareix per primera vegada a l'article [14] en un context diferent del teorema del punt fix de Brouwer. Posteriorment a [6] es va veure que el lema permetia donar una demostració d'aquest resultat.

3 El teorema del punt fix de Brouwer

En aquesta secció demostrarem el teorema del punt fix de Brouwer a partir del lema de Sperner i el procés de subdivisió baricèntrica, tal com es troba en el llibre [7].

La propietat del punt fix en un espai topològic es preserva per homeomorfismes; és a dir, si tota aplicació contínua d'un espai topològic X en si mateix té un punt fix i Y és homeomorf a X, és fàcil comprovar que Y té la mateixa propietat. Així, a la resta de la secció demostrarem el teorema del punt fix de Brouwer veient que el n-símplex té la propietat del punt fix. Serà suficient, ja que és homeomorf a la bola de dimensió n.

Abans de començar la demostració del teorema del punt fix de Brouwer, repassem el cas $n = 1$ que s'explica en l'assignatura de càlcul de primer: tota aplicació contínua f de l'interval $I = [0, 1]$ en si mateix té un punt fix.

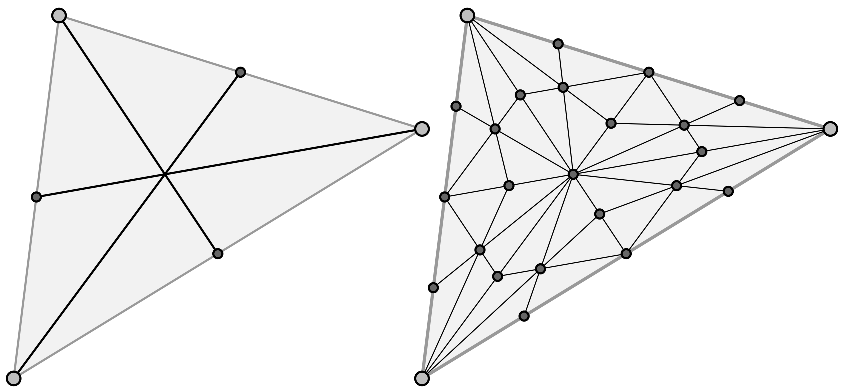


La demostració es basa a fer particions fines de l'interval $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < 1 = x_n$. Suposem que f no té cap punt fix. Etiquetem cada punt x_i de la partició segons $f(x_i) > x_i$ o $f(x_i) < x_i$. Aleshores, els extrems tenen etiquetes diferents i el lema de Sperner per a $n = 1$ ens diu que hi ha subinterval amb etiquetes diferents. Els extrems d'aquests subintervals per a una successió de particions de l'interval cada cop més fines ens donaran successions de punts que convergeixen a un mateix $x^* \in I$ complint a la vegada $f(x^*) \geq x^*$ i $f(x^*) \leq x^*$. En aquesta demostració, d'entrada hi ha tres elements clau: les particions de l'interval en subintervals de longitud tan petita com vulguem, el lema de Sperner en dimensió 1 i el fet que I és compacte.

Comencem recordant breument el procés de la subdivisió baricèntrica, que serà l'eina tècnica principal de la demostració, juntament amb el lema de Sperner.

Definició 4. Donat un n-símplex S amb vèrtexs $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, el baricentre $b \in S$ és el punt de coordenades $b = \frac{1}{n+1} \sum p_i$.

Amb els baricentres de tots els subsímplexs de S tenim un procediment per a construir triangulacions d'una manera estàndard en un procés que es pot repetir. El descriurem informalment. Comencem amb els 1-símplexs o arestes. Afegim el baricentre de cadascun i considerem les noves arestes que apareixen. Ara mirem els 2-símplexs o triangles, hi afegim el baricentre com un nou vèrtex i totes les arestes que van als vèrtexs que ja teníem; això no només crea noves arestes sinó també una triangulació del 2-subsímplex. I anem iterant aquest procés, afegint el baricentre i creant tots els subsímplexs necessaris que el contenen. Una imatge val més que mil paraules…



Observeu que, en la nova triangulació, el màxim dels diàmetres de tots els símplexs ha disminuït respecte a la triangulació anterior. Aquest procés de subdivisió baricèntrica es pot iterar tantes vegades com sigui necessari, de manera que els diàmetres dels símplexs siguin tan petits com calgui: donat $\epsilon > 0$, existeix $n \geq 0$ tal que el màxim dels diamètres dels símplexs de la triangulació obtinguda iterant n vegades (o més) el procés de subdivisió baricèntrica és menor que ϵ.

Ja tenim els ingredients necessaris per demostrar el teorema del punt fix de Brouwer tal com indica Lefschetz al seu llibre [7]: subdivisió baricèntrica, el lema de Sperner i el fet que els símplexs són compactes.

Prova del teorema del punt fix de Brouwer. Sigui S un n-símplex amb vèrtexs $p_i = (0, \ldots, 1^{i+1)}, \ldots, 0)$, $i = 0, \ldots, n$ en coordenades baricèntriques. Suposem que $f\colon S \to S$ és una aplicació contínua sense punts fixos, és a dir, $f(x) \neq x$ per a tot $x \in S$.

Construïm una successió $\{S_1, S_2, \ldots\} = \{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de triangulacions de S, de manera que cada S_j és una triangulació de l'anterior S_{j-1} i tal que el màxim dels diàmetres en cadascuna tendeix a zero quan j es fa gran. Aquesta successió existeix prenent iteracions de la subdivisió baricèntrica.

Fixem una triangulació S_j i etiquetem els seus vèrtexs de la manera següent. Donat un vèrtex $x = (x_0, \ldots, x_n)$ en coordenades baricèntriques, aleshores

$L(x) = i$ si i és l'índex més petit tal que la coordenada i-èsima compleix $f(x)_i < x_i$. Com que $\sum f(x)_i = \sum x_i = 1$ i $f(x) \neq x$, aquest etiquetatge està ben definit. Comprovem ara que és propi.

Es compleix la primera condició, ja que $L(p_i) = i$. Els punts $x \in S$ que es troben a la cara de dimensió $n-1$ determinada per $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}\}$ tenen la característica que una de les coordenades (la del vèrtex que no apareix a la llista) sempre és zero. Aleshores $L(x)$ mai no prendrà el valor corresponent en aquesta coordenada, és a dir, $L(x) \in \{i_1, \ldots, i_n\}$. Per tant, el lema de Sperner ens diu que hi ha almenys un n-símplex distingit a S_j amb vèrtexs $\{z^{j,0}, \ldots, z^{j,n}\}$, on $L(z^{j,i}) = i$.

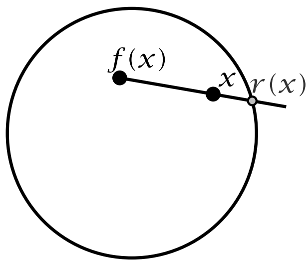
Hem construït una successió de símplexs. Ara farem servir que el n-símplex és compacte: tota successió de punts a S té una successió parcial convergent. Prenem la successió formada pels vèrtexs $\{z^{j,0}\}$: sabem que hi ha una successió parcial convergent cap a un punt z^0. La continuïtat de f ens assegura que $f(z^0)_0 \leq z^0_0$. Descartem els triangles que no formen part d'aquesta successió parcial convergent i repetim el mateix argument amb la successió de vèrtexs $\{z^{j,1}\}$; i així obtenim z^1, amb $f(z^1)_1 \leq z^1_1$. Com que els punts són vèrtexs de triangles amb diàmetre que tendeix a zero, tenim també que els límits coincideixen, $z^1 = z^0$. Repetint aquest procés fins a $\{z^{j,n}\}$, obtenim un punt z^* que compleix $f(z^*)_i \leq z^*_i$ per a tot $i = 0, \ldots, n$. Però això només és possible si $f(z^*)_i = z^*_i$ per a tot i, arribant així a una contradicció. □

El teorema del punt fix de Brouwer acostuma a presentar-se com a conseqüència del fet que l'esfera S^{n-1} no és un retracte de la bola B^n. Però són enunciats equivalents; per tant, a partir del lema de Sperner també demostrem aquest fet.

Proposició 5. *Són equivalents:*

1. *Tota aplicació contínua $f\colon B^n \to B^n$ té un punt fix.*
2. *No hi ha cap aplicació contínua $r\colon B^n \to S^{n-1}$ tal que $r(x) = x$ si $x \in S^{n-1}$.*

Prova. Suposem que existís una aplicació contínua $f\colon B^n \to B^n$ sense punts fixos. Aleshores definim $r\colon B^n \to S^{n-1}$ de la manera següent: donat $x \in B^n$, sigui $r(x) \in S^{n-1}$ el punt de tall de la semirecta que uneix $f(x)$ amb x.



Llavors r defineix una retracció de B^n en S^{n-1}: es compleix que $r(x) = x$ si $x \in S^{n-1}$.

Ara suposem que existís $r: B^n \to S^{n-1}$ contínua tal que $r(x) = x$ si $x \in S^{n-1}$. Aleshores considerem l'aplicació $f: B^n \to B^n$ definida per $f(x) = -r(x)$. D'aquesta manera hem construït una aplicació contínua f sense punts fixos.□

Finalment, la segona condició de la proposició 5 és també equivalent al fet que l'esfera S^{n-1} no és contràctil. Una homotopia entre l'aplicació constant i la identitat dóna lloc a una retracció $r: B^n \to S^{n-1}$, observant que B^n és homeomorf a un con amb base S^{n-1}. I al revés, una retracció r donaria lloc a una homotopia de la identitat a l'aplicació constant.

Per simplicitat hem exposat el teorema del punt fix de Brouwer per a n-símplexs o boles, però és vàlid en general per a subespais compactes i convexos $K \subset \mathbb{R}^n$. Va ser un any més tard de la publicació del lema de Sperner, el 1929, que Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz [6] el van utilitzar per demostrar un teorema sobre recobriments de símplexs del qual es dedueix el teorema del punt fix de Brouwer.

Entre les moltes generalitzacions d'aquest teorema, cal destacar el teorema de Schauder [12]: sigui K un subespai compacte i convex d'un espai vectorial localment convex, aleshores tota aplicació contínua de K en si mateix té un punt fix. Una altra generalització és el teorema de Kakutani [5] per a funcions que prenen valors en conjunts i que és una peça important en el conegut teorema de Nash sobre l'existència d'equilibris de Nash en teoria de jocs [11]. Què té a veure el teorema del punt fix de Brouwer amb el joc de l'Hex? Una lectura molt recomanable són les notes [10].

3.1 Sabíeu que...

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) va ser un matemàtic i filòsof holandès. A part del teorema del punt fix, va provar altres resultats molt importants en el camp de la topologia algebraica, com el teorema de la bola peluda (1912). La seva demostració del teorema del punt fix usa tècniques de la topologia algebraica que asseguren l'existència del punt fix de manera no constructiva. Curiosament, al cap d'uns anys va fundar el corrent de l'intuïcionisme, que no acceptava les demostracions no constructives.

4 Una mica de matemàtica aplicada

En un primer contacte, el lema de Sperner sembla un fet senzill sobre certs tipus de grafs amb un etiquetatge especial als vèrtexs, però aquesta senzillesa contrasta amb diverses de les seves aplicacions sorprenents. En aquesta secció només en descriurem un parell vinculades al problema conegut com el de la repartició justa. Una referència per a aquesta secció és l'article de F. E. Su [15].

Els problemes de repartició justa són aquells que estan relacionats amb la manera de dividir un objecte o un recurs en parts diferents d'acord amb una certa noció de justícia i igualtat, és a dir, que tothom està content amb la partició final i no enveja el que han obtingut els altres participants. En aquests problemes ens interessa saber primer si una solució existeix i, en aquest cas, com trobar-la. Una versió n'és el problema del pastís que va plantejar el matemàtic polonès Hugo Steinhaus el 1948. Però ha estat més recentment que idees de la combinatòria topològica han proporcionat mètodes nous i constructius per obtenir solucions a aquest tipus de problemes.

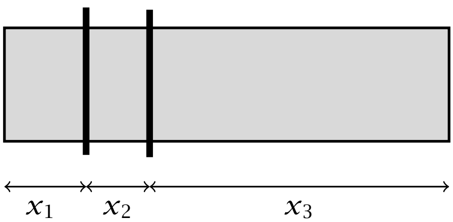
4.1 El problema del repartiment del pastís

Suposem que tenim un pastís rectangular que cal tallar i repartir entre un grup de n convidats a una festa. Per repartir-lo ens caldrà fer $n-1$ talls amb el ganivet paral·lels al costat més petit del pastís. Però cada convidat pot tenir una opinió diferent sobre quin dels talls prefereix, per exemple, en funció de la gana que tingui o dels ingredients o la decoració del pastís. Algun convidat pot tenir poca gana però preferir el tall que té més xocolata, o bé el que té la cirereta... L'objectiu és tallar el pastís de manera que tots els convidats estiguin contents amb el tall que els ha tocat i no prefereixin el de cap altre convidat. Formalitzem el problema.

Suposem que el pastís es presenta ja repartit als convidats. Direm que una persona prefereix un dels talls fixats si creu que cap altre tall del pastís és millor que l'escollit. Aquesta elecció és independent del que pensin els altres convidats, i suposem que sempre escull algun tall. A més, en aquest procés demanarem que se satisfacin les dues condicions següents:

1. Els convidats tenen gana: sempre triaran un tall abans que quedar-se sense res, és a dir, d'alguna manera tots els talls són acceptables per als convidats que tenen gana.
2. Si una persona prefereix un tall en una successió convergent de possibles reparticions, aleshores prefereix el mateix tall en la repartició límit. Diem que el conjunt de preferències és tancat.

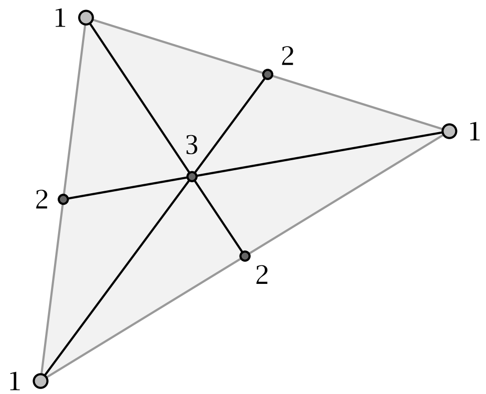
Suposarem que el pastís rectangular té longitud 1. Aleshores, podem representar una repartició possible com una n-tupla de números reals positius $(x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ tals que $\sum x_i = 1$, on cada x_i és la longitud del tall que es troba a la i-èsima posició.



Per tant, l'espai de totes les presentacions possibles del pastís tallat forma un $(n-1)$-símplex a $\mathbb{R}^n$ amb vèrtexs $p_i = (0, \dots, 1^{i)}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

La idea de l'estratègia que presentarem és original de F. W. Simmons (vegeu [15]). Treballarem amb dos etiquetatges del $(n-1)$-símplex i les seves subdivisions: un representarà els convidats, i l'altre, les eleccions que van fent.

Sigui S^j la triangulació del n-símplex obtinguda iterant j-vegades la subdivisió baricèntrica. Escriurem com a $\{C_1, \ldots, C_n\}$ la llista de convidats a la festa. Per a cada $j \geq 0$, assignarem a la triangulació corresponent un etiquetatge L_C amb valors a $\{C_1, \ldots, C_n\}$ de manera que tots els triangles siguin distingits. És possible? Vegem com aconseguir-ho. Per a $j = 0$, només cal assignar convidats diferents als vèrtexs, $L_C(p_i) = i$. En el pas següent utilitzem el procediment que expliquem tot seguit, el qual s'anirà iterant successivament. Tots els vèrtexs que provenen del pas anterior s'assignen al mateix convidat C_1, els vèrtexs que són baricentres de subsímplexs 1-dimensionals s'assignen a C_2, els vèrtexs que són baricentres de subsímplexs 2-dimensionals s'assignen a C_3, i així successivament fins a assignar C_n als baricentres de subsímplexs $(n-1)$-dimensionals de la triangulació. Ara, cada cop que iterem la subdivisió baricèntrica per obtenir una triangulació, recol·loquem les etiquetes segons el procediment anterior. Informalment direm que si v és un vèrtex de S^j, $L_C(v)$ és el propietari d'aquest vèrtex. Observeu que aquest etiquetatge no és propi, però tots els seus símplexs són distingits.



Donada, doncs, una triangulació S^j amb etiquetatge L_C, construirem un nou etiquetatge L_P de la manera següent. Sigui $v = (x_1, \ldots, x_n)$ un vèrtex de S^j que descriu una repartició del pastís en talls, aleshores preguntarem al propietari $L_C(v)$ del vèrtex v quin dels talls prefereix, i posarem $L_P(v) = i$ si ha escollit el tall i-èsim. Es llegeix dient que, amb la configuració v, el convidat $L_C(v)$ prefereix el tall $L_P(v)$.

Veurem ara que aquest etiquetatge L_P sí que és propi. Els vèrtexs principals L_P són de la forma $p_i = (0, \ldots, 1^{i)}, \ldots, 0)$ i, per tant, com que els convidats tenen gana, sempre tindrem $L_P(p_i) = i$, ja que escolliran l'únic tall no buit. Ara bé, els $(n-2)$-subsímplexs es caracteritzen perquè hi ha una coordenada fixada que sempre val zero (aquella que correspon al vèrtex que no apareix a la llista de vèrtexs $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_{(n-1)}}\}$ que la generen). I, per tant, cap convidat no escollirà aquell tall; així, si v és un vèrtex en aquell subsímplex es complirà que $L_P(v) \in \{i_1, \ldots, i_{(n-1)}\}$.

Finalment, el lema de Sperner afirma que la triangulació S^j amb etiquetatge L_P té un nombre senar de $(n-1)$-símplexs distingits. Què ens diu? Doncs que hi ha un $(n-1)$-símplex de la triangulació de manera que els seus vèrtexs determinen talls de pastís propers amb la propietat que convidats diferents tenen preferències diferents. La condició de continuïtat ens diu que si apliquem un procés de pas al límit com hem fet en la demostració del teorema del punt fix de Brouwer, obtindrem que les successions d'aquests vèrtexs tenen una parcial que convergeix a un punt del símplex amb la propietat que representa una partició del pastís en la qual convidats diferents tenen preferències diferents.

Així doncs, hem demostrat el teorema següent.

TEOREMA 6. *Amb les suposicions anteriors, existeix una manera de repartir el pastís de manera que cada persona prefereix un tall diferent.*

Recordeu que el lema de Sperner té una demostració constructiva que descriu un algorisme per trobar símplexs distingits. A la pràctica, com trobem aquesta repartició justa del pastís? El primer és acordar un nivell de tolerància $\epsilon > 0$ entre els convidats, és a dir, que si un convidat prefereix un tall de pastís x_i en un punt del símplex $x = (x_1, \ldots, x_n)$, aleshores també prefereix el tall i-èsim en punts a una distància menor que ϵ. Per tant, considerem directament una triangulació S^j on tots els $(n-1)$-símplexs tinguin un diàmetre menor que ϵ, trobem amb un algorisme un $(n-1)$-símplex distingit i prenem el baricentre d'aquest $(n-1)$-símplex.

4.2 El problema del lloguer en un pis d'estudiants

Aquest problema té el mateix esperit que el repartiment del pastís però amb matisos diferents. Un grup d'estudiants vol llogar un pis per compartir. Han trobat un pis que els agrada a tots. D'entrada el lloguer es divideix en parts iguals entre ells, però ara cal repartir-se les habitacions i no totes són iguals. Unes són més grans, unes altres tenen més llum, n'hi ha que donen al carrer i són més sorolloses... És just que tots paguin el mateix independentment de l'habitació que els toqui? Potser algú estaria disposat a pagar més a condició de poder escollir una certa habitació, o al revés, algú preferiria pagar menys a canvi de quedar-se alguna habitació que els seus companys no volen. El nostre objectiu ara és trobar una repartició justa d'habitacions i lloguer de manera que tots ells estiguin satisfets amb l'habitació que tenen i el preu que en paguen.

De manera semblant a l'exemple anterior, en aquest procés suposarem que es compleixen les tres condicions següents:

1. En qualsevol repartició del lloguer segons les habitacions, tothom troba una opció acceptable.
2. En qualsevol repartició del lloguer segons les habitacions, un estudiant sempre preferirà una habitació de franc a una que no ho sigui.
3. Si un estudiant prefereix una habitació/preu en una successió convergent de possibles reparticions, aleshores prefereix la mateixa opció en la repartició límit. Diem, com abans, que el conjunt de preferències és tancat.

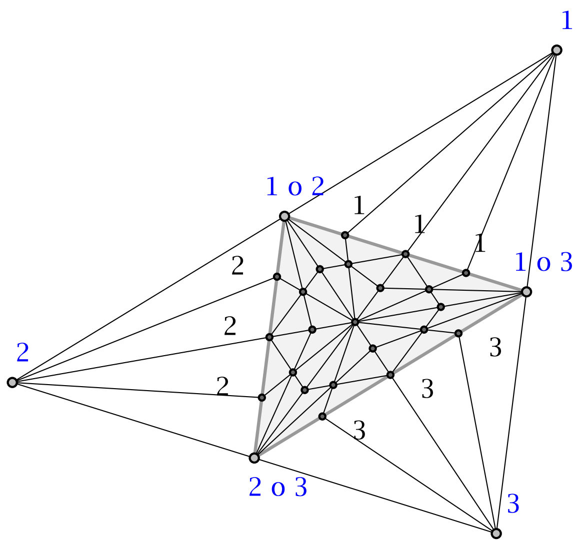
TEOREMA 7. *En les condicions anteriors, existeix una repartició del lloguer en habitacions de manera que estudiants diferents prefereixen habitacions diferents.*

Vegem com podem demostrar-ho. Suposem que el lloguer del pis val 1. Enumerem les habitacions d'1 a n. Aleshores una tupla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, amb $\sum x_i = 1$, representa una repartició del lloguer en habitacions de manera que x_i és el que cal pagar per obtenir l'habitació i. Així, el $(n-1)$-símplex estàndard representa l'espai de totes les opcions possibles d'assignar preus a les habitacions.

L'estratègia segueix la línia de l'exemple anterior. Considerem triangulacions obtingudes amb la subdivisió baricèntrica amb etiquetatge L_C de manera que tots els triangles són distingits. Les etiquetes són els estudiants: $L_C(v) = i$ voldrà dir que en el vèrtex v és l'estudiant i qui tria habitació, i amb aquesta elecció obtenim un nou etiquetatge $L_E(v) = j$. Es llegeix dient que en la repartició del lloguer que defineix v, l'estudiant $L_C(v)$ escull l'habitació $L_E(v)$.

Vegem quines condicions compleix aquest etiquetatge. En els vèrtexs principals $p_i = (0, \ldots, 1^{i)}, \ldots, 0)$ hi ha un munt d'habitacions gratis per escollir; així, només podem afirmar $L_E(p_i) \neq i$. A més, en els $(n-2)$-subsímplexs que es caracteritzen perquè hi ha una coordenada fixada k que sempre val zero, les condicions de l'elecció fan que potser $L_E(v) = k$. L'etiquetatge L_E no és propi.

Aquesta situació s'arregla de la manera següent. Considerem un $(n-1)$-símplex T a $\mathbb{R}^n$ que contingui el $(n-1)$-símplex estàndard que estem considerant. Els vèrtexs principals del $(n-1)$-símplex estàndard són baricentres de T. Aleshores, si considerem les triangulacions anteriors, S^j, estan contingudes en les triangulacions T^j obtingudes iterant el procés de subdivisió baricèntrica només a S. Estenem l'etiquetatge posant $L_E(v) = i$ si la coordenada i-èsima de v és negativa. Es pot interpretar que afegim la possibilitat que un llogater rebi diners dels seus companys per quedar-se l'habitació i.



Ara sí que tenim que L_E és un etiquetatge propi de T^j i el lema de Sperner ens diu que hi ha un $(n-1)$-símplex distingit. A més, aquest s'ha de trobar a S^j per la manera com hem estès L_E als vèrtexs que no hi pertanyen. És a dir, tenim un $(n-1)$-símplex de manera que en les opcions que ofereixen els seus vèrtexs, diferents estudiants escullen habitacions diferents. Ara acabem l'argument de la mateixa manera que en l'exemple anterior: o bé fent un pas al límit o bé introduint el concepte de tolerància en l'elecció.

Fixeu-vos que, amb l'estratègia per convertir L_E en un etiquetatge propi, en realitat hem demostrat un lema de Sperner dual per a un altre tipus d'etiquetatges de vèrtexs en triangulacions d'un símplex.

5 Una història semblant: el lema de Tucker i el teorema de Borsuk-Ulam

Un altre resultat clàssic que apareix en els llibres d'introducció a la topologia algebraica és el teorema de Borsuk-Ulam (1933). Agafem el llibre de Lefschetz [7] que ens ha fet descobrir el lema de Sperner i mirem què diu d'aquest resultat. Anem a la pàgina 134, on comença una secció titulada «Some theorems on the sphere». I diu:

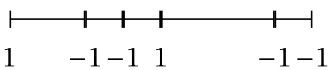
> The material in the present section has been communicated to the author by A. W. Tucker. A certain algebraic lemma resembling Sperner's lemma is first established and various known theorems are then deduced from the lemma.

Un d'aquests teoremes que menciona el trobem a la pàgina 138:

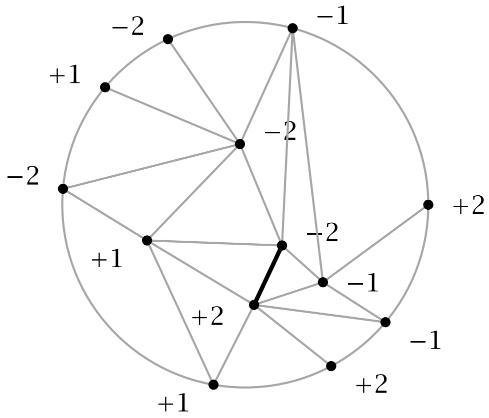
> (21.4) Theorem. *There is no (continous) mapping of S^n into S^{n-1} which maps antipodal points of S^n into antipodal points of S^{n-1} without exception.*

5.1 El lema de Tucker

El lema de Tucker és una altra generalització del que passa en el lema de Sperner per al cas $n = 1$: si etiquetem els vèrtexs d'una subdivisió de l'interval amb $\{+1, -1\}$ de manera que els extrems tenen signe contrari, aleshores hi ha un nombre senar de canvis de signe.



En el cas de dimensió 2, podem estendre aquest resultat estudiant triangulacions de la bola B^2 etiquetades amb elements del conjunt $\{+1, -1, +2, -2\}$ i tals que són antipodals a la vora, és a dir, si v és un vèrtex amb etiqueta i, aleshores $-v$ també és un vèrtex amb etiqueta $-i$. D'aquesta manera, el lema de Tucker ens dirà que hi ha almenys una aresta tal que les etiquetes dels seus extrems sumen zero. Per què?

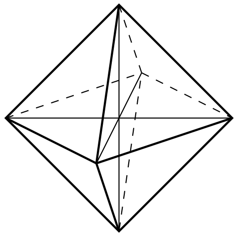


Suposem que no hi ha cap aresta tal que els seus vèrtexs sumin zero. Com que a la vora les etiquetes són antipodals, a la força hi ha d'haver una aresta de tipus $(1, -2)$. Suposem que aquestes arestes són parets amb porta i les altres no es poden travessar. Comencem a caminar entrant al disc per una d'aquestes portes de la vora. Com que no hi ha arestes de tipus $(1, -1)$ i $(2, -2)$, aleshores el tercer vèrtex del triangle serà 1 o -2; per tant, tenim una altra porta per continuar el camí. Repetint aquest argument anem construint un recorregut que només pot acabar sortint per una altra aresta de tipus $(1, -2)$ a la vora diferent, ja que només hi ha un nombre finit de triangles. Per tant, a la vora del disc hi ha d'haver un nombre parell d'arestes de tipus $(1, -2)$.

Fixem un vèrtex de la vora v i el seu antipodal $-v$. Aquesta elecció divideix el cercle en dos semicercles, P i $-P$. Aleshores el nombre d'arestes tipus $(1, -2)$ a la vora també és igual al nombre d'arestes $(1, -2)$ més les del tipus $(-1, 2)$ al semicercle P. Recordeu que aquesta suma és parell. Però observeu que només es poden produir canvis de signe precisament en aquestes arestes, ja que hem suposat que no n'hi ha de tipus $(-1, 1)$ o $(2, -2)$. Però per al cas $n = 1$, sabem que a P hi ha un nombre senar de canvis de signe!

Tucker va fer una demostració anàloga a la que acabem de veure per al quadrat. El cas general va aparèixer per primera vegada en el llibre [7] de Lefschetz. A la referència [3] s'hi pot trobar una prova per a dimensió 3 que fa servir arguments combinatoris i una indicació de com s'estendria a dimensions superiors. Aquestes demostracions no són constructives sinó que fan servir arguments de comptar. Una demostració constructiva es troba a [4]. Aquesta és la que explicarem. Es restringeix a un tipus especial de triangulacions que són suficients per al nostre objectiu, però el lema de Tucker és cert sense aquesta restricció.

A partir d'ara considerarem la bola $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1\}$. Les triangulacions T de B^n que considerarem seran totes un refinament de la triangulació induïda pels hiperplans generats pels eixos de coordenades. En direm *triangulacions especials*.



DEFINICIÓ 8. Una triangulació T de B^n és *antipodalment simètrica* si per a tot símplex $\sigma \subset \partial B^n = S^{n-1}$ tenim que $-\sigma$ és un símplex de la triangulació. Sigui $L\colon V(T) \to \{+1, -1, \ldots, +n, -n\}$ un etiquetatge dels vèrtexs de T, direm que L és *antipodal a la frontera* si per a tot vèrtex $v \in S^{n-1}$ es compleix $L(-v) = -L(v)$.

Donat σ un símplex de la triangulació, denotarem per $L(\sigma)$ el conjunt $\{L(v) \mid v \in V(\sigma)\}$ de les etiquetes dels seus vèrtexs. Direm que un 1-símplex amb vèrtexs $\{v, w\}$ és *complementari* si $L(v) + L(w) = 0$ (és a dir, $L(\sigma) = \{+i, -i\}$ per a $i = 1, \ldots, n$).

LEMA DE TUCKER. *Sigui T una triangulació antipodalment simètrica de B^n amb $L\colon V(T) \to \{+1, -1, \ldots, +n, -n\}$ antipodal a la frontera. Aleshores existeix una aresta o 1-símplex complementari.*

La demostració es basa en una idea semblant a la descrita per al lema de Sperner. Farem un recorregut a través de la triangulació però només trepitjant símplexs especials, que ara descriurem.

El fet que només considerem triangulacions especials T dóna sentit a considerar l'ortant on es troba el símplex. Donat σ un símplex de T, podem prendre un punt interior $x \in \sigma$ i considerar el conjunt

$$\mathrm{Sig}(\sigma) = \{+i \mid x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\} \cup \{-i \mid x_i < 0,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

DEFINICIÓ 9. Un símplex $\sigma \in T$ és *especial* si $\mathrm{Sig}(\sigma) \subset L(\sigma)$. Direm que dos símplexs σ i τ especials són *adjacents* si es compleix una de les dues condicions:

1. $\sigma \subset S^{n-1}$ i $\sigma = -\tau$.
2. $\sigma \subset \tau$ i $\mathrm{Sig}(\tau) \subset L(\sigma)$.

Un símplex és especial si les etiquetes dels seus vèrtexs indiquen l'ortant on es troba. Dos símplexs especials no antipodals són adjacents si un està contingut a l'altre i les etiquetes del petit codifiquen l'ortant on es troba el símplex gran.

Passarem d'un símplex especial a un altre si són adjacents. Si dos símplexs especials σ_1 i σ_2 no són antipodals, també passarem d'un a l'altre (en dos passos) quan els dos símplexs siguin adjacents a la seva intersecció i aquesta intersecció sigui especial. Tot plegat es compleix si i només si $\mathrm{Sig}(\sigma_i) \subseteq L(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ per a $i = 1, 2$, és a dir, si la intersecció ja conté les etiquetes necessàries perquè tant aquesta intersecció com els dos símplexs σ_1 i σ_2 siguin especials i també per ser adjacent a σ_1 i σ_2.

Observeu que l'origen de coordenades és sempre especial, ja que $\mathrm{Sig}(0) = \emptyset$. Per tant, si $L(0) = i$, on $i \in \{+1, -1, \ldots, +n, -n\}$, un 1-símplex que contingui 0 serà especial i adjacent a 0 si l'altre vèrtex es troba en el semieix determinat per i. I aquesta elecció serà única, ja que T és una triangulació especial i el semieix escollit depèn de manera única de $L(0)$.

Si $\sigma \in T$ és especial i $|\mathrm{Sig}(\sigma)| = k$, aleshores el seu interior està contingut a l'embolcall convex generat pels semieixos de coordenades corresponents i, per tant, de dimensió menor o igual a k. D'altra banda, com que ha de contenir les etiquetes que indiquen l'ortant on es troba, ha de tenir com a mínim k vèrtexs; per tant, sabem que és de dimensió k o $k-1$.

Prova del lema de Tucker. Suposem que no tenim arestes complementàries en la nostra triangulació. Ens situem a l'origen i descriurem un recorregut a través de símplexs especials adjacents. L'origen del nostre recorregut és l'origen de coordenades. L'origen és un vèrtex especial i la seva etiqueta $L(0)$ determina un únic semieix que conté una aresta especial adjacent a ell.

Suposem que ens trobem en un símplex especial σ, amb $|\mathrm{Sig}(\sigma)| = k$ i dimensió $k-1$. Si $\sigma \subset S^{n-1}$, aleshores σ és la cara d'exactament un símplex de dimensió k especial i el seu antipodal $-\sigma \in T$ també és especial. Si σ no es troba a la frontera, dins del seu ortant és la cara de dos k-símplexs especials (ja que σ conté les etiquetes necessàries per determinar els símplexs d'aquell ortant).

Si la dimensió de σ és k, aleshores té $k+1$ vèrtexs, k dels quals tenen les etiquetes determinades per l'ortant on es troba σ. Això vol dir que una de les cares de dimensió $k-1$ és especial. El vèrtex que no pertany a aquesta cara, $v \in \sigma$, pot prendre altres valors. Si $L(v)$ és repetit, és a dir, $\mathrm{Sig}(\sigma) = L(\sigma)$, aleshores això determina una altra cara diferent especial. I com que té dues etiquetes repetides, no pot ser adjacent a un símplex especial de dimensió $k+1$. Si no és repetida, aleshores, $L(\sigma) = \mathrm{Sig}(\sigma) \cup \{i\}$. Hem suposat que no hi ha arestes complementàries, per tant, $|i| \neq |j|$ per a tot $j \in \mathrm{Sig}(\sigma)$. Aleshores, les etiquetes de σ són suficients per fer σ adjacent a exactament un símplex de dimensió $k+1$ en l'ortant corresponent.

En conclusió, si només podem trepitjar símplexs especials en el nostre recorregut començant a l'origen, obtenim que l'origen és de grau 1 amb una sola opció de sortida i tots els altres símplexs especials que anem trepitjant són de grau 2 amb una sola possible sortida diferent de l'entrada. Com que hi ha un nombre finit de símplexs, arribem a contradicció i a la força han d'haver-hi arestes complementàries. □

Sabíeu que… Albert W. Tucker (1905–1995) va ser un matemàtic canadenc. El seu director de tesi va ser Lefschetz. Fou el director de tesi de dos premis Nobel: John Nash (Premi Nobel d'Economia 1994) i Lloyd Shapley (Premi Nobel d'Economia 2012). Va guanyar el Premi John von Neumann, juntament amb David Gale i Harold Kuhn, l'any 1980. Es deu a ell la formalització del dilema del presoner.

5.2 El teorema de Borsuk-Ulam

Del teorema de Borsuk-Ulam i les seves aplicacions, se'n podria escriure un llibre sencer i, de fet, algú ja ho ha fet. Una referència molt recomanable és el llibre de Jiří Matoušek [9], on descriu aplicacions d'aquest resultat a altres àrees de les matemàtiques.

El teorema de Borsuk-Ulam té diverses formulacions equivalents. A l'article original de K. Borsuk [1] s'hi diu que el seu objectiu és demostrar els tres enunciats següents.

TEOREMA 10. *Tota aplicació contínua i antipodal $f\colon S^n \to S^n$ (i. e. $f(-x) = -f(x)$) és essencial, és a dir, no és nulhomotopa.*

TEOREMA 11 (TEOREMA DE BORSUK-ULAM). *Sigui $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicació contínua. Aleshores existeix $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Aquesta versió rep el nom de *teorema de Borsuk-Ulam*, ja que el mateix Borsuk posa una nota a peu de pàgina en què indica que aquest enunciat correspon a una conjectura proposada per Ulam.

TEOREMA 12 (TEOREMA DE LYUSTERNIK-SCHNIREL'MAN). *Considerem els $n+1$ conjunts tancats $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$ que formen un recobriment de S^n, aleshores n'hi ha almenys un que conté una parella de punts antipodals.*

Aquesta versió va ser provada primer per Lyusternik-Schnirel'man [8] l'any 1947 en una versió combinatòria: l'esfera S^n no es pot descompondre en $n+1$ subconjunts (tancats) de diàmetre menor que 2.

Els teoremes 10, 11 i 12 són enunciats equivalents. Altres versions també equivalents són:

1. Si $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ és una aplicació contínua tal que $f(-x) = -f(x)$, aleshores existeix $x \in S^n$ tal que $f(x) = 0$.
2. No hi ha cap aplicació contínua antipodal $f\colon S^n \to S^{n-1}$.
3. No hi cap aplicació contínua $f\colon B^n \to S^{n-1}$ que sigui antipodal restringida a $S^n \subset B^n$.

PROVA DEL TEOREMA DE BORSUK-ULAM. Donada $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$, considerem una nova funció $g\colon B^n \to \mathbb{R}^n$ definida per $g(x) = f(x, 1 - \|x\|) - f(-x, \|x\| - 1)$. De la definició es veu que $g(-x) = -g(x)$ si $x \in S^{n-1}$.

La idea és construir una triangulació T de B^n amb un etiquetatge L que compleixi les condicions del lema de Tucker.

Sigui T una triangulació especial de B^n. Donat un vèrtex $v \in T$ definim $L(v) = i$ (resp. $L(v) = -i$) si i és el primer índex tal que $|g(v)_i| = \max\{|g(v)_j|,\ j = 1, \dots, n\}$ i $g(v)_i > 0$ (resp. $g(v)_i < 0$). Com que g és antipodal a la vora, es compleixen les condicions del lema de Tucker per $L\colon V(T) \to \{+1, -1, \dots, +n, -n\}$. Per tant, hi ha una aresta complementària.

Prenem una successió de triangulacions $\{T_1, T_2, \dots\}$ de B^n tals que el màxim dels diàmetres dels seus símplexs tendeix a zero. Per exemple, iterant el procés de subdivisió baricèntrica. Aleshores tenim una successió d'arestes complementàries. Per a algun $i \in \{1, \dots, n\}$, obtindrem una successió d'arestes complementàries σ_n de tipus $L(\sigma) = \{i, -i\}$, amb vèrtexs $\{v_n, w_n\}$, de manera que la distància entre els dos vèrtexs tendeix a zero. Com que B^n és compacte, sabem que hi ha successions parcials convergents de $\{v_n\}$ i $\{w_n\}$ i que tenen el mateix límit $x^* \in B^n$. D'una banda, $g(x^*)_i \geq 0$ i $|g(v)_i| \geq |g(v)_j|$ per a $j \neq i$. Però, d'altra banda, $g(x^*)_i \leq 0$ i $|g(v)_i| \geq |g(v)_j|$ per a $j \neq i$. Així doncs, tenim $x^* \in B^n$ tal que $g(x^*) = 0$. Aleshores, $f(x^*, 1-\|x^*\|) = f(-x^*, \|x^*\|-1)$. □

A més, el teorema de Borsuk-Ulam implica el teorema del punt fix de Brouwer.

PROPOSICIÓ 13. *El teorema de Borsuk-Ulam implica el teorema del punt fix de Brouwer.*

PROVA. Sigui $f\colon B^n \to B^n$ una aplicació contínua sense punts fixos, aleshores la proposició 5 ens diu que podem construir una aplicació $r\colon B^n \to S^{n-1}$ tal que $r(x) = x$ si $x \in S^{n-1}$. La projecció en les n primeres coordenades $p\colon S^n \to B^n$ és un homeomorfisme quan la restringim a cadascun dels hemisferis $H^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_n \geq 0\}$ i $H^- = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_n \leq 0\}$. Aleshores definim $g\colon S^n \to S^{n-1}$ posant $g(x) = r(p(x))$, si $x \in H^+$, i $g(x) = -r(p(-x))$, si $x \in H^-$. L'aplicació g és contínua, ja que ho és als tancats H^+ i H^- i les definicions de g coincideixen a la intersecció S^{n-1}, d'aquests dos tancats. Per construcció, satisfà $g(-x) = -g(x)$. □

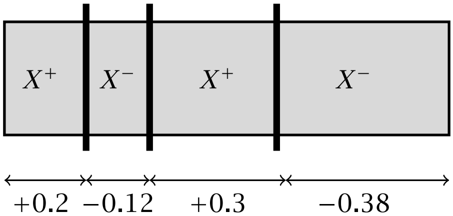
5.3 Una miqueta més de matemàtica aplicada

Ja hem vist com el lema de Sperner en combinatòria topològica permetia trobar solucions de problemes de repartiments justos. Ara li toca el torn al lema de Tucker. El teorema de Borsuk-Ulam ja s'associa de manera natural a problemes de repartiment: per exemple, el teorema de l'entrepà de pernil. Moltes d'aquestes aplicacions es troben a [9]. Les que descriurem ara breument són particions de consens i es poden trobar a [13].

5.3.1 Més problemes de pastissos Suposem que tenim un pastís X que volem repartir en dos, de manera que un equip de n participants consideri que la partició és equitativa. Pensem per exemple que aquest pastís no és homogeni i ingredients diferents es troben en proporcions diferents al llarg del pastís.

Cada participant p_i té una funció de mesura μ_i contínua sobre els subconjunts de X. L'objectiu és trobar la manera de repartir X en dos conjunts disjunts, $X = X^+ \cup X^-$, de manera que qualsevol participant els valori igual. És a dir, $\mu_i(X^+) = \mu_i(X^-)$ per a tot $i = 1, \ldots, n$.

Sigui $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ homeomorfa a $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x_1| + \cdots + |x_{n+1}| = 1\}$. Cada $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$ determina una partició del pastís on $|x_i|$ és la llargada del tall i-èsim, i el signe determina si l'assignem a X^+ o X^-. Aleshores X^+ (resp. X^-) és la unió de totes les peces amb signe positiu (resp. negatiu).



Considerem la funció $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$, amb $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (\mu_1(X^+), \ldots, \mu_n(X^+))$, que assigna a cada partició els diferents valors que els participants atorguem a X^+ obtingut. Aquesta funció és contínua, ja que ho són les diferents mesures de cada participant. Aleshores, el teorema 11 ens diu que existeix $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Però observem que punts antipodals corresponen a la mateixa repartició intercanviant el paper de X^+ i X^-. Per tant, en aquest punt tots els participants valoren igual els dos conjunts X^+ i X^-.

Aquest argument és existencial. El lema de Tucker ens proporciona un algorisme per aproximar la solució. Fixem un nivell de tolerància $\epsilon > 0$, de manera que si la diferència de valoració entre X^+ i X^- és menor que ϵ, ja els considerarem valorats igual. Tot seguit, considerem una triangulació T de l'esfera S^n prou fina, de manera que si dos vèrtexs estan units per una aresta, aleshores les valoracions de X^+ en aquests vèrtexs difereixen en menys de ϵ per a tots els participants.

A cada vèrtex $v \in T$ li assignarem una etiqueta $L(v)$, que és un element del conjunt $\{+1, -1, \ldots, +n, -n\}$. El número indica quin participant creu que la diferència entre X^+ i X^- és més gran (i, en cas d'haver-n'hi més d'un, escolliríem el d'índex menor), i el signe indica quina de les dues porcions valora més. En cas que les prefereixi de la mateixa manera, establim que triem la que comença a l'esquerra del pastís. Vegem ara que compleix les condicions del lema de Tucker. Noteu que $-v$ intercanvia els papers de X^+ i X^-, per tant, $L(-v) = -L(v)$. Aleshores, el lema de Tucker ens diu que hi ha una aresta amb vèrtexs v_1 i v_2 tals que $L(v_1) = -L(v_2)$. Però tots els participants estaran d'acord que aquesta és una equidistribució, ja que la diferència de valoracions és menor que ϵ per a tots ells.

5.3.2 El problema de fer equips Deixem els pastissos i expliquem ara el problema de fer dos equips. Suposem que tenim $2n$ exploradors agrupats en parelles segons n especialitats: 2 botànics, 2 matemàtics... Tenen l'encàrrec d'explorar un territori i, per a això, cal dividir-los en dos equips i cal dividir el territori en dues zones, una per cada equip. L'objectiu és fer-ho de manera que cada especialitat estigui representada a cada equip i que cada explorador estigui content amb el territori que li ha tocat.

Ara el territori és l'objecte A que cal dividir. Cada parella d'especialistes i valora el territori amb mesures α_i i α'_i, respectivament, de manera que la parella fa una valoració total que és la suma de totes dues $\mu_i = \alpha_i + \alpha'_i$. Ara ja estem en les condicions anteriors i sabem que hi ha una repartició del territori en A^+ i A^- tal que $\mu_i(A^+) = \mu'_i(A^+)$ per a tot $i = 1, \ldots, n$. Com ho fem per assignar cada especialista a un equip? Si tots dos valoren igual A^+ i A^-, fem una assignació a l'atzar. Si un d'ells prefereix A^+, aleshores l'altre prefereix A^-, ja que $\mu_i(A^+) = \mu'_i(A^+)$, així que assignem a cada especialista la porció de territori que prefereix.

Referències

[1] BORSUK, K. «Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre». *Fund. Math.*, 20 (1933), 177–190.

[2] BROUWER, L. E. J. «Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten». *Math. Ann.*, 71 (1912), 97–115.

[3] COHEN, D. I. A. «On the combinatorial antipodal-point lemmas». *J. Combin. Theory Ser. B*, 27 (1) (1979), 87–91.

[4] FREUND, R. M.; TODD, M. J. «A constructive proof of Tucker's combinatorial lemma». *J. Combin. Theory Ser. A*, 30 (3) (1981), 321–325.

[5] KAKUTANI, S. «A generalization of Brouwer's fixed point theorem». *Duke Math. J.*, 8 (1941), 457–459.

[6] KNASTER, B.; KURATOWSKI, C.; MAZURKIEWICZ, S. «Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe». *Fund. Math*, 14 (1) (1929), 132–137.

[7] LEFSCHETZ, S. *Introduction to Topology*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1949. (Princeton Mathematical Series; 11)

[8] LYUSTERNIK, L.; ŠNIREL'MAN, L. «Topological methods in variational problems and their application to the differential geometry of surfaces». *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, 2 (1(17)) (1947), 166–217. [En rus]

[9] MATOUŠEK, J. *Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*. Berlín: Springer-Verlag, 2003. (Universitext) [Escrit en col·laboració amb Anders Björner i Günter M. Ziegler]

[10] MATOUŠEK, J.; ZIEGLER, G. M.; BJÖRNER, A. «Around Brouwer's fixed point theorem (Lecture Notes)». Preprint (2014). Disponible a `arXiv:1409.7890`.

[11] NASH, J. F., JR. «Equilibrium points in n-person games». *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 36 (1950), 48–49.

[12] SCHAUDER, J. «Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen». *Studia Math.*, 2 (1930), 171–180.

[13] SIMMONS, F. W.; SU, F. E. «Consensus-halving via theorems of Borsuk-Ulam and Tucker». *Math. Social Sci.*, 45 (1) (2003), 15–25.

[14] SPERNER, E. «Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes». *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 6 (1) (1928), 265–272.

[15] SU, F. E. «Rental harmony: Sperner's lemma in fair division». *Amer. Math. Monthly*, 106 (10) (1999), 930–942.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
BELLATERRA 08193
natalia@mat.uab.cat