Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 31, núm. 1, 2016. Pàg. 51–71. DOI: 10.2436/20.2002.01.66

Nous resultats i procediments en les matemàtiques del segle XVII: càlcul de màxims a Pietro Mengoli (1626/1627–1686)

M. Rosa Massa-Esteve

Resum: La publicació, l'any 1591, de l'obra *In artem analyticen isagoge* de François Viète (1540–1603) va constituir un pas endavant important en el desenvolupament del llenguatge simbòlic. A començaments del segle XVII la difusió de l'obra de Viète va provocar que altres autors, com ara Pietro Mengoli (1626/1627–1686), també consideressin la utilitat dels procediments algebraics per resoldre tot tipus de problemes. Mengoli va seguir el camí de Viète tot construint una geometria d'espècies, *Geometriae speciosae elementa* (1659), que li va permetre emprar conjuntament l'àlgebra i la geometria per resoldre problemes de quadratura. Mengoli, com Viète, va considerar la seva àlgebra una tècnica en la qual els símbols eren utilitzats no únicament per representar nombres sinó també valors de qualsevulla magnitud. Va tractar amb espècies, formes, taules triangulars, quasi raons i raons logarítmiques. Tanmateix, l'aspecte més innovador del seu treball va ser l'ús de les lletres per tractar directament les figures geomètriques mitjançant les seves expressions algebraiques. En aquest article, analitzo la construcció algebraica d'aquestes figures geomètriques, l'ús de les taules triangulars i la demostració molt original que va fer Mengoli per trobar el màxim d'aquestes figures geomètriques abans del desenvolupament del càlcul de Newton i Leibniz. Aquestes anàlisis il·lustren les idees matemàtiques de Mengoli sobre la funció específica del llenguatge simbòlic com a mitjà d'expressió i com a eina analítica.

Paraules clau: figures geomètriques, taules triangulars, Pietro Mengoli, matemàtiques del segle XVII, màxim d'una figura, logaritmes, expressió algebraica.

Classificació MSC2010: 01A45, 3303, 2603.

Introducció

El desenvolupament de les matemàtiques al segle XVII pot ser entès *grosso modo* per l'impuls de la conjunció de tres forces: a) l'herència de la matemàtica

Part d'aquesta investigació va ser presentada prèviament al congrés internacional de Manchester ICHSTM 2013 dins del simposi «The history and philosophy of mathematical optimization».

clàssica exemplificada per les traduccions llatines del Renaixement de les obres d'Euclides i Arquímedes; b) l'emergència de l'àlgebra i la seva utilització en la geometria conduents a una algebrització de la matemàtica, i c) l'extensió del domini propi de les matemàtiques a l'ús d'algoritmes infinits i a l'estudi d'objectes geomètrics de dimensió infinita. En una època en la qual s'havia recuperat el pensament clàssic a través de les traduccions dels textos grecs, s'introduïren a la vegada en el pensament matemàtic unes tècniques algebraiques molt fèrtils amb un significat que, a vegades, s'oposava a la comprensió de les tècniques clàssiques [16, 17].

Una de les transformacions essencials de les matemàtiques del segle XVII va ser l'establiment d'un nou llenguatge simbòlic com a eina matemàtica. El nou llenguatge de símbols, que no era només una nova manera d'escriure sinó que aportava nous objectes i nous procediments, es va començar a emprar també a les operacions i construccions geomètriques per obtenir nous resultats. De fet, dues de les novetats a les matemàtiques del segle XVII, la creació de la geometria analítica i els primers desenvolupaments del càlcul infinitesimal, van ser impulsats per les connexions entre les expressions algebraiques i les corbes que descriuen les figures geomètriques, en utilitzar procediments algebraics per a resoldre problemes geomètrics.

Un dels punts d'inflexió per al desenvolupament d'aquest llenguatge simbòlic el va constituir la publicació, l'any 1591, de l'obra *In artem analyticen isagoge* de François Viète (1540–1603). En aquesta obra es va fer evident l'avantatge d'utilitzar símbols dins la matemàtica, no únicament per representar les incògnites, sinó també per representar les quantitats conegudes, la qual cosa permetia tractar les equacions de manera general [32, 12] i [25]. A més Viète va introduir una àlgebra «nova», emprant la que va anomenar «logistica especiosa», és a dir, càlculs amb «espècies», enfront de la «logistica numerosa», és a dir, càlculs amb números que ja es desenvolupaven a les àlgebres renaixentistes anteriors. El sistema de Viète era un mètode de càlcul d'espècies, tipus o classes d'elements més que de càlculs directes amb cada element. Les espècies de l'àlgebra de Viète eren tot tipus de magnituds, numèriques —com ara els números naturals i racionals—, però també geomètriques —com ara les longituds, les àrees, els volums o els angles.

L'obra de Viète va tenir una gran difusió[1] i, a principis del segle XVII, un bon nombre de matemàtics va començar a adonar-se que els procediments algebraics eren una eina molt útil per resoldre problemes geomètrics. Entre aquests podem citar Pierre de Fermat (1601–1665),[2] tot i que la figura més influent en la recerca sobre les relacions entre l'àlgebra i la geometria va ser

1 L'àlgebra de Viète va ser la guia per a resoldre equacions a l'aritmètica, a la geometria i a la trigonometria. Un exemple és l'obra enciclopèdica de Pierre Hérigone (1580–1643), *Cursus mathematicus*, París (1634, 1637, 1642), que consta de sis volums, entre els quals un d'àlgebra. Sobre l'obra d'Hérigone vegeu una anàlisi comparativa entre l'àlgebra de Viète i la d'Hérigone a [23], el tractament dels *Elements* d'Euclides a l'obra d'Hérigone a [24] i la influència de l'obra de Viète en l'obra d'Hérigone i la d'aquest en la de Mengoli a [25].

2 Fermat no va publicar mentre vivia i els seus treballs circulaven en forma de cartes i manuscrits. Sobre Fermat vegeu [10, p. 65–71 i 286–292] i [15, p. 229–232].

René Descartes (1596–1650), autor de la coneguda obra *La géométrie*, que figurava com un apèndix en el seu *Discours de la méthode* (Leiden, 1637). Aquest treball de Descartes va suposar un punt de partida per contemplar la geometria des d'una altra perspectiva [11, 8, 3]. A partir de la seva obra, i durant un segle aproximadament, es va dur a terme el procés d'algebrització de les matemàtiques [17, 22], un període en el qual es va passar d'una manera de pensar les matemàtiques gairebé exclusivament geomètrica a un pensament matemàtic més algebraic. Aquesta evolució va ser lenta i desigual. Alguns autors van adoptar les tècniques algebraiques en la seva obra i, a la vegada, van intentar justificar-les o transformar-les d'acord amb la matemàtica clàssica. D'altres, malgrat conèixer l'existència d'aquests procediments, els consideraven aliens al pensament matemàtic i, fins i tot, els refusaven. Finalment, alguns acceptaven aquesta nova manera de pensar com un complement més per al desenvolupament de les seves tècniques matemàtiques [22].

Situat en aquest últim grup, Pietro Mengoli (1626/1627–1686), matemàtic bolonyès deixeble de Cavalieri, seguint les idees algebraiques de Viète, va construir una àlgebra d'«espècies» a la geometria, que li va permetre emprar complementàriament l'àlgebra i la geometria [19, 21]. El nom de Mengoli apareix en el registre de la Universitat de Bolonya en el període 1648–1686, on va succeir el seu mestre Cavalieri a la càtedra de matemàtiques. Es va graduar en filosofia l'any 1650 i tres anys més tard, en lleis civils i canòniques. En un primer període va escriure tres obres de matemàtica pura: *Novae quadraturae arithmeticae seu de additione fractionum* (Bolonya, 1650), *Via regia ad mathematicas per arithmeticam, algebram speciosam et planimetriam ornata maiestati serenisimae D. christinae reginae suecorum* (Bolonya, 1655) i *Geometriae speciosae elementa* (Bolonya, 1659), i més tard, el *Circolo* (Bolonya, 1672). L'any 1660 va ser ordenat sacerdot i, des d'aquest moment i fins a la seva mort, va ser prior de l'església de Santa Maria Magdalena de Bolonya [29].

A les seves obres, Mengoli va establir les propietats de les figures geomètriques definides mitjançant expressions algebraiques que en notació actual s'escriuen $y = Kx^m(1-x)^n$, i va trobar-ne a més les quadratures. Així va demostrar que les àrees entre 0 i 1 d'aquestes figures, amb els coeficients pertinents, valen 1 quan m i n són naturals. En notació actual [19, 21]:

$$(m+n+1)\binom{m+n}{n}\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = 1.$$

Per a racionals de denominador 2, va demostrar [19, 26]:

$$\int_0^1 \sqrt{x^n(1-x)^{(m-n)}}\,dx = \frac{1}{(m/2+1)\binom{m/2}{n/2}}.$$

Mengoli va classificar les figures geomètriques descrites per les corbes $y = Kx^m(1-x)^n$ segons el grau i el tipus d'expressió algebraica, i en va descriure la seva representació situant-les en unes taules triangulars. Va establir també un procediment per a trobar el seu màxim en un interval donat, sense les eines del càlcul infinitesimal que es desenvoluparien pocs anys més tard.

L'objectiu d'aquest article és analitzar la construcció algebraica d'aquestes figures geomètriques, l'ús de les taules triangulars i la singular demostració emprada per Mengoli per a trobar el màxim d'aquestes figures geomètriques, en el context de les matemàtiques del segle XVII. Mostrarem que l'ús del llenguatge simbòlic i de les taules triangulars són factors determinants en la demostració de Mengoli, en la justificació de la seva exactitud, de la validesa del procediment i de la generalitat del resultat.

1 Les expressions algebraiques de les figures geomètriques de Mengoli

A les matemàtiques del segle XVII, la relació entre les ordenades i les abscisses d'una figura geomètrica o de la corba que la descriu, tal com s'entén actualment, encara no estava establerta. El que feien els diferents autors eren intents d'introduir l'àlgebra en la geometria per construir les corbes emprant el nou llenguatge algebraic [2, 3]. Alguns autors definien i feien servir les corbes a través de les seves propietats, d'altres definien les figures geomètriques o les corbes que les determinaven a través de la descripció de la seva construcció punt a punt o bé del seu moviment però encara no definien expressions algebraiques que s'identifiquessin amb les figures geomètriques mitjançant un sistema de coordenades i encara menys prescindien del seu dibuix a l'hora de treballar-hi. Com es mostrarà, Mengoli presentava un procediment original i innovador per a l'època, emprant l'àlgebra en la geometria d'una manera singular.

La *Geometriae speciosae elementa* (1659) de Mengoli, d'ara en endavant *Geometria*, obra de 472 pàgines de matemàtica pura, està composta per sis capítols, que anomena *elements*, i una introducció titulada «Lectori elementario».[3] Ja en el títol, «Elements de geometria d'espècies», indica el singular ús del llenguatge simbòlic en aquesta obra i, en particular, en la geometria. Mengoli,

3 En el primer capítol d'aquesta obra, titulat «De potestatibus, à radice binomia et residua», Mengoli donava les 10 primeres potències d'un binomi, expressades en lletres, tant pel que fa a la suma com pel que fa a la diferència, i explicitava que era possible estendre aquest resultat a potències més grans. El segon, titulat «De innumerabilibus numerosis progressionibus», conté càlculs de nombroses sumes de potències i productes de potències amb una notació pròpia, així com demostracions d'algunes identitats. En el tercer, que té com a títol «De quasi proportionibus», a partir de la definició dels conceptes «raó quasi nul·la», «raó quasi infinita», «raó quasi la igualtat» i «raó quasi un número», desenvolupava una teoria de quasi proporcions, basant-se en la teoria de proporcions del Llibre V d'Euclides. En el quart capítol, titulat «De rationibus logarithmicis», basant-se també en el Llibre V d'Euclides, elaborava una teoria completa de proporcions logarítmiques. En el cinquè, titulat «De proprijs rationum logarithmis», construïa el logaritme d'una raó amb la teoria anterior i demostrava les seves propietats. Finalment, en el sisè, titulat «De innumerabilibus quadraturis», calculava les quadratures de figures mixtilínies desenvolupant l'àlgebra de Viète a través d'unes taules triangulars i la teoria de quasi proporcions.

encara que no intencionadament, va crear un nou camp dins de la matemàtica, una «geometria especiosa» modelada per l'àlgebra especiosa de Viète, ja que tractà la geometria amb el llenguatge especiós, on els símbols representaven no únicament números sinó també els valors de qualsevol magnitud, ja sigui longitud, àrea o volum.

En aquest apartat es mostra a continuació com, a la seva *Geometria*, Mengoli identifica i construeix les figures geomètriques descrites per les corbes, d'equació $y = Kx^m(1-x)^n$, emprant unes expressions algebraiques pròpies, i de quina manera fa servir aquesta identificació. També s'analitza com l'ús d'unes taules triangulars per classificar aquestes figures en grups permet tractar-ne les propietats.

1.1 Sistema de coordenades

Mengoli va començar l'element sisè, titulat «De innumerabilibus quadraturis», explicant el seu sistema de coordenades, definint l'abscissa i descrivint individualment les ordenades de les figures geomètriques a través de les seves abscisses. Mengoli proposà un segment de qualsevol longitud, amb el nom de *Rationalis*, i el va posar en una línia recta que va anomenar *Tota* i que representà amb la lletra t (de vegades amb la lletra u, si valia 1). Va definir una base com un segment de línia recta de mida t o 1 i utilitzà la paraula *abscissa* com la x que s'empra actualment, encara que dins d'aquesta base.[4] Sempre treballava dins d'una base finita on l'abscissa es representava per la lletra a i el residu per la lletra r, igual a $t - a$ o bé a $1 - a$ segons fos la base un valor donat t o bé la unitat 1. Mengoli ho definia així [27, p. 367]:

3. I sigui donada una posició, a la qual se l'anomenarà Base $[AR]$.[5]
4. I un dels punts $[A]$ de l'extrem [de la base] se l'anomenarà fi de les abscisses [origen de la base].
5. I a l'altre punt $[R]$ se l'anomenarà fi dels residus [final de la base].
6. I a la quantitat que [va] des de qualsevol punt de la base fins a la fi de les abscisses $[AB]$, en la mida en què és estesa la mateixa base, se l'anomenarà abscissa $[a]$.[6]

En concret, Mengoli considerava la base AR, on A és la fi de les abscisses, R és la fi dels residus, AB és l'abscissa i BR és el residu (figura 1).

4 Encara que la paraula *abscissa* havia estat emprada per altres contemporanis, sembla que no havia estat utilitzada abans com ho fem actualment. La paraula *abscissa* ja havia aparegut en algun text de Fermat el 1644 [10, p. 195], de Torricelli el 1646 [31, p. 366], de Cavalieri el 1647 [4, p. 858–859] i de degli Angeli el 1659 [1, p. 175–179].

5 Els nombres que apareixen al començament són els nombres d'ordre de les definicions de Mengoli.

6 «3. Sitque data positione; quae dicetur, Basis. 4. Eiusque alterum extremorum punctorum, dicetur, Finis abscissarum. 5. Alterum, Finis residuarum. 6. Et ab unoquoque puncto in basi sumpto, usque ad finem abscissarum, quatenus ipsa basis extenditur, quantitas dicetur Abscissa.». Totes les traduccions del llatí al català són de l'autora.

A ·········· *B* ····················· *R*

FIGURA 1: Definició d'*abscissa*.

Pel que fa a l'ordenada, Mengoli utilitzava aquest terme en lloc d'«applicata», que s'emprava en aquella època.[7] Definia les ordenades per cada valor de l'abscissa de la base, començant per les ordenades de les figures conegudes, com és ara el quadrat (o el rectangle) i el triangle, a partir de la seva construcció sobre cada punt de la base.[8] Així explicava Mengoli com traçar les ordenades d'un quadrat [27, p. 368]:

> 10. Sobre una base és descrit un quadrat, i suposo que des d'un qualsevol dels punts de la base és traçada una recta fins al costat oposat, mantenint-la sempre paral·lela als costats del quadrat; la qual serà anomenada «ordenada dins del quadrat».[9]

En el cas de les figures mixtilínies (figures determinades per una part recta i per l'altra part corba), Mengoli no va definir les ordenades mitjançant la seva construcció, sinó que va explicar que eren iguals a les abscisses o a les potències de les abscisses; així per a les ordenades de la paràbola deia: «una ordenada qualsevol és abscissa al quadrat», en notació actual, $y = x^2$. Més endavant, quan feia les demostracions de les propietats de les figures, la igualtat entre les ordenades i les abscisses o les potències de les abscisses era també expressada mitjançant la proporció següent, essent 1 la mida de l'interval i y l'ordenada corresponent a l'abscissa x:

$$(1 : y) = (1 : x)^m.$$

L'ús de les proporcions i de la teoria de proporcions euclidiana és una constant en la matemàtica de Mengoli, ja sigui per establir la teoria de quasi proporcions i els logaritmes, com per descriure les operacions aritmètiques entre espècies [20].

1.2 Les expressions algebraiques de les figures geomètriques de Mengoli

Mengoli definia les figures geomètriques que volia quadrar com «esteses per les seves ordenades», les va anomenar «formes» i les va representar mitjançant

7 Descartes defineix les ordenades com «celles qui s'appliquen par ordre»; vegeu [8, p. 67], on hi ha una nota que diu: «L'equivalent de «ordination aplication» era utilitzat en el segle XV traduint Apolonius». La nota també cita que el *Diccionari matemàtic* d'Hutton (1796) dóna *aplicada* com la paraula corresponent a l'*ordenada* i diu que també s'utilitza «ordenada aplicada». De fet, Fermat i Cavalieri utilitzaven «applicata». Mengoli en el *Circolo* les anomenà «ordinatamente applicate».

8 Sembla que Fermat donava un sistema de coordenades similar per definir les corbes però la seva ordenada no era sempre perpendicular i, en aquests casos, donava l'angle que formava amb l'eix d'abscisses; vegeu [10, p. 91–131].

9 «10. Super basi describatur quadratum: & ab uno quolibet puncto in basi sumpto, recta ducatur, usque ad oppositum latus, reliquis lateribus quadrati parallela: quae dicetur, Ordinata in quadrato.».

una expressió algebraica FO. $a^m r^n$, on FO. denota la forma, a l'abscissa x i r el residu $(1-x)$. Mai no va mencionar la paraula *corba*, sinó que va parlar de *figura* o *forma*, paraula que s'utilitzava en els segles anteriors i que s'identificava amb la mesura de la qualitat d'una quantitat, com ara a l'obra de Nicolas Oresme (1323–1382) que du per títol *Tractatus de latitudinibus formarum* (1346) [6, 7].

Primer descrivia les figures conegudes com ara el quadrat i el triangle, i finalment les «formes» esteses per qualsevol ordenada del tipus $y = x^m(1-x)^n$. Mengoli expressava algebraicament el quadrat [27, p. 368]:

> 12. I el quadrat estès per les seves «ordenades» serà anomenat «Forma de tots els racionals» i «Forma de totes les *totes*», i és representat amb els caràcters FO. u i FO. t.[10]

Definia el triangle com la «Forma de totes les abscisses» (estès per l'ordenada $y = x$) i el representà algebraicament amb el caràcter FO. a. Les paràboles són la «Forma de totes les abscisses al quadrat», la «Forma de totes les abscisses pels residus (uniprimes)», i la «Forma de tots els residus al quadrat»; els representà amb els caràcters FO. a^2, FO. ar, FO. r^2 [esteses per $y = x^2$, $y = x(1-x)$, $y = (1-x)^2$, respectivament]. I, en general Mengoli definia la figura estesa per qualsevol ordenada emprant l'expressió «tales» [27, p. 369]:

> 23. I, generalitzant, si sobre la base es forma una figura, estesa no solament per ordenades dins d'un quadrat, en la qual una ordenada qualsevol és considerada com algun element dels de la taula proporcional [$x^m(1-x)^n$ essent x l'abscissa], [aquesta figura] serà anomenada «Forma de tots tals proporcionals» i serà representada amb els caràcters pertinents; per exemple «Forma de totes les abscisses al cub (*tertiae*)», FO. a^3 [estesa per $y = x^3$], «Forma de tots els productes de les abscisses al quadrat pel residu (*biprimae*)», FO. a^2r [estesa per $y = x^2(1-x)$], «Forma de tots els productes de l'abscissa pels residus al quadrat (*unisecundae*)», FO. ar^2 [estesa per $y = x(1-x)^2$], «Forma de tots els residus al cub (*tertiae*)», FO. r^3 [estesa per $y = (1-x)^3$], i així indefinidament.[11]

Tanmateix, Mengoli volia assegurar-se que cadascuna d'aquestes expressions algebraiques definides per descriure les figures geomètriques, que eren objectes algebraics nous, podia ser identificada amb la figura corresponent a través d'una construcció. Així a la tercera proposició de l'element sisè demostrava que, proposada una expressió algebraica associada a una forma o figura geomètrica i donada una abscissa, sempre es podia construir una ordenada corresponent a aquesta abscissa dins d'aquesta figura geomètrica. Mengoli ho plantejava amb

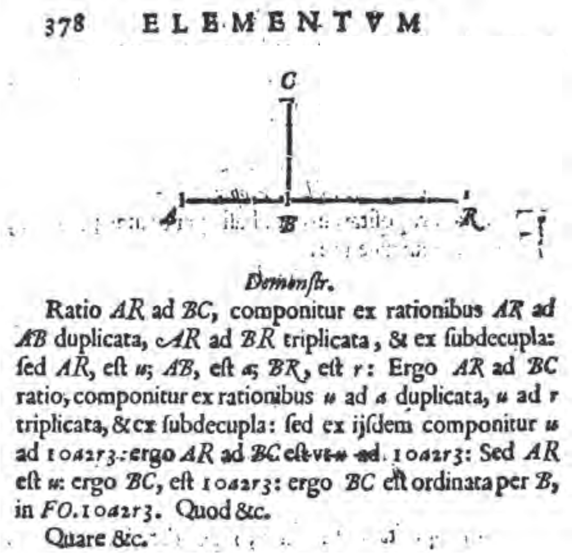
10 «12. Et quadratum, per suas ordinatas extensum, dicetur, Forma omnes rationales, & Forma omnes totae. & significabitur characteribus FO. u & FO. t.».

11 «23. Et generaliter, si super basi concipiatur figura, extensa non nisi per ordinatas in quadrato: & in qua, unaquaelibet ordinata, est assumpta quaedam in tabula proportionalium: dicetur, Forma omnes tales proportionales. aptoque significabitur charactere. vt Forma omnes abscissae tertiae, FO. a^3: Forma omnes biprimae, FO. a^2r: Forma omnes unisecundae, FO. ar^2: Forma omnes residuae tertiae, FO. r^3 & sic deinceps.».

la paraula *problema*, ja que es tractava d'una construcció i no d'un teorema, i el resolia per a una forma concreta, FO. $10a^2r^3$. El que calia era traçar una recta y, perpendicular a la base, que per una abscissa donada x verifiqués la proporció: $(1 : y) = (1 : x)^2(1 : (1 - x))^3(1 : 10)$. Fent la composició de raons, com que eren iguals els numeradors havien de ser iguals els denominadors, i així trobava el valor de l'ordenada $y = 10x^2(1-x)^3$. Mengoli aquí dibuixava un eix horitzontal AR i una línia perpendicular (no en el punt mitjà) amb la lletra B sobre la base i la lletra C al final de la línia perpendicular (figura 2). Mengoli descrivia la construcció i la demostració d'aquesta manera [27, p. 377–378]:

Problema 1. Proposició 3.

Trobeu l'ordenada d'una forma [figura geomètrica] proposada, per un punt donat i en una base donada.[12]


378 ELEMENTVM

Demonstr.

Ratio *AR* ad *BC*, componitur ex rationibus *AR* ad *AB* duplicata, *AR* ad *BR* triplicata, & ex subdecupla: sed *AR*, est *u*; *AB*, est *a*; *BR*, est *r*: Ergo *AR* ad *BC* ratio, componitur ex rationibus *u* ad *a* duplicata, *u* ad *r* triplicata, & ex subdecupla: sed ex ijsdem componitur *u* ad 10*a*2*r*3: ergo *AR* ad *BC* est ut *u* ad 10*a*2*r*3: Sed *AR* est *u*: ergo *BC*, est 10*a*2*r*3: ergo *BC* est ordinata per *B*, in *FO*.10*a*2*r*3. Quod &c.

Quare &c.

FIGURA 2: Proposició 3 [27, p. 378].

Hipòtesi.

Això és, proposada FO. $10a^2r^3$ [expressió algebraica], sobre una base donada AR, en la qual un punt B és donat, és necessari trobar l'ordenada per B.[13]

12 «Probl. 1. Prop. 3. Formae propositae, in data basi, per datum punctum, ordinatam invenire.».

13 «*Hypoth.* Esto proposita FO. $10a^2r^3$, super data basi AR, in qua datum punctum B. Oportet per B ordinatam invenire.». Es transcriuen tots els apartats de la demostració.

Construcció.

Donat AR, i donats AB, BR, es trobarà la recta BC, a la qual AR té una raó composta de les raons donades AR a AB al quadrat, AR a BR al cub, i de la raó un dècim. I serà traçada BC perpendicular a AR. Afirmo, doncs, que BC és l'ordenada per B, dins de [la figura] FO. $10a^2r^3$.[14]

Demostració.

La raó AR a BC serà composta de les raons AR a AB al quadrat, AR a BR al cub, i d'un dècim; però AR és u [1]; AB és a; BR és r $[1-a]$. Llavors la raó AR a BC serà composta de les raons u a a, al quadrat, u a r, al cub, i d'un dècim. Però u a $10a^2r^3$ serà composta d'aquestes. Llavors AR a BC és tal com u a $10a^2r^3$. Però AR és u, d'aquí BC és $10a^2r^3$; en conseqüència, BC és l'ordenada per B, dins de FO. $10a^2r^3$.[15]

De fet, a cada abscissa x li correspon el valor $10x^2(1-x)^3$, que és el que mesura la recta perpendicular que va de B a C, essent C un punt de la línia que descriu la figura, nosaltres diríem la corba, i l'anomena ordenada de l'abscissa B dins de la figura FO. $10a^2r^3$. Mengoli no dóna valors particulars d'aquesta correspondència. Fa la demostració per a una figura qualsevol, però considera que és certa per a totes les altres figures fent les raons corresponents.

Cal remarcar que Mengoli en aquesta demostració no només treballava amb proporcions de segments sinó que també identificava els segments amb les lletres de l'expressió algebraica i igualava el producte de segments amb la composició de raons, emprant la teoria euclidiana de proporcions. Tanmateix, Mengoli no va definir una àlgebra de segments com va fer Descartes a la seva *Géométrie*, és a dir, no va donar una interpretació geomètrica de cadascuna de les operacions algebraiques que definia sinó que va demostrar, per a una mesura donada de l'interval, com construir l'ordenada per un punt donat emprant la composició de raons i la seva definició d'ordenades iguals a les abscisses de les seves figures geomètriques. La seva introducció de l'àlgebra dins la geometria té més similituds amb els procediments de Viète. Aquest també emprava la teoria de proporcions com un lligam, però feia diagrames sense utilitzar sistemes de coordenades i verificava les construccions de les solucions de les equacions de segon grau sense assumir cap connexió entre les ordenades i les abscisses. Quan es menciona la relació entre les ordenades i les abscisses en una corba, hom pensa immediatament en Fermat i en la seva obra *Ad locos planos et solidos isagoge* de 1636. Tot i que Mengoli podria haver pres la inspiració en l'obra de Fermat, només va establir la relació per a algunes

14 «*Constr.* Data AR, datisque AB, BR, inveniatur recta BC, ad quàm AR, rationem habet compositam ex datis rationibus, AR ad AB duplicata, AR ad BR triplicata, & ex ratione subdecupla:& collocetur BC perpendiculariter ad AR. Dico BC, esse ordinatam per B, in FO. $10a^2r^3$.».

15 «*Demonstr.* Ratio AR ad BC, componitur ex rationibus AR ad AB duplicata, AR ad BR triplicata, & ex subdecupla: sed AR, est u; AB est a; BR est r: Ergo AR ad BC ratio, componitur ex rationibus u ad a duplicata, u ad r triplicata, & ex subdecupla: sed ex ijsdem componitur u ad $10a^2r^3$: ergo AR ad BC est ut u ad $10a^2r^3$: sed AR est u: ergo BC est $10a^2r^3$: ergo BC est ordinata per B, in FO. $10a^2r^3$. Quod&c. Quare &c.».

figures geomètriques, com ara les determinades per $y = Kx^m(1-x)^n$ i no va mencionar haver trobat un principi general com va afirmar Fermat en la seva *Isagoge* [10, p. 91]. Mengoli no va tractar ni problemes sòlids, ni llocs geomètrics, com va fer Fermat; a més, el mètode d'identificació algebraica de Mengoli no pot ser aplicat per a resoldre aquests altres problemes geomètrics.

Tanmateix, la recerca de Mengoli és profundament original ja que, en construir l'ordenada dins d'una figura per una abscissa donada, va establir una identificació entre els nous objectes algebraics i les figures geomètriques que li permetia tractar les figures geomètriques mitjançant les seves expressions algebraiques, sense necessitat de dibuixar-les. De fet, Mengoli va fer tres dibuixos en tota la *Geometria*, i més tard en el *Circolo* (1672), on calculà la quadratura del cercle, no en va fer cap [26].

1.3 Les taules triangulars de les figures geomètriques

Després de definir les figures geomètriques anteriors i assignar-les-hi les expressions algebraiques corresponents, Mengoli procedeix a treballar amb aquests nous objectes algebraics, ordenant-los en unes taules triangulars, inspirades pel triangle combinatori (també conegut per *triangle de Pascal*).[16] Aquestes taules eren una eina molt utilitzada per Mengoli dins la *Geometria* ja que li permetien classificar els elements de la taula en tipus o grups, segons els exponents i el lloc que ocupaven, i d'aquesta manera podia estudiar les propietats de molts elements simultàniament.[17]

Mengoli ordenà les expressions algebraiques que representaven les figures geomètriques en una taula triangular infinita que anomenà *Tabula Formosa* («taula de les formes»). Vegeu la taula de les formes com l'escrivia Mengoli a la figura 3 i, a la figura 4, la nostra interpretació gràfica. L'expressió del vèrtex, FO. u, representa un quadrat de costat 1. Les dues expressions algebraiques de la primera fila representen dos triangles. El primer triangle, FO. a, està determinat per la bisectriu del primer quadrant $y = x$, l'eix d'abscisses i la línia recta $x = 1$ i el segon triangle, FO. r, està determinat per la línia recta $y = 1-x$ traçada des de l'extrem $(1,0)$ al $(0,1)$ i l'eix d'abscisses. Les tres expressions algebraiques de la segona fila estan determinades per les ordenades d'una paràbola, l'eix d'abscisses i la línia recta $x = 1$. La primera, FO. a^2, determinada per les ordenades $y = x^2$; la segona, FO. ar, per les ordenades $y = x(1-x)$, i la tercera, FO. r^2, per les ordenades $y = (1-x)^2$ i de la mateixa manera descriuríem les altres files.

16 El triangle combinatori ha passat a la història com a *triangle de Pascal* ja que Blaise Pascal (1623–1662) va explicar i va demostrar les seves propietats en un estil molt clar [30, 9]. Mengoli probablement no coneixia el tractat de Pascal ja que havia estat publicat el 1665 però el podia haver conegut a través de la seva font, l'obra d'Hérigone, *Cursus mathematicus* (1634) [13].

17 En l'«Elementum primum» els elements de la taula eren nombres, representats per lletres, que, multiplicant-los pels nombres combinatoris, li permetien calcular els sumands $(a^m r^n)$ que formen el desenvolupament d'una potència natural d'un binomi qualsevol. En l'«Elementum secundum» els elements de la taula eren sumatoris de potències i de productes de potències $(Oa^m r^n)$.

$$\text{FO.}\, u$$
$$\text{FO.}\, a \quad \text{FO.}\, r$$
$$\text{FO.}\, a^2 \quad \text{FO.}\, ar \quad \text{FO.}\, r^2$$
$$\text{FO.}\, a^3 \quad \text{FO.}\, a^2 r \quad \text{FO.}\, ar^2 \quad \text{FO.}\, r^3$$

FIGURA 3: *Tabula Formosa.*

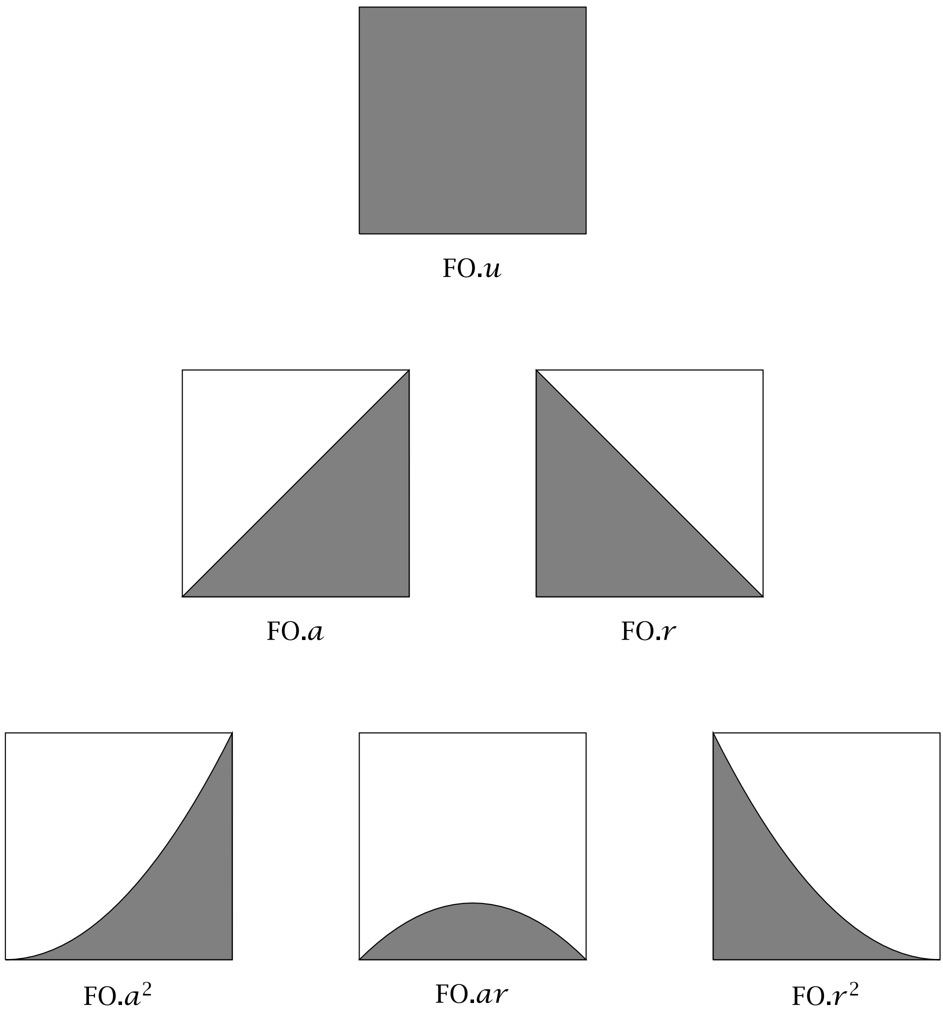


FIGURA 4: Interpretació actual de les figures geomètriques.

Aquestes expressions algebraiques de la taula de les formes representaven unes figures geomètriques que ell no dibuixava, tot i que coneixia perfectament el traç de la corba que les determinava. Una evidència d'aquest coneixement es troba al final del capítol sisè, on Mengoli enuncia tot un seguit de resultats sobre aquestes figures geomètriques, sense cap demostració.[18] Mengoli explicava la classificació d'aquestes figures geomètriques segons la posició a la taula, descrivint els angles mixtilinis que formava la línia corba que les determinava, en tallar la base. A més especificava el valor dels angles, i donava noms a les figures: *binangula*, *unicornes*, *bicornes*, *unicornes* i *unangulae*. Així la figura de la segona fila (ell en deia segona base), que és la segona i penúltima, és a dir, FO. $x(1-x)$, era *binangula* i formava dos angles amb la base que valien 45°. Mengoli no detallava a quins angles es referia però es pot deduir que eren els que forma la línia corba en els punts de tall dels extrems de la base. A partir de la tercera fila en endavant, les figures dels extrems de la taula, les primeres i les últimes, FO. x^m i FO. $(1-x)^n$, i les segones i les penúltimes, FO. $x^{m-1}(1-x)$ i FO. $x(1-x)^{n-1}$, eren anomenades *unicornes* i *unangulae*. Les primeres formaven un angle que té una raó entre el seu sinus i el seu cosinus (actualment la seva tangent) proporcional al número d'ordre de la fila. Pel que fa al segon grup, no especificava l'angle però, en ser *unangulae*, es pot deduir que la corba formava un angle de 45° amb un extrem de la base. Les figures restants, FO. $x^m(1-x)^n$, amb m i n diferents de 0 i 1, Mengoli les anomenava *bicornes*. Encara que no explicava el significat d'aquest nom, es pot deduir que *unicornes* i *bicornes* es refereix al fet que la corba forma un angle o dos de 0°, respectivament, en els punts de tall dels extrems de la base, és a dir, es tracta d'un mínim o d'un punt d'inflexió.

Com es pot apreciar, Mengoli utilitzà la posició de les figures geomètriques a les taules triangulars per classificar-les d'acord amb els angles de tall de la corba que descriu la figura amb la base, agrupant-les segons el seu grau i segons la seva posició, mostrant així que coneixia el seu dibuix exactament, ja que donava també el valor quantitatiu dels angles de tall amb la base.

Com s'explica a l'apartat següent, Mengoli classificava també les figures geomètriques de la taula triangular en grups segons el seu màxim. Feia les demostracions per a un sol element del grup i considerava que el resultat era cert per a la resta. Mengoli feia aquesta generalització basant-se en la simetria de la taula triangular i la regularitat de les seves files, afirmació que explicità uns anys més tard en la seva obra *Circolo* (1672) [28, p. 24–25]. Es pot concloure, doncs, que la funció de les taules triangulars en l'obra de Mengoli, per classificar i establir la generalitat dels resultats, esdevé essencial.

2 Màxims de les figures geomètriques de Mengoli

Mengoli, a la *Geometria*, estudià també les figures geomètriques que hem definit en l'apartat anterior, pel que fa a la monotonia i al punt màxim de la corba.

18 Mengoli promet que les donarà més endavant amb l'ajuda de Déu, però sembla que no ho fa [27, p. 390].

Per a trobar el màxim d'aquestes figures geomètriques, Mengoli va considerar tres grups a la taula triangular: el primer, corresponent a les figures que es troben en diagonal al primer costat de la taula *Formosa*, FO. a^m; el segon, en la diagonal oposada de la taula, FO. r^n, i el tercer, en el mig de la taula, FO. $a^m r^n$. En les demostracions mengolianes del màxim de la figura geomètrica, una per a cada grup de la taula triangular, es pot comprovar de nou que Mengoli tenia molt clar el seu dibuix, encara que no l'inclogués.

Pel que fa al primer grup, en el primer teorema demostrà que en les figures geomètriques del primer costat de la taula (en diagonal), FO. a^m, determinades per $y = x^m$, en un interval donat, la unitat, les ordenades eren sempre creixents i que l'ordenada màxima es trobava a l'extrem de la base i valia el mateix que la base, la unitat. La demostració es basava en la mateixa definició de les ordenades, prenia $n = 2$ i emprava la proporció, $1 : y = (1 : x)^2$. Tot seguit, en la prova, partia de la desigualtat de les abscisses i obtenia la desigualtat de les ordenades, a través d'aquesta proporció. També va demostrar, pel que fa al segon grup, que en les figures geomètriques de l'últim costat, FO. r^n, determinades per $y = (1 - x)^n$, les ordenades eren sempre decreixents i que l'ordenada màxima es trobava a l'origen de la base i també valia el mateix que la base, la unitat.

Cal remarcar que Mengoli no comparava únicament potències de números racionals, sinó que aquestes potències, quan expressaven un segment, en aquest cas les ordenades d'una figura, també podien ser comparades i permetien estudiar la monotonia de la corba. Així, encara que les potències tinguin graus més grans que 3, representen segments lineals que mesuren aquestes quantitats, ja que hem definit la base com a unitat.

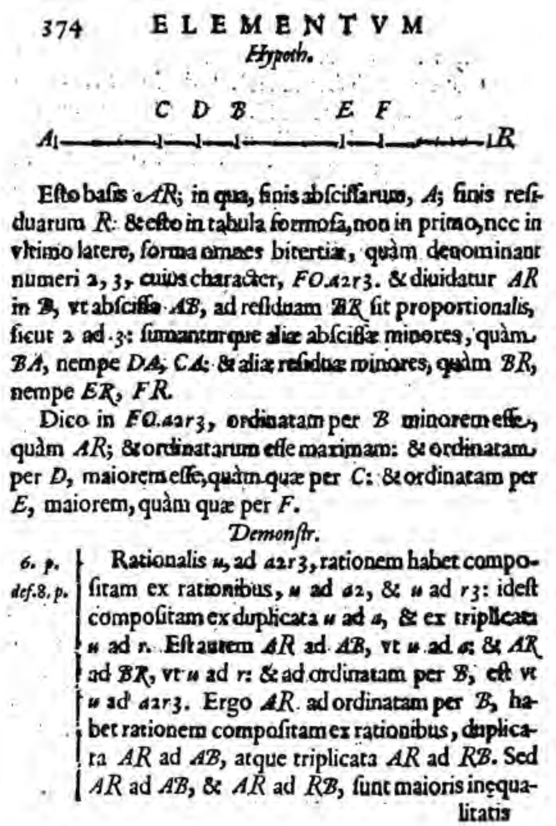
Pel que fa al tercer grup, en el segon teorema, va demostrar que en les figures geomètriques del mig de la taula, FO. $a^m r^n$, determinades per $y = x^m(1 - x)^n$, les ordenades eren primer creixents i després decreixents i prenien el seu valor màxim en una abscissa que divideix la base en la raó dels exponents $x : (1 - x) = m : n$. De fet, si es resol l'equació, s'obté $x_{\max} = m/(m + n)$. Mengoli ho plantejava així al segon teorema [27, p. 373]:

> *Theor. 2. Prop. 2.* A la taula *Formosa*, les figures [formes] que no estan en el primer ni en l'últim costat tindran una ordenada màxima que és més petita que la base [tota], i que la seva abscissa és proporcional al residu com els nombres que determinen aquesta forma [els exponents], i l'ordenada dels residus d'una part [i de les abscisses de l'altra] és més gran com més s'acosten aquests [i aquestes] a l'abscissa del màxim.[19]

L'única representació gràfica en la demostració és un segment amb les lletres A, C, D, B, E, F, R, essent AR la base; A l'origen de les abscisses (ell l'anomena la fi); R és el final de la base (que ell anomena la fi dels residus), C, D, E, F són

19 «Theor. 2. Prop. 2. In singulis formosae tabule, non primi, nec ultimi lateris formis, ordinatarum maxima, minor est, quam tota. &facit abscissam, & residuam, proporcionales, ut numeri, à quibus ipsa forma denominatur: reliquarum verò ex utralibet parte, propior maxime remotiore maior est.».

divisions de la base *A*R i cadascuna representa una abscissa, i *B* representa l'abscissa que correspon al màxim (figura 5).


374 ELEMENTVM

Hypoth.

C D B E F

A R

Esto basis AR; in qua, finis abscissarum, A; finis residuarum R: & esto in tabula formosa, non in primo, nec in vltimo latere, forma omnes bitertiæ, quàm denominant numeri 2, 3, cuius character, FO.a2r3. & diuidatur AR in B, vt abscissa AB, ad residuam BR sit proportionalis, sicut 2 ad 3: sumanturque aliæ abscissæ minores, quàm BA, nempe DA, CA: & aliæ residuæ minores, quàm BR, nempe ER, FR.

Dico in FO.a2r3, ordinatam per B minorem esse, quàm AR; & ordinatarum esse maximam: & ordinatam per D, maiorem esse, quàm quæ per C: & ordinatam per E, maiorem, quàm quæ per F.

Demonstr.

6. p. def.8. p. Rationalis u, ad a2r3, rationem habet compositam ex rationibus, u ad a2, & u ad r3: idest compositam ex duplicata u ad a, & ex triplicata u ad r. Est autem AR ad AB, vt u ad a: & AR ad BR, vt u ad r: & ad ordinatam per B, est vt u ad a2r3. Ergo AR ad ordinatam per B, habet rationem compositam ex rationibus, duplicata AR ad AB, atque triplicata AR ad RB. Sed AR ad AB, & AR ad RB, sunt maioris inequalitatis

FIGURA 5: Representació de la demostració del màxim de Mengoli.

Mengoli presentava la demostració amb una figura concreta, FO. a^2r^3, on l'abscissa B que prenia l'ordenada màxima verificava $AB : BR = 2 : 3$. De fet, resolent l'equació $x_{\max} = 2/5$.

Mengoli primer demostrava que l'ordenada de l'abscissa B és més petita que la base AR, és a dir, que la unitat. Resumim la demostració: sabent que l'abscissa $AB = x$ és menor que 1 i que el residu $r = 1 - x$ és menor que 1, i denotant l'ordenada de l'abscissa B per $\mathrm{Ord}\, B = y$ i la base per $AR = 1$, Mengoli provava que la base AR és més gran que l'ordenada de l'abscissa B, és a dir, que $AR > \mathrm{Ord}\, B$; $1 > y$.

Començava la demostració recordant la igualtat següent, fent referència al primer llibre de la *Geometria*, on tractava les potències i el seu producte:[20]

$$1 : x^2(1-x)^3 = (1 : x^2)(1 : (1-x)^3) = (1 : x)^2(1 : (1-x))^3. \qquad (1)$$

20 Com en altres parts de l'obra Mengoli empra la teoria de proporcions per definir els seus productes de potències.

D'altra banda, amb les notacions proposades establia les proporcions següents:

$$AR : AB = 1 : x; \quad AR : BR = 1 : (1 - x);$$
$$AR : \operatorname{Ord} B = 1 : x^2(1 - x)^3.$$

Llavors per la igualtat anterior (1) i aplicant la propietat transitiva euclidiana,

$$AR : \operatorname{Ord} B = (1 : x)^2(1 : (1 - x))^3.$$

Mengoli concloïa que es verificava la desigualtat entre AR i $\operatorname{Ord} B$, explicant que el producte de les dues raons $(1 : x)^2$ i $(1 : (1 - x))^3$, que són més grans que la unitat, dóna una raó més gran que la unitat, així: $AR : \operatorname{Ord} B > 1$ i en conseqüència, $AR > \operatorname{Ord} B$.

Després per demostrar que l'ordenada de l'abscissa B, que verifica la proporció amb els exponents, és la màxima, provava que l'ordenada de qualsevol altra abscissa C o D, o bé E o F és més petita. Com a exemple d'aquest segon tipus de demostracions provarem que l'ordenada de l'abscissa D és més petita que l'ordenada de l'abscissa B, que és l'abscissa que pren el màxim, és a dir, Mengoli demostrava que $\operatorname{Ord} D < \operatorname{Ord} B$.

Prenent l'abscissa $x = AB$ i $x_1 = AD$ una divisió qualsevol de la base més petita que la divisió AB, llavors per la definició mengoliana de les figures geomètriques, s'estableixen les proporcions següents:

$$\operatorname{Ord} D : AR = \operatorname{Ord} D : 1 = (x_1 : 1)^2((1 - x_1) : 1)^3,$$
$$AR : \operatorname{Ord} B = 1 : \operatorname{Ord} B = (1 : x)^2(1 : (1 - x))^3.$$

Operant i component les dues proporcions resulta,

$$\operatorname{Ord} D : \operatorname{Ord} B = x_1^2(1 - x_1)^3 : x^2(1 - x)^3.$$

Ara es tracta de veure que l'antecedent de la raó, $\operatorname{Ord} D = (x_1)^2(1 - x_1)^3$, és més petit que el conseqüent, $\operatorname{Ord} B = (x)^2(1 - x)^3$, per a qualsevol abscissa D, i així queda vist que l'ordenada per B és màxima.

Per veure que l'antecedent és més petit que el conseqüent Mengoli va emprar un teorema demostrat amb els seus logaritmes que establia la desigualtat següent:

$$(x_1 : x)^2 < ((1 - x) : (1 - x_1))^3. \tag{2}$$

Llavors, de la desigualtat, en resulta: $x_1^2(1 - x_1)^3 < x^2(1 - x)^3$ i, aplicant la propietat transitiva, $\operatorname{Ord} D < \operatorname{Ord} B$.

Finalment, Mengoli demostrava també que l'ordenada per C és més petita que l'ordenada per D (és a dir, que les ordenades són creixents) i que l'ordenada per F és més petita que l'ordenada per E (és a dir, que les ordenades després de l'ordenada màxima són decreixents). Mengoli només ho demostrava per a dos valors qualssevol però afirmava que era cert per a tots els altres valors de l'abscissa. Mengoli va fer totes aquestes demostracions amb procediments similars i emprant resultats obtinguts amb els logaritmes. Cal remarcar que és essencial la relació d'ordre dins l'interval i que la continuïtat de la corba es donava per suposada; Mengoli mai no ho va mencionar ni va suggerir que tingués cap dubte o que li presentés cap problema.[21]

2.1 Els logaritmes a la demostració del màxim

Per tal d'entendre la demostració de la desigualtat (2) presentarem un esbós de la idea mengoliana de logaritme i de les propietats que utilitza en la prova del màxim.

Mengoli exposa la seva teoria de logaritmes en l'*element cinquè*, titulat «De proprijs rationum logarithmis», que comprèn 145 pàgines, amb 34 definicions i 107 proposicions. Mengoli definia el logaritme com el límit de les sumes de termes de la sèrie harmònica. El tractament és complex ja que Mengoli vol demostrar les propietats dels logaritmes en general, utilitzant el llenguatge simbòlic. Treballa amb el llenguatge de les proporcions i defineix el logaritme dels números a través de les raons de termes de la sèrie harmònica que mesuren l'allunyament de la unitat.

Vegem-ne un exemple: per trobar el logaritme de 2 utilitza la raó $(1/5 : 1/10)$ i defineix dues nocions noves, l'hiperlogaritme de 2 i l'hipologaritme de 2. L'hiperlogaritme de $2 = (1/5 : 1/10)$ és $1/5+1/6+1/7+1/8+1/9$. L'hipologaritme de $2 = (1/5 : 1/10)$ és $1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10$. Mengoli afirmava que el logaritme serà el límit d'aquestes dues sumes.[22] Així ho explicava en el «Lectori elementario» [27, p. 69–70].

> Per tant l'hiperlogaritme i l'hipologaritme són quasi iguals. I el logaritme és aquella quantitat a què tendeixen els hiperlogaritmes quan van disminuint i a què tendeixen i els hipologaritmes quan van augmentant, el més petit de tots els hiperlogaritmes i el més gran de tots els hipologaritmes.[23]

I ja en les definicions Mengoli afirmava [27, p. 206],

> Def. 24. Una quantitat més petita que tots els hiperlogaritmes d'una raó i més gran que tots els hipologaritmes s'anomenarà logaritme d'aquella raó.[24]

Vegem tot seguit el teorema dels logaritmes que Mengoli va emprar en la prova del màxim per demostrar la desigualtat (2) $(x_1 : x)^2 < ((1-x) : (1-x_1))^3$. Es tracta d'un teorema de l'*element cinquè* de la *Geometria* que s'aplica a

---

21 Knobloch quan analitza les quadratures de Leibniz remarca també que la condició de continuïtat de la corba és indispensable [14, p. 63].

22 La idea de *quasi proporció* (*quasi igual*, *quasi infinit*, etc.), que esdevé essencial per trobar les quadratures, és també determinant a la definició de límit [18].

23 «Unde hyperlogarithmus, & hypologarithmus quasi sunt aequales. Porrò logarithmus illa est quantitats, ad quam tenduat hyperlogarithmi, cum sempre deinceps minuuntur, & ad quam tendunt hypologarithmi, cum sempre deinceps augentur; omni minor hyprlogarithmo, & omni maior hypologarithmo.».

24 «Def. 24. Quantitas omni minor hyperlogarithmo earumdem rationum, & omni maior hypologarithmo, earumdem Logarithmus dicetur.».

quatre quantitats que tenen les mateixes diferències dues a dues, que anomenà disposades aritmèticament. Així les nostres quantitats, AD, AB, BR, RD dins del segment $AR = 1$ són d'aquest tipus, ja que prenent $AD = x_1$; $AB = x$; $BR = 1 - x$ i $DR = 1 - x_1$, les diferències són iguals a BD, en aquest cas: $AB - AD = x - x_1 = RD - BR = (1 - x_1) - (1 - x) = BD$.

A més dues d'aquestes quantitats estan en una raó determinada i verifiquen, com en l'enunciat del teorema 2 de la pàgina 63, que $AB : BR = x : (1-x) = 2 : 3$.

Per tant, amb aquestes hipòtesis, Mengoli demostrà en la proposició 105, que donem a continuació, que es verificava la desigualtat següent (2):

$$(AD : AB)^2 = (x_1 : x)^2 < ((1 - x) : (1 - x_1))^3 = (BR : RD)^3.$$

Mengoli enuncià la proposició en llenguatge retòric, encara que a la demostració utilitzà com a exponents les lletres b i c [27, p. 338]:

> Prop. 105. Donades quatre quantitats [en aquest cas x_1, x, $1 - x$, $1 - x_1$], disposades aritmèticament [$x - x_1 = (1 - x_1) - (1 - x)$], si es verifica que $x : (1 - x) = b : c$ [en aquest cas $2 : 3$], llavors la raó de la primera quantitat a la segona elevada al número homòleg a la segona quantitat serà més petita que la raó de la tercera a la quarta elevada al número homòleg a la tercera [$(x_1 : x)^2 < ((1 - x) : (1 - x_1))^3$].[25]

Vegem un resum de la demostració:

Siguin x_1, x, $1 - x$, $1 - x_1$ quantitats disposades aritmèticament, llavors $x - x_1 = (1 - x_1) - (1 - x)$. Mengoli va treballar amb les seves inverses que són termes que estan en sèrie harmònica: $1/x_1$, $1/x$, $1/(1 - x)$, $1/(1 - x_1)$. Ja havia basat la seva definició de logaritme en el fet que sempre existeix i que es pot definir el logaritme de les raons de termes de la sèrie harmònica, així:

$$\log(1/x : 1/x_1) = \log(x_1 : x) = e;$$
$$\log(1/(1 - x_1) : 1/(1 - x)) = \log((1 - x) : (1 - x_1)) = f.$$

Però a més, com que $x : (1 - x) = b : c$, llavors $e : f > c : b$ (relació entre logaritmes de les raons i les raons que s'ha demostrat anteriorment). De la proporció es dedueix $eb > fc$, és a dir, $b \log(x_1 : x) > c \log((1 - x) : (1 - x_1))$.

Mengoli va demostrar també la coneguda igualtat del logaritme d'un producte i la suma de logaritmes dels factors, i també la relació corresponent per al logaritme d'una potència, a la proposició 80. Per tant:

$$\log(x_1 : x)^b > \log((1 - x) : (1 - x_1))^c.$$

---

25 «Prop. 105. Quatuor arithmeticè dispositarum quantitatum, si primam ad ultimam, fuerit ut numerus ad numerum erit primae ad secundam totuplicata ratio, quotus est homologus primae, maior, quàm tertiae ad quartam. totuplicata ratio, quotus est homologus quartae, quod si secunda ad tertiam fuerit ut numerus ad numerum: erit primae ad secundam totuplicata ratio, quotus est homologus secundae, minor, quàm tertiae ad quartam totuplicata, quotus est homologus tertiae.».

Com que el logaritme de les potències de les raons és més gran, la potència de la raó $(x_1 : x)^b$, estarà, doncs, més allunyada de la unitat que $((1 - x) : (1 - x_1))^c$, vegeu [20]. Però com que per definició $x_1 < x$ i $1 - x < 1 - x_1$, llavors $x_1 : x$ i $(1 - x) : (1 - x_1)$ són raons més petites que la unitat, $x_1 : x < 1$ i $(1 - x) : (1 - x_1) < 1$. Així també les potències d'aquestes raons seran raons més petites que la unitat i les raons més petites que la unitat, com més lluny de la unitat estan, més petites són: $(x_1 : x)^b < ((1 - x) : (1 - x_1))^c$. En el cas de la demostració de la pàgina anterior, $b = 2$ i $c = 3$, llavors s'obté la desigualtat (2): $(x_1 : x)^2 < ((1 - x) : (1 - x_1))^3$ i operant: $x_1^2(1 - x_1)^3 < x^2(1 - x)^3$, per tant: $\operatorname{Ord} D < \operatorname{Ord} B$.

Si fem una primera comparació del mètode de Mengoli per trobar el màxim amb el mètode de màxims i mínims de Fermat que va tenir molta difusió a Europa i que va ser molt emprat a l'època, podem assenyalar que aquest no utilitza el mètode de Fermat, que quasi segur que coneixia a través de l'obra d'Hérigone. El mètode de Fermat per trobar màxims i mínims data de 1636, i va ser publicat més tard, el 1642, al *Cursus mathematicus* d'Hérigone [5, 13]. S'il·lustrava resolent un problema, la solució del qual era ja coneguda i que tractava de trobar com dividir una línia en dues parts de manera que el producte de les parts fos un màxim. El mètode de Fermat requeria ésser fet de bell nou per a cada potència per conèixer el resultat, mentre la demostració de Mengoli funcionava per a totes les potències de les figures geomètriques a la vegada i només calia conèixer els exponents de l'expressió algebraica. De fet, si es vol calcular el màxim de l'expressió algebraica concreta de Mengoli emprant el mètode de Fermat, cal fer uns càlculs numèrics molt més llargs, començant amb els primers exponents i augmentant el grau, seguint una mena d'inducció. Un altre tret diferenciador dels dos procediments és que l'ús de la idea de derivada es pot interpretar que està implícita en el mètode de Fermat, en canvi en la demostració de Mengoli és absent. A més, Fermat volia explícitament trobar un mètode (com figura al títol *Mehtodus as disquirendam màxima & minimam*), que també va aplicar per a trobar tangents i en òptica. En canvi, Mengoli no pretenia trobar un mètode, només volia mostrar que coneixia la representació de la figura expressada algebraicament.

3 Algunes conclusions

Mengoli va emprar el llenguatge simbòlic com a mitjà d'expressió i com a eina analítica. Va treballar amb espècies, formes, taules triangulars (triangle harmònic) i quasi proporcions emprant el seu llenguatge especiós.

Tanmateix, un dels aspectes més innovadors de la seva investigació rau en la utilització de les lletres i els símbols per formar expressions algebraiques i identificar-les amb les figures geomètriques. Així va poder estudiar-les a través de les seves expressions algebraiques sense necessitat de fer cap construcció geomètrica. En l'obra de Mengoli la representació gràfica de la figura geomètrica no és el traç, que no fa, sinó una acurada descripció de la corba que determina la figura amb informació suficient per poder dibuixar el seu traç sense necessitat de donar valors concrets.

Cal remarcar l'ús de les taules triangulars com a eina de generalització de resultats. Així les descripcions i les propietats de les corbes que determinen les figures geomètriques només depenien dels grups obtinguts en classificar els elements de la taula triangular, d'acord amb els exponents de les expressions algebraiques i amb la seva posició en aquesta taula.

Pel que fa a la demostració del màxim, afirmem que l'ús del llenguatge simbòlic és un factor determinant ja que Mengoli tracta amb la mida d'un segment i considera la raó de dues parts del segment igual a la raó de dos números (els exponents) expressats amb les lletres b i c, tot fent la prova clau de l'*element cinquè* per a qualsevol exponent. Realment el procediment per trobar el màxim és independent de la representació gràfica de la figura geomètrica i la regla pot ser emprada per a totes les potències del mateix tipus.

Mengoli assegura l'exactitud de la demostració utilitzant la seva teoria de logaritmes de raons (nova) que ha fonamentat en la teoria de proporcions dels *Elements* d'Euclides, el seu llibre de matemàtiques per excel·lència. Una vegada més, la teoria de proporcions es presenta com un aval dels seus desenvolupaments i li permet operar amb els segments i establir relacions entre les raons i els logaritmes de les raons.

La demostració de Mengoli és vàlida per a totes les figures geomètriques del mateix grup a la taula triangular, ja que no depèn del valor concret de l'exponent de l'expressió algebraica sinó de la seva identificació emprant raons i relacions entre aquestes i els seus logaritmes.

Mengoli pren també per garantia la taula triangular en la generalització del raonament demostratiu, ja que si un resultat és cert per a una figura d'un grup, llavors ho serà per a totes les altres del grup; d'acord amb la simetria de la taula i la regularitat de les seves files, no cal fer cas per cas. Aquesta validesa de la demostració per a moltes figures a la vegada ens permet assenyalar una altra característica rellevant en les matemàtiques de Mengoli, la generalitat del seu resultat.

Probablement a causa de la notació original i del camí diferent que va emprendre Mengoli, la seva demostració no va tenir un impacte decisiu a les matemàtiques del segle XVII. Tanmateix, les seves contribucions són d'un gran interès ja que conjuntava els principis de la geometria euclidiana amb l'àlgebra nova de Viète, que va desenvolupar d'una manera singular. Aquesta original conjunció de l'àlgebra i la geometria per trobar de manera general nous resultats o per donar fonaments nous a resultats ja coneguts, va ser una de les grans contribucions de l'obra matemàtica de Mengoli.

Agraïments

L'autora agraeix a Craig Fraser la seva invitació a participar en el congrés ICHSTM 2013 i el seu interès en la demostració del màxim de Mengoli que presento. La investigació està inclosa en el projecte del Ministerio de Economía y Competitividad, Subdirección general de Proyectos de Investigación: HAR2013-44643-R.

Referències

[1] Angeli, S. degli *Miscellaneum hyperbolicum, et parabolicum*. Venècia: La Noù, 1659.

[2] Bos, H. J. M. «On the representation of curves in Descartes' *Géométrie*». *Arch. Hist. Exact Sci.*, 24 (4) (1981), 295–338.

[3] Bos, H. J. M. *Redefining geometrical exactness. Descartes' transformation of the early modern concept of construction*. Nova York: Springer-Verlag, 2001. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences)

[4] Cavalieri, B. *Exercitationes geometricae sex*. Bolonya: 1647.

[5] Cifoletti, G. C. *La méthode de Fermat: son statut et sa diffusion. Algèbre et comparaison de figures dans l'histoire de la méthode de Fermat*. París: Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques, 1990. (Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences. Nouvelle Série; 33)

[6] Clagett, M. (ed.). *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motion*. Wisconsin: University of Wisconsin Press, 1968.

[7] Crombie, A. C. *Historia de la Ciencia: de San Agustín a Galileo. Vol. 2: Siglos xiii–xvii*. 3a ed. Madrid: Alianza Universidad, 1980.

[8] Descartes, R. *The geometry of René Descartes*. Nova York: Dover, 1954. [Traduït per D. E. Smith i M. L. Latham]

[9] Edwards, A. W. F. *Pascal's arithmetical triangle. The story of a mathematical idea*. Baltimore, Md: Johns Hopkins University Press, 2002. [Reimpressió revisada de l'original de 1987]

[10] Fermat, P. *Œuvres de Fermat*. Tannery, P.; Henry, C. (ed.). París: Gauthier-Villars, 1891–1922. 4 v. i supp.

[11] Giusti, E. «La «Géométrie» di Descartes tra numeri e grandezze». *Giornale critico della filosofia italiana*, 66 (68) (1987), 409–432.

[12] Giusti, E. «Algebra and geometry in Bombelli and Viète». *Boll. Storia Sci. Mat.*, 12 (2) (1992), 303–328.

[13] Hérigone, P. *Cursus Mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus. Per notas reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, faciles/ Cours Mathematique demonstré d'une nouvelle briefve et Claire methode. Par notes reelles & universelles, qui peuvent estre entendues sans l'usage d'aucune langue*. 5 v. (1634, 1637) i suplement (1642). [Autor i Henry Le Gras, París]

[14] Knobloch, E. «Leibniz's rigorous foundation of infinitesimal geometry by means of Riemannian sums». *Synthese*, 133 (2002), 59–73.

[15] Mahoney, M. S. *The mathematical career of Pierre de Fermat*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1973.

[16] Mahoney, M. S. «The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century». A: Gaukroger, S. (ed.). *Descartes' philosophy, mathematics and phisics*. Brighton: Totowa, Barnes and Noble: Harvester, 1980, 141–156.

[17] MANCOSU, P. *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. Nova York: The Clarendon Press: Oxford University Press, 1996.

[18] MASSA, M. R. «Mengoli on "quasi proportions"». *Historia Math.*, 24 (3) (1997), 257–280.

[19] MASSA-ESTEVE, M. R. *Estudis matemàtics de Pietro Mengoli (1625–1686): Taules triangulars i quasi proporcions com a desenvolupament de l'àlgebra de Viète*. Tesi doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, 1998, disponible a `http://hdl.handle.net/10803/3103`.

[20] MASSA-ESTEVE, M. R. «La théorie euclidienne des proportions dans les *Geometriæ Speciosae Elementa* (1659) de Pietro Mengoli». *Revue d'Histoire des Sciences*, 56 (2) (2003), 457–474.

[21] MASSA-ESTEVE, M. R. «Algebra and geometry in Pietro Mengoli (1625–1686)». *Historia Mathematica*, 33 (1) (2006), 82–112.

[22] MASSA-ESTEVE, M. R. *L'algebrització de les matemàtiques: Pietro Mengoli*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, 2006.

[23] MASSA-ESTEVE, M. R. «Symbolic language in early modern mathematics: The *Algebra* of Pierre Hérigone (1580–1643)». *Historia Mathematica*, 35 (4) (2008), 285–301.

[24] MASSA-ESTEVE, M. R. «The symbolic treatment of Euclid's *Elements* in Hérigone's *Cursus mathematicus* (1634, 1637, 1642)». A: HEEFFER, A.; M. VAN DYCK, M. (ed.). *Philosophical aspects of symbolic reasoning in early modern mathematics*. Londres: College Publications, 2010, 165–191. (Studies in Logic; 26)

[25] MASSA-ESTEVE, M. R. «The role of symbolic language in the transformation of mathematics». *Philosophica*, 87 (2012), 153–193.

[26] MASSA-ESTEVE, M. R.; DESHALMS, A. «Euler's beta integral in Pietro Mengoli's works». *Arch. Hist. Exact Sci.*, 63 (3) (2009), 325–356.

[27] MENGOLI, P. *Geometriae speciosae elementa*. Bolonya: 1659.

[28] MENGOLI, P. *Circolo*. Bolonya: 1672.

[29] NATUCCI, A. «Mengoli». A: GILLISPIE, C. C. (ed.). *Dictionary of scientific biography*. Vol. 9. Nova York: Scribner's, 1981, 303–304.

[30] PASCAL, B. *Œuvres complètes*. París: Gallimard, 1954.

[31] TORRICELLI, E. *Opere*. 3 v. LORIA, G. ET AL. (ed.). Faenza: 1919.

[32] VIÈTE, F. *The analytic art*. Nine studies in algebra, geometry and trigonometry from the *Opus restitutae mathematicae analyseos, seu Algebrâ Novâ*. Traducció del llatí i introducció de T. Richard Witmer. Kent, Ohio: Kent State University Press, 1983.

CENTRE DE RECERCA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA