Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 31, núm. 1, 2016. Pàg. 73–89. DOI: 10.2436/20.2002.01.67

Matar mosques a canonades

Günter M. Ziegler

Resum: La història que expliquem aquí comença amb un petit problema geomètric inofensiu, plantejat el setembre de 2006 en una entrada de blog de R. Nandakumar, un enginyer de Calcuta, a l'Índia. Aquest petit problema és una «mosca»: és temptador, no tan fàcil de resoldre com hom potser podria esperar, i pertany a l'àmbit de les matemàtiques recreatives, sense cap ús pràctic.

Veurem, no obstant això, com aquest petit problema connecta amb matemàtiques molt serioses: per a la modelització d'aquest problema utilitzarem coneixements d'una àrea clau de les matemàtiques aplicades, la teoria del transport optimal. Aquest serà l'escenari per a l'aplicació d'una eina principal de les matemàtiques ben pures, coneguda com a *teoria equivariant d'obstruccions*. Això és un «canó», amb el qual passarem una estona divertida disparant a la mosca.

Per trobar una solució, les propietats combinatòries d'un objecte geomètric molt clàssic, el permutaedre, resulten essencials. Aquestes, al final de la història, ens portaran un altre cop a l'Índia, amb algun viatge en el temps que ens farà retrocedir cent anys cap al passat: per al darrer pas en la nostra solució (parcial) del problema de la mosca necessitem una propietat senzilla dels números del triangle de Pascal, que va ser observada per primer cop per Balak Ram, a Madràs, l'any 1909.

Però, fins i tot si el problema d'existència s'ha resolt, el petit problema geomètric encara no: si existeix solució, com podem trobar-ne una? Aquest problema es deixarà al lector. En canvi, parlarem de la relació tibant entre canons i mosques, i acabarem citant un poema de Hans Magnus Enzensberger.

Paraules clau: particions d'un polígon, espais de configuracions, teoria d'obstruccions, coeficients binomials, matemàtica pura i aplicada.

Classificació MSC2010: 00A08, 52A38, 55P91, 55R80.

Aquest treball va aparèixer en anglès amb el títol «Cannons at Sparrows» a *Eur. Math. Soc. Newsl.*, 95 (2015), 25–31. Agraïm als editors d'aquesta revista el permís per publicar-ne la traducció al català, revisada per Arnau Padrol.

Una mosca

El dijous 28 de setembre de 2006, ben d'hora al matí, a les 6.57, l'enginyer R. Nandakumar, que s'autoqualifica de «programador informàtic, estudiant de matemàtiques i espècie d'escriptor», va penjar al seu blog «Tech Musings» (`nandacumar.blogspot.de`) la conjectura següent sobre geometria del pla, la qual havia formulat conjuntament amb el seu amic R. Ramana Rao:

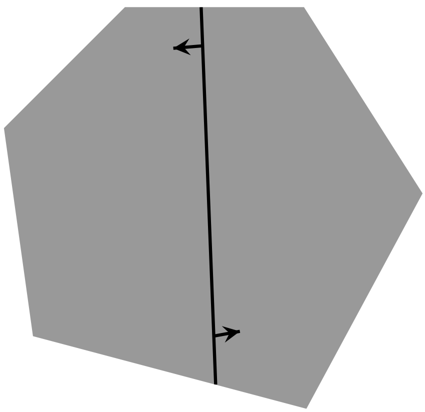
> Donada una regió convexa i un número natural n, existeix com a mínim una manera de trobar una partició de la regió en n trossos convexos de tal manera que tots els trossos tinguin la mateixa àrea i el mateix perímetre.

Aquest problema sembla completament inofensiu. Podria ser un problema de geometria de secundària? O potser sembla un problema d'Olimpíada Matemàtica? Penseu-hi vosaltres mateixos! Per exemple, podeu prendre un triangle i $n = 3$ o $n = 6$. De fet, com el mateix Nandakumar fa notar, no és evident ni tan sols com es pot dividir un triangle equilàter en $n = 5$ trossos convexos de la mateixa àrea i el mateix perímetre. Alguna idea? Proveu-ho!

El problema va captar l'atenció de la comunitat de geometria computacional després que Nandakumar el posés a la web «Open Problem Garden» (`openproblemgarden.org`) el desembre de 2007. Després, l'11 de desembre de 2008, Nandakumar i Ramana Rao van anunciar el seu primer progrés a arXiv (`arXiv:0812.2241`):

> Presentem una demostració senzilla del fet que la resposta al problema és «Sí» per a $n = 2$ (dues peces) i donem alguns arguments que indiquen amb força seguretat que la resposta també és «Sí» per a $n = 3$.

Fem-ho per a $n = 2$. Tota divisió d'un polígon convex en dues parts convexes prové d'un tall fet amb una recta. Observem que hi ha una (única!) recta vertical que divideix el polígon en dues parts convexes de la mateixa àrea. En general no tindrem sort i el perímetre del tros que quedi a la dreta de la recta, per exemple, serà més gran que el perímetre del tros que quedi a l'esquerra.



Ara fem girar la recta que bisecciona el polígon. És fàcil comprovar (!) que si girem de manera que sempre dividim l'àrea en dues parts iguals, llavors els perímetres de les parts que queden a la dreta i a l'esquerra de la recta varien *de manera contínua*. Per tant, també la quantitat «perímetre a la dreta menys perímetre a l'esquerra» varia de manera contínua. Un cop hàgim fet mitja volta, de 180 graus, el valor d'aquesta quantitat haurà canviat de signe. Si inicialment era positiva, serà negativa després de la mitja volta i, per continuïtat, haurà d'haver «tocat el zero» en algun moment entremig. Així doncs, una partició «justa» en $n = 2$ trossos existeix segons el *teorema del valor intermedi*.

Així que el problema està resolt, però com l'hem resolt? Ens hem adonat que l'espai de configuracions de totes les divisions en dos trossos convexos és un cercle (parametritzat per l'angle de la recta de divisió). I hem fet servir la continuïtat i hem aplicat un teorema topològic, el teorema del valor intermedi. Des del punt de vista de la topologia, això és el cas $d = 1$ del fet que no hi ha cap aplicació contínua entre les esferes $S^d \to S^{d-1}$ que apliqui punts oposats de S^d en punts oposats de S^{d-1}, el *teorema de Borsuk-Ulam* [13].

El problema semblava inofensiu però la topologia hi ha entrat, fins i tot en el cas $n = 2$. Nandakumar i Ramana Rao no van trobar una prova per al cas $n = 3$. Però uns quants dies després de publicar el seu *preprint*, el 16 de desembre de 2008, Imre Bárány, Pavle Blagojević i András Szűcs van enviar un article amb la solució per a $n = 3$ a l'*Advances in Mathematics*. Va ser publicat digitalment el setembre de 2009 i en versió impresa el 2010 com un article d'*Advances* de 15 pàgines, [2]. Potser això demostra que el petit i inofensiu problema «mosca» és més difícil del que semblava a primera vista.

Les canonades, I

Ens podem preguntar: quin és l'aspecte de l'espai de totes les particions d'un polígon en tres trossos convexos? Blagojević i d'altres a [2] el van descriure com una part d'una varietat de Stiefel. I pel que fa a l'espai de les particions en n trossos de la mateixa àrea? D'això no se'n sap res! (León a [12] en donarà alguna orientació). En aquesta qüestió un *ansatz* de la teoria del transport optimal hi intervé de manera essencial —el primer a observar-ho va ser Roman Karasev de Moscou.

El transport optimal és un tema antic iniciat per l'enginyer francès Gaspard Monge l'any 1781. El resultat clau que ara necessitem va ser obtingut per Leonid Kantoròvitx a finals dels anys trenta. (Per la seva obra Kantoròvitx va obtenir el Premi Stalin l'any 1949 i el Premi Nobel d'economia el 1975.) Aquesta àrea és ben viva, com ho han posat de manifest dos llibres recents, cabdals, publicats per Cédric Villani (Medalla Fields del 2010).

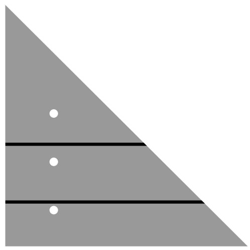
El nostre problema es resol amb la construcció de «diagrames de Voronoi amb pesos»: donada qualsevol massa (l'àrea d'un polígon convex) i un conjunt de llocs amb pesos (és a dir, n punts diferents i números reals associats a aquests de suma total nul·la), assignem a cada lloc tots els punts del polígon per als quals «la distància al lloc al quadrat menys el pes de la ubicació» és mínima. Això dóna una partició del polígon convex en trossos convexos!

El resultat que necessitem és el següent:

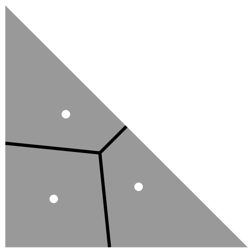
TEOREMA 1 (KANTORÒVITX [1938] ET AL.). *Donat un conjunt de $n \geq 2$ punts diferents del pla, i un polígon qualsevol, existeix una assignació* única *de pesos de manera que el diagrama de Voronoi amb pesos per a aquests punts i aquests pesos subdivideix el polígon en n trossos convexos de la mateixa àrea.*

Dit d'una altra manera, l'espai de configuracions $F(\mathbb{R}^2, n)$ de totes les ènuples de punts diferents en el pla parametritza les particions de Voronoi amb pesos en n trossos convexos de la mateixa àrea. Per què ens ajuda aquest resultat? Perquè entenem molt bé l'espai $F(\mathbb{R}^2, n)$!

Suposem, per exemple, que el polígon sigui un triangle i $n = 3$. Si els tres punts es troben sobre una recta vertical, llavors la partició en trossos de la mateixa àrea tindria aquest aspecte:



Ara bé, si tenim la sort de triar els tres punts de manera adequada, llavors podem aconseguir una partició en trossos de la mateixa àrea i el mateix perímetre:

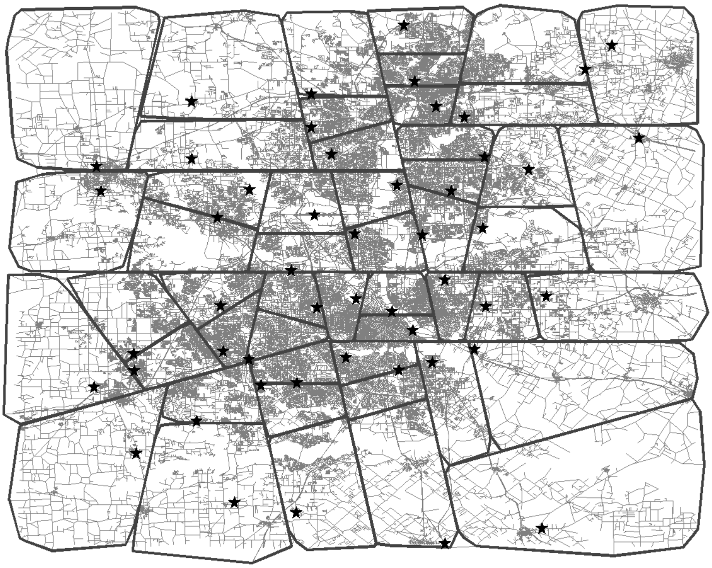


És, però, sempre possible fer una «elecció afortunada» per als n punts?

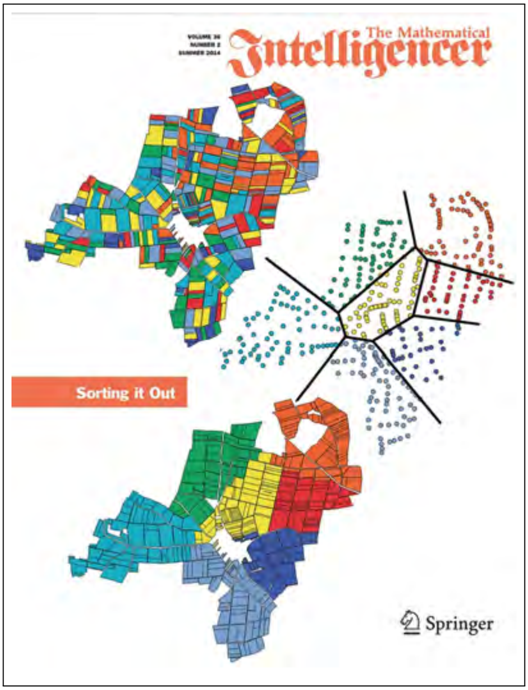
Un comentari

El transport optimal té un vessant pràctic que el fa molt útil en investigació operativa. Això està exemplificat de manera gràfica, entre d'altres, pels treballs de John Gunnar Carlsson, del departament d'enginyeria industrial i de sistemes, de la Universitat de Califòrnia del Sud:[1]

1 La figura mostra el mapa d'una ciutat, en el qual cada zona conté la mateixa longitud total de carrers. Això és útil per a les empreses que proporcionen màquines llevaneus o serveis de neteja, o que reparteixen correu i que han de recórrer els carrers de cada zona d'una manera eficient: establint aquestes zones tots els vehicles de l'empresa tindran la mateixa feina.



o els de Peter Gritzmann, del departament de matemàtiques, de la Universitat Politècnica de Munic, que utilitza el transport optimal per a la reassignació de terrenys de conreu a les àrees rurals de Baviera:



The Mathematical Intelligencer, 36 (2), 2014.
Amb l'amable permís de Springer Science+Business Media.

D'altra banda, el transport optimal és important en física (i també en matemàtiques molt dures, si s'hi dedica Villani). On l'hem de col·locar, doncs?

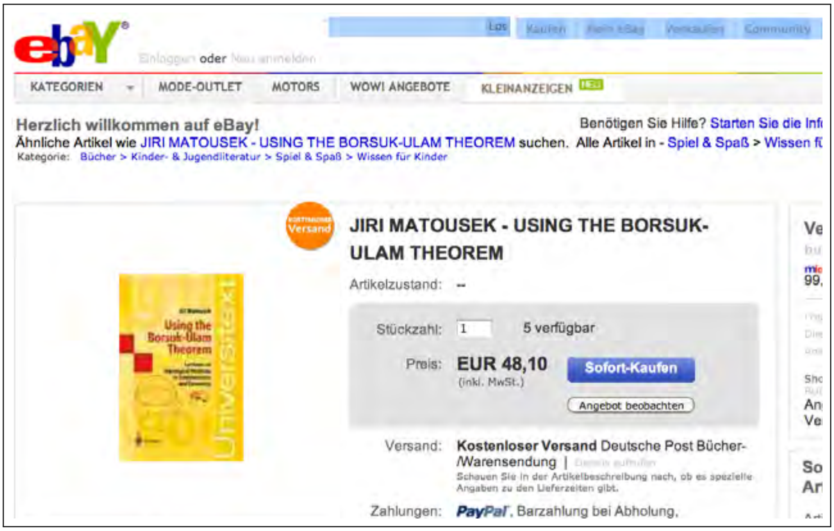
La resposta és que les categories tradicionals simplement ja no serveixen i les hauríem de descartar. El que s'ha vist fins ara és un problema de «matemàtica recreativa» que, per ser modelitzat i resolt, necessita mètodes de «matemàtica aplicada» (com el transport optimal) i de «matemàtica pura» (topologia algebraica). Les matemàtiques pures, les aplicades i les recreatives no es poden separar i no s'haurien de separar. Hi ha també altres parts de la ciència que pertanyen a les matemàtiques *sense fronteres*, com ara la informàtica (teòrica) i la investigació operativa (matemàtica). Si és ciència de qualitat, diguem-ne, senzillament, «matemàtiques».

A Berlín, en el context del centre de recerca MATHEON, Mathematics for Key Technologies, intentem evitar totes aquestes categories —al final, l'única distinció que podríem fer seria entre «matemàtiques» i «aplicacions de les matemàtiques».

La qüestió, en aquest article, és però una altra: a les matemàtiques hi ha «grans teories» i «petits problemes». De vegades podem necessitar grans teories per resoldre problemes (aparentment) petits i ara en discutim un exemple. De totes maneres, alhora, això funciona també en sentit contrari: fem servir problemes petits per posar a prova les grans teories, per veure què podem fer amb un problema concret. Hi ha grans teories en els prestatges de les biblioteques universitàries per a les quals mai no hi ha hagut cap càlcul concret o exemple resolt...

Les canonades, II

El segon tipus de canonades que farem servir prové de la topologia algebraica. Concretament, hi ha un procediment de modelització ben conegut, anomenat esquema d'espai de configuracions/aplicació de prova (CS/TM), desenvolupat per Sarkaria, Živaljević i d'altres, que converteix problemes de geometria discreta en qüestions de topologia algebraica equivariant. Dit d'una manera resumida, es prova que si el problema té un contraexemple, llavors hi ha espais topològics X i Y, on X és un *espai de configuracions* per al problema i Y és un espai de valors (sovint una esfera), i un grup finit de simetries G tals que hi ha una aplicació contínua $X \to_G Y$ que conserva les simetries. En conseqüència, si no existeix cap aplicació equivariant $X \to_G Y$ llavors no hi ha contraexemples i el problema està resolt. El teorema de Borsuk-Ulam, que diu que no hi ha cap aplicació $S^d \to_{\mathbb{Z}/2} S^{d-1}$, és el primer exemple important d'un teorema d'aquest tipus. Tot això està meravellosament explicat en el llibre *Using the Borsuk-Ulam theorem*, de Jiří Matoušek [13]. De fet, tothom l'hauria de conèixer ja que és un «material per a nens» —tal com podeu comprovar si busqueu el llibre a *ebay*, on el vaig trobar catalogat a la llista de «divertiments i jocs per a nens»!



Bé, si aquest joc de nens no ens és suficient, farem servir instruments més seriosos per a tractar el petit problema de la partició d'un polígon; concretament, la teoria equivariant d'obstruccions. Es tracta d'un mètode per a decidir sistemàticament si existeixen aplicacions equivariants $X \to_G Y$. Es pot trobar exposat d'una manera extraordinàriament clara i precisa (tot i que sense dibuixos ni exemples) a la secció II.3 del llibre *Transformation groups*, de Tammo tom Dieck [8]. Per tal de veure que hi ha una elecció afortunada per a les configuracions de punts que garanteix particions del nostre polígon amb la mateixa àrea i el mateix perímetre —per a algun n—, hem d'interpretar i avaluar els termes que apareixen en el resultat següent, en el cas del nostre problema:

Obstruction theory 115

(3.15)). If X_1 is path-connected, then so is X_k for $k \geqq 1$. Then the first main result of obstruction theory is

(3.10) Theorem. *For each integer $n \geq 1$ there exists an exact obstruction sequence*

$$[X_{n+1}, Y]_G \to \mathrm{Im}([X_n, Y]_G \to [X_{n-1}, Y]_G) \xrightarrow{c^{n+1}} \mathfrak{H}_G^{n+1}(X, A; \pi_n Y)$$

which is natural in (X, A) and Y.

The exactness of this sequence means that each homotopy class $X_{n-1} \to Y$ which is extendable over X_n has an associated obstruction element in the cohomology group $\mathfrak{H}_G^{n+1}(X, A; \pi_n Y)$ (as defined in (3.3)); this obstruction element is zero if and only if the homotopy class $X_{n-1} \to Y$ is extendable over X_{n+1}.

Alguns detalls

L'esquema CS/TM per al nostre problema ens porta d'una manera natural al plantejament següent:

$$\mathcal{F}(2,n) \underset{\mathfrak{S}_n}{\longrightarrow} F(\mathbb{R}^2,n) \underset{\mathfrak{S}_n}{\longrightarrow} \mathrm{EAP}(P,n) \underset{\mathfrak{S}_n}{\longrightarrow} S^{n-2}.$$

Es tracta d'una cadena d'objectes molt concrets (que són espais topològics) i d'aplicacions equivariants desconegudes (que són aplicacions contínues que respecten la simetria en relació amb el grup $\mathfrak{S}_n$ de permutacions):

- $\mathrm{EAP}(P,n)$ és l'espai de configuracions de totes les particions de P en n trossos convexos de la mateixa àrea, el qual és un espai de configuracions *no* gaire ben entès (vegeu León [12]).
- S^{n-2} representa una $(n-2)$-esfera particular, definida per

  $$\{y \in \mathbb{R}^n : \quad y_1 + \cdots + y_n = 0, \\ y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1\}.$$

  Sobre aquesta esfera, el grup $\mathfrak{S}_n$ hi actua simplement per permutació de les coordenades.
- $\mathrm{EAP}(P,n) \to S^{n-2}$ envia cada partició en n trossos de la mateixa àrea $(P_1,\dots,P_n)$ a «perímetres menys la mitjana, normalitzats» per tal d'obtenir un punt de l'esfera —sota la hipòtesi que no hi ha cap partició per a la qual tots els perímetres siguin iguals. Aquesta aplicació és $\mathfrak{S}_n$-equivariant: una permutació dels trossos P_i correspon a una permutació dels perímetres normalitzats i, per tant, de les coordenades de l'esfera.
- $F(\mathbb{R}^2,n)$ és l'espai de configuracions de n punts diferents, etiquetats, en el pla

  $$\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{2\times n} : x_i \neq x_j \text{ for } i < j\}.$$

  En contrast amb $\mathrm{EAP}(P,n)$, aquest espai està *força* ben entès. És el complementari d'un arranjament d'hiperplans complexos i això explica bona part de la seva geometria i la seva topologia; la literatura rellevant comença amb un article clàssic de l'any 1962 de Fox i Neuwirth [9].
- $F(\mathbb{R}^2,n) \to \mathrm{EAP}(P,n)$ és l'aplicació de transport optimal, quan fa correspondre a $(x_1,\dots,x_n)$ el seu diagrama de Voronoi amb pesos amb totes les cel·les de la mateixa àrea. Es tracta d'una aplicació ben definida, contínua i equivariant, l'existència de la qual és deguda a Kantoròvitx (1938); una referència recent interessant és Geiß, Klein, Penninger i Rote [10].
- $\mathcal{F}(2,n)$ és un complex cel·lular finit i regular que modela $F(\mathbb{R}^2,n)$ —de fet, és un retracte de deformació equivariant. És de dimensió $n-1$, té $n!$ vèrtexs, indexats per permutacions (que corresponen a configuracions

de punts en el pla en les quals els punts estan ordenats d'esquerra a dreta d'acord amb una determinada permutació), i té $n!$ cel·les maximals, també indexades per permutacions (que corresponen a configuracions de punts en el pla en les quals els punts estan sobre una recta vertical, ordenats d'acord amb una determinada permutació). Aquestes cel·les maximals tenen l'estructura combinatòria d'uns politops *ben* clàssics: els permutaedres!

Aquest model de complex cel·lular sembla que va ser descrit explícitament per primera vegada a [7], tot i que un altre cop ens podem remuntar fins a Fox i Neuwirth [9].

- $\mathcal{F}(2,n) \to F(\mathbb{R}^2, n)$ és també una aplicació explícita, una inclusió equivariant.

Aquests són els (molts) elements que entren en joc. El resultat és que si suposem que per a algun n i per a algun P no hi ha cap partició en n trossos de la mateixa àrea i el mateix perímetre, llavors existeix una aplicació equivariant:

$$\mathcal{F}(2,n) \underset{\mathfrak{S}_n}{\longrightarrow} S^{n-2}.$$

Existeix una aplicació com aquesta? Aquest és el tipus de preguntes que es poden respondre amb la teoria equivariant d'obstruccions (EOT).

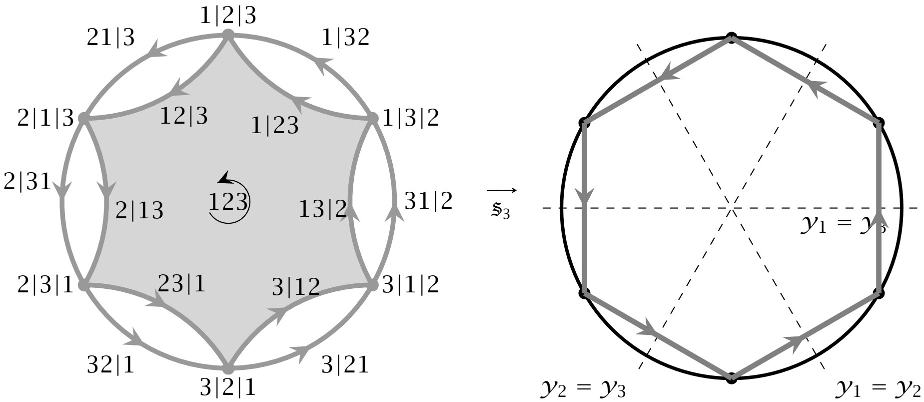
Què fa la EOT? Construeix l'aplicació de manera progressiva, pujant per les dimensions de l'esquelet del complex cel·lular $(n-1)$-dimensional $\mathcal{F}(2,n)$. Com que apliquem un espai amb una acció lliure d'un grup en una esfera de dimensió $n-2$, no hi ha cap problema, tret potser del darrer cas, on l'aplicació ja està fixada a les fronteres ∂c_σ de les $(n-1)$-cel·les c_σ, que són homeomorfes a $(n-2)$-esferes.

L'extensió és possible sense cap problema si totes les aplicacions $f\colon \partial c_\sigma \to S^{n-2}$ tenen grau 0. I, efectivament, totes les aplicacions tenen el mateix grau, ja que busquem aplicacions equivariants. Tanmateix, aquest grau no serà 0 en general, ja que potser hem fet errors en cel·les de dimensió inferior en el camí cap al cim. EOT ens diu ara que l'aplicació es pot *modificar en l'esquelet* $(n-2)$*-dimensional* de tal manera que es pugui estendre a tot el complex *si i només si* alguna classe de cohomologia equivariant amb coeficients no constants en el grup d'homologia $(n-2)$-dimensional d'una $(n-2)$-esfera, la «classe d'obstrucció», s'anul·la. Ho fa?

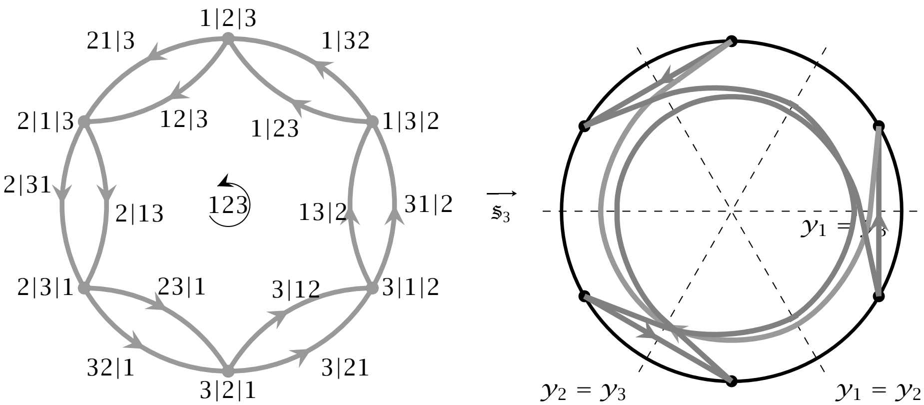
Un passi d'imatges

Per a $n = 3$, hem d'esbrinar si existeix una aplicació $\mathfrak{S}_3$-equivariant $\mathcal{F}(2,3) \longrightarrow S^1$. L'espai $\mathcal{F}(2,3)$ és un complex cel·lular amb 6 vèrtexs, 12 arestes i 6 2-cares hexagonals. A la nostra figura només es mostra un dels hexàgons; però un hexàgon és tan bo com tots junts, atès que una aplicació equivariant queda especificada per la seva imatge en qualsevol dels hexàgons.

Hem d'aplicar l'1-esquelet (graf) del complex cel·lular, en particular la frontera de l'hexàgon, de manera que l'aplicació es pugui estendre a l'interior, com una aplicació al cercle S^1, que *no* té interior. L'aplicació equivariant «òbvia» porta la frontera de l'hexàgon al cercle, girant una volta, tal com indiquen les sis arestes orientades. Això es pot interpretar com una aplicació entre 1-esferes de grau 1, i per tant no s'estén a l'hexàgon.



Podríem intentar modificar l'aplicació canviant-la en una de les sis arestes de l'hexàgon. Tanmateix, com que hem de mantenir l'aplicació *equivariant*, l'aplicació s'hauria de canviar simultàniament a tota l'òrbita, és a dir, a totes les imatges de la nostra aresta per l'acció del grup de permutacions. Ara bé, es pot comprovar que qualsevol canvi de l'aplicació en una aresta afecta dues arestes més de l'hexàgon, tal com s'indica en aquesta figura:



Podem aconseguir una aplicació de grau 0, i per tant una aplicació que es pugui estendre a l'interior de l'hexàgon, fent canvis equivariants com els que hem indicat (sobre ternes d'arestes)? No és difícil veure que això equival al fet següent. Una aplicació equivariant

$$\mathcal{F}(2,3) \xrightarrow[\mathfrak{S}_3]{} S^1$$

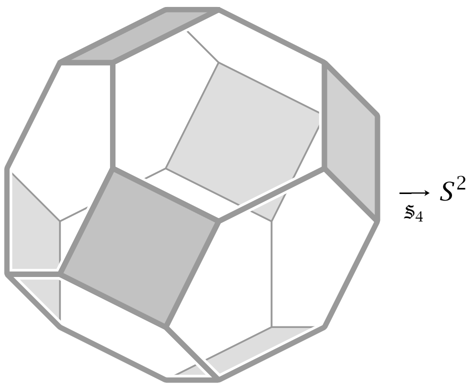
existeix si i només si hi ha una solució de l'equació

$$1 + 3x_1 + 3x_2 = 0$$

amb valors de x_1, x_2 enters, afirmació que és evidentment falsa. En conseqüència, atès que l'aplicació *no* existeix, el contraexemple a la conjectura de Nandakumar i Ramana Rao per a $n = 3$ no existeix. I, per tant, hem establert el cas $n = 3$ (!).

Què passa per a $n = 4$? Resulta que és un problema bastant semblant al cas anterior, però ara a l'esquerra tenim un complex cel·lular de dimensió 3, amb $4! = 24$ vèrtexs i 24 cel·les maximals, que tenen la combinatòria d'un permutaedre. (Els permutaedres estan explicats, per exemple, a [16], que a *ebay* es pot trobar classificat a la categoria d'«esoterisme»...)

Aquí teniu la imatge de la situació:



Es pot veure fàcilment que les 14 cares del permutaedre es divideixen en tres classes d'equivalència separades (òrbites) per l'acció del grup simètric $\mathfrak{S}_4$: són l'òrbita dels 6 quadrats i 2 òrbites de 4 hexàgons cadascuna. Trobem així que una aplicació equivariant

$$\mathcal{F}(2,4) \xrightarrow[\mathfrak{S}_4]{} S^2$$

existeix si i només si hi ha una solució de l'equació

$$1 + 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0$$

amb valors enters x_1, x_2, x_3, la qual cosa és, evidentment, impossible.

Veieu el patró, doncs? Per a n qualsevol, hi ha una aplicació equivariant

$$\mathcal{F}(2,n) \xrightarrow[\mathfrak{S}_n]{} S^{n-2}$$

si i només si l'equació

$$1 + \binom{n}{1}x_1 + \cdots + \binom{n}{n-1}x_{n-1} = 0$$

té una solució amb valors enters, és a dir, si la fila enèsima del triangle de Pascal, un cop tret l'1 del final, no té cap factor comú.

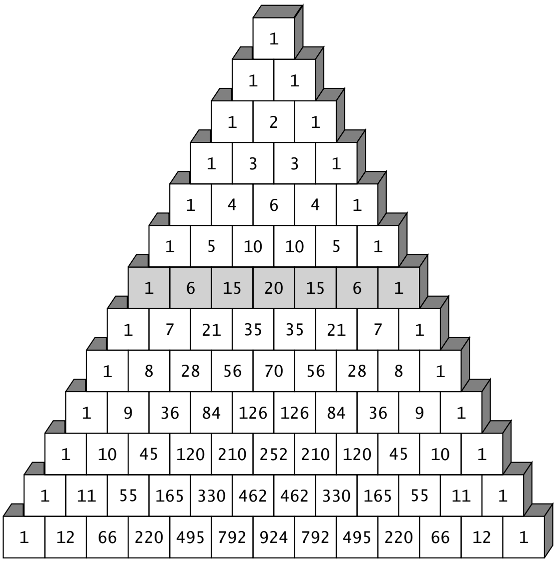
La reina

Hem començat amb un problema senzill de geometria discreta penjat a un blog a l'Índia el 2006 i el trajecte que hem fet fins aquí ens ha portat a fer servir el transport optimal, a idear una estratègia amb aplicacions contínues equivariants, és a dir, topologia, i a calcular la classe d'obstrucció en la cohomologia equivariant. Aquesta classe d'obstrucció no s'anul·la, és a dir, no existeix una aplicació equivariant, si una determinada equació diofàntica no té solució. Hem arribat a la teoria de números.

> Les matemàtiques són —en paraules de Gauss— la reina de les ciències i la teoria de números és la reina de les matemàtiques.
> Sovint condescendeix a servir l'astronomia i altres ciències naturals però en totes les seves relacions ocupa el primer lloc.

Coneixem aquestes paraules a través de Wolfgang Sartorius von Waltershausen, un amic de Gauss que va pronunciar el panegíric a la seva tomba i va escriure la seva primera biografia. Sartorius von Waltershausen era un geòleg i Gauss havia treballat dur en geografia («mesurant el món») i també en astronomia (la redescoberta de Ceres el va fer famós l'any 1801 i no pas les *Disquisitiones Arithmeticae*, que ningú no va entendre aleshores). Per tant, l'afirmació de Gauss sobre la teoria de números com la reina de les matemàtiques i de les matemàtiques com la reina de les ciències és autèntica i té el seu pes.

I tal com passa sovint, per al nostre problema, l'última paraula també pertany a la teoria de números. Podeu manipular fàcilment el triangle de Pascal; és un joc de nens. Probablement us encallareu a la sisena línia —com a la figura següent (extreta del llibre per a nens *El dimoni dels nombres* de l'escriptor alemany Hans Magnus Enzensberger).



Gràfic adaptat de la il·lustració de Rotraut Susanne Berner, del llibre *Der Zahlenteufel* (*El dimoni dels nombres*), de Hans Magnus Enzensberger © Carl Hanser Verlag München 1997.

En efecte, per a $n = 6$, tenim l'equació

$$1 + 6x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 6x_5 = 0$$

que *té* una solució entera (serveix $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 1$ i $x_4 = x_5 = 0$) i, en conseqüència, l'aplicació *existeix*...

I què té el 6 d'especial? I què passa per a n qualsevol? Aquesta pregunta ens porta a l'Índia una altra vegada, però uns cent anys enrere. Al començament del primer volum del *Journal of the Mathematics Club* de Madràs (aquest és el lloc i l'època d'on procedeix Ramanujan!), Balak Ram va publicar el resultat següent:

TEOREMA 2 (BALAK RAM [15]). *L'equació*

$$1 + x_1\binom{n}{1} + \cdots + x_{n-1}\binom{n}{n-1} = 0$$

no té cap solució amb $x_1, \ldots, x_{n-1}$ enters, és a dir, l'interior de la fila n del triangle de Pascal té un factor comú, si i només si n és potència d'un primer.

Així doncs, el problema de Nandakumar i Ramana Rao queda resolt quan n és potència d'un primer però continua obert en el cas general, ara com ara.

TEOREMA 3 (BLAGOJEVIĆ I ZIEGLER [7]). *Si n és potència d'un primer, llavors tot polígon admet una partició «justa» en n trossos.*

En tots els altres casos, per a $n = 6, 10, 12, \ldots$, el problema queda obert —tot i que a [7] provem un teorema molt més general que justament es compleix si i només si n és potència d'un primer. També aquí el resultat se segueix del nostre càlcul EOT: *existeix una aplicació contínua equivariant*

$$F(\mathbb{R}^2, n) \underset{\mathfrak{S}_n}{\longrightarrow} S^{n-2}$$

si i només si n no és potència de primer.

Tres observacions (sobre les demostracions) abans d'acabar

Primera observació (sobre les demostracions en públic)

Segons Victor Klee (1925-2007):

> Les demostracions s'haurien de comunicar només entre adults que ho consentin i en privat.

El que hem presentat aquí, evidentment, no és una demostració sinó només un esbós. Hi falta omplir els detalls. Els detalls són importants.

Segona observació (sobre les demostracions senzilles/boniques)

Potser coneixeu la història de Paul Erdős sobre EL LLIBRE, que Déu manté i que conté les demostracions boniques, les demostracions perfectes, les demostracions perfectament senzilles, les *demostracions del LLIBRE* de teoremes matemàtics. Com al mateix Erdős li agradava dir, un matemàtic no cal que cregui en Déu però hauria de creure en EL LLIBRE. (De passada cal dir que aquesta citació d'Erdős no apareix a la traducció al farsi de [1] del 2001.)

D'altra banda, no tothom està d'acord amb la primera part, tampoc. A Solomon Lefschetz (1884–1972), el semidéu de les matemàtiques de Princeton, se li atribueix haver dit:

> No em vingueu amb les vostres demostracions boniques. No ens preocupem per aquests infantilismes per aquí.

... en particular, quan els seus estudiants es presentaven amb demostracions més senzilles o més completes dels seus resultats.

Tercera observació (sobre les demostracions correctes)

Sobre Solomon Lefschetz, es va dir:

> No va escriure mai una demostració correcta ni va enunciar un teorema incorrecte.

Aparentment, hi havia una part important de veritat en aquesta afirmació i, en part, era inevitable. Lefschetz va ser un pioner en la utilització de mètodes topològics en geometria algebraica. Ell mateix ho va descriure així més endavant:

> Tal com ho veig, temps enrere em va tocar clavar l'arpó de la topologia algebraica dins del cos de la balena de la geometria algebraica.

De totes maneres, ho va fer en un moment en el qual els fonaments matemàtics sòlids de la topologia algebraica encara no s'havien establert i, per tant, hi havia risc i emoció en el fet d'utilitzar mètodes topològics aleshores. Crec que avui hi ha menys risc però no menys emoció.

Quarta observació (sobre les demostracions correctes, II)

Fent matemàtiques, ens guiem per la intuïció i sovint «creiem» més coses de les que podem provar rigorosament. Això porta a enunciats del tipus següent:

> Provem que la resposta és afirmativa per a $n = 4$ i també discutim potències de 2 més altes.

Això està tret de la versió final en *preprint* (la sisena) a `arXiv:0812.2241v6` de l'article de Nandakumar i Ramana Rao [14]. A la versió publicada diu:

> Donem una prova elemental del fet que la resposta és afirmativa per a $n = 4$ i ho generalitzem a potències de 2 més altes.

Efectivament, a [14] s'exposen idees boniques però les proves que es donen per a $n = 4$ i les que s'indiquen per a potències de 2 superiors s'han d'elaborar més.[2] Per una altra banda, Karasev, Hubard i Aronov donen una prova diferent per al cas de potència d'un primer en el problema de Nandakumar i Ramana Rao, publicada a *Geometriae Dedicata* el 2014 [11]. Sembla que no hi ha cap manera de fer rigorós i complet el seu enfocament, un fet que comportaria establir una relació entre la classe d'Euler i les classes d'homologia induïdes per seccions transversals generals.[3] Karasev ho resumeix a la seva pàgina web de la manera següent:

> En aquesta versió donem uns enunciats més clars i una mica més generals dels teoremes principals i ens esforcem a explicar la prova del lema topològic. El nostre mètode amb vista a provar el lema topològic és el mateix que van fer servir D. B. Fuks i V. A. Vasiliev en els casos particulars que van tractar. Una altra aproximació, més tècnica i més rigorosa, al lema topològic es pot trobar a l'article `arXiv:1202.5504` de P. Blagojević i G. Ziegler.

2 Per exemple, el lema 4 de [14] no és cert tal com està enunciat, com es pot comprovar en el cas especial d'un quadrat per al qual una bisecció per una recta vertical dóna lloc a dos rectangles que tenen particions justes en dues parts convexes amb un rang de perímetres que varia contínuament, però per a una bisecció pròxima a la vertical els quadrilàters que s'obtenen només tenen un nombre finit de particions justes.

3 Karasev i d'altres també van considerar el problema de la no existència de l'aplicació equivariant $F(\mathbb{R}^d, n) \to S^{n-2}$ en el cas que n sigui potència d'un primer. Amb aquesta finalitat, van intentar provar que la classe d'Euler amb coeficients girats d'un fibrat vectorial natural sobre la varietat oberta $F(\mathbb{R}^d, n)/\mathfrak{S}_n$ no és nul·la. Tanmateix, la relació entre una secció transversal genèrica i la classe d'Euler del fibrat via la dualitat de Poincaré falla per a varietats obertes. Per a una discussió més detallada, vegeu [7, p. 51].

Cinquena observació (sobre comptar)

Havíem promès de fer tres observacions. Però tots sabem que hi ha tres classes de matemàtics: els que saben comptar i els que no en saben.

Un poema abans d'acabar

Aquest article pretén demostrar com un «problema petit com una mosca» serveix com a banc de proves per a alguns «canons de les grans teories». De problemes petits com una mosca n'hi ha molts més, com ara un problema d'incidència múltiple conegut com el problema de Tverberg amb colors (vegeu, per exemple, [17] i [4]) o el problema de l'existència d'aplicacions altament regulars de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^N$, contínues i que transformin k punts diferents en vectors linealment independents [6]. Els progressos en aquests problemes no només fan servir teories topològiques complicades sinó que depenen també del progrés en la comprensió i en el càlcul d'informació subtil de topologia algebraica sobre els espais de configuracions i del desenvolupament de teoria avançada. Així doncs, hom fa també progressos dins de la topologia algebraica, els quals ens han permès de resoldre problemes tècnics plantejats fa temps, com ara la conjectura generalitzada de Vassiliev [3].

En resum, la relació entre les mosques i les canonades és força més complicada del que es podria pensar a primera vista. Nosaltres *disparem* canonades a les mosques però, de vegades, les mosques s'hi tornen. Deixem parlar el poeta:

Dos errors

Reconec que, en el seu moment,
vaig disparar mosques contra canons.

No en vaig encertar cap de ple,
ho admeto.

[. . .]

Disparar canonades a les mosques, però,
hagués estat caure en l'error oposat.

Hans Magnus Enzensberger

Agraïments

Gràcies a Pavle Blagojević, que ha estat un company meravellós durant molts anys i en molts viatges, i a Arnau Padrol per la revisió de la traducció de l'article i la traducció del poema.

Referències

[1] Aigner, M.; Ziegler, G. M. *Proofs from The Book*. 5a ed. Berlín: Springer-Verlag, 2014.

[2] Bárány, I.; Blagojević, P.; Szűcs, A. «Equipartitioning by a convex 3-fan». *Adv. Math.*, 223 (2) (2010), 579–593.

[3] BLAGOJEVIĆ, P. V. M.; COHEN, F. R.; LÜCK, W.; ZIEGLER, G. M. «On complex highly regular embeddings and the extended Vassiliev conjecture». *Int. Math. Research Notes (IMRN)* (2015), 49 p.

[4] BLAGOJEVIĆ, P. V. M.; FRICK, F.; ZIEGLER, G. M. «Tverberg plus constraints». *Bull. Lond. Math. Soc.*, 46 (5) (2014), 953–967.

[5] BLAGOJEVIĆ, P. V. M.; LÜCK, W.; ZIEGLER, G. M. «Equivariant topology of configuration spaces». *J. Topol.*, 8 (2) (2015), 414–456.

[6] BLAGOJEVIĆ, P. V. M.; LÜCK, W.; ZIEGLER, G. M. «On highly regular embeddings». *Trans. Amer. Math. Soc.* Publicat en línia (maig 2015), disponible a `arXiv:1305.7483`.

[7] BLAGOJEVIĆ, P. V. M.; ZIEGLER, G. M. «Convex equipartitions via equivariant obstruction theory». *Israel J. Math.*, 200 (1) (2014), 49–77.

[8] TOM DIECK, T. *Transformation groups*. Berlín: Walter de Gruyter & Co., 1987. (de Gruyter Studies in Mathematics; 8)

[9] FOX, R.; NEUWIRTH, L. «The braid groups». *Math. Scand.*, 10 (1962), 119–126.

[10] GEIß, D.; KLEIN, R.; PENNINGER, R.; ROTE, G. «Optimally solving a transportation problem using Voronoi diagrams». *Comput. Geom.*, 46 (8) (2013), 1009–1016.

[11] KARASEV, R.; HUBARD, A.; ARONOV, B. «Convex equipartitions: the spicy chicken theorem». *Geom. Dedicata*, 170 (2014), 263–279.

[12] LEÓN, E. *Spaces of convex n-partitions*. Tesi doctoral, FU Berlín, 2015.

[13] MATOUŠEK, J. *Using the Borsuk-Ulam theorem*. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Berlín: Springer-Verlag, 2003. (Universitext)

[14] NANDAKUMAR, R.; RAMANA RAO, N. «Fair partitions of polygons: an elementary introduction». *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 122 (3) (2012), 459–467.

[15] RAM, B. «Common factors of $\frac{n!}{m!(n-m)!}$, $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$». *J. Indian Math. Club (Madras)*, 1 (1909), 39–43.

[16] ZIEGLER, G. M. *Lectures on polytopes*. Nova York: Springer-Verlag, 1995. (Graduate Texts in Mathematics; 152)

[17] ZIEGLER, G. M. «3N colored points in a plane». *Notices Amer. Math. Soc.*, 58 (4) (2011), 550–557.

INST. MATHEMATIK
FU BERLIN
ARNIMALLEE 2
14195 BERLIN, GERMANY
`ziegler@math.fu-berlin.de`