

Una anàlisi matemàtica del moviment d'una pilota de futbol durant el vol

TIMOTHY G. MYERS I SARAH L. MITCHELL

Resum: En aquest article es presenta un estudi analític i numèric de les equacions tridimensionals que descriuen el moviment d'una pilota que gira a l'aire. L'anàlisi inicial considera coeficients de fregament constants i després s'estén al cas d'un fregament que depèn de la velocitat de rotació de la pilota. S'observa una coincidència excel·lent entre els resultats numèrics, els analítics i els experimentals. La solució analítica ens mostra de manera explícita com el moviment de la pilota depèn de paràmetres com la rugositat, la velocitat i les condicions atmosfèriques. Es demostra la importància d'aplicar models tridimensionals en comptes d'aproximacions bidimensionals.

Paraules clau: aerodinàmica, trajectòria d'una pilota de futbol, pilota de futbol girant, força de Magnus, solució de pertorbació.

Classificació MSC2010: 34L30, 76G25.

1 Introducció

Al llarg dels anys s'ha avançat molt en relació amb el disseny de les pilotes de futbol, des de la tradicional pilota de cuir que envoltava una bufeta de porc inflada a la més recent Jabulani, que es construeix fent servir panells de poliuretà. L'objectiu dels avenços tecnològics en el disseny de les pilotes de futbol ha estat fer la pilota més fiable i millor per al joc, en benefici de tots els jugadors. Recentment, en un grup d'estudi de matemàtiques a la indústria en una reunió celebrada a Johannesburg, l'entrenador d'un equip de primera divisió sud-africà, el Bidvest Wits, va plantejar la pregunta de si una pilota de futbol es pot escollir de manera que beneficiï l'equip local (o, alternativament, desafavoreixi l'equip visitant). Aquest article ha sortit d'aquest estudi i a les conclusions es discuteix la pregunta de si es pot triar una pilota que, efectivament, doni un avantatge a l'equip local.

En els partits de futbol professional a Sud-àfrica, i a molts altres països, l'equip local és el que proporciona la pilota que es farà servir durant el partit. L'elecció de la pilota està limitada, principalment, per la llei 2 de la FIFA, que

Aquest treball fou el guanyador del premi Albert Dou de l'any 2014 i va aparèixer en anglès amb el títol «A mathematical analysis of the motion of an in-flight soccer ball» a *Sports Engineering*, 16 (2013), 29–41. Agraïm a Springer Science+Business Media el permís per a la seva publicació. La traducció al català és deguda a Helena Ribera.

en dicta la mida, el pes (en sec), la pressió i el material. Per aquest motiu els principals canvis en el disseny de la pilota s'han produït en el material i en la forma dels panells [13]. Una altra limitació ve donada pel patrocinador, ja que l'equip ha d'usar una de les seves pilotes. En el cas del Bidvest Wits les pilotes són proporcionades per Nike. Durant la reunió a Johannesburg es van presentar tres pilotes Nike, d'aspecte molt similar, però hi havia una diferència important: dues de les pilotes eren rugoses (amb panells amb clots) mentre que la tercera tenia els panells llisos (vegeu, per exemple, fotos de prop de la Nike T90 Tracer and Catalyst a la web Nike.com).

Per respondre a la pregunta sobre l'elecció de la pilota l'anàlisi que presentem a continuació se centrarà en el seu moviment a través de l'aire i, en particular, des d'una falta o un córner. Un dels motius de triar aquests casos és que són situacions relativament controlades i hi ha molta informació en el moviment de la pilota a través de l'aire. Un altre motiu és que els xuts de falta són un factor important a l'hora de marcar: a la Copa del Món del 1998, 42 dels 171 gols marcats van venir de jugades assajades i un 50% eren xuts de falta [2]. En conseqüència, entendre el moviment de la pilota des d'un xut de falta o d'un córner podria aportar informació important a l'hora d'escollir la pilota. L'últim motiu és que Johannesburg està situada a un nivell sobre el mar molt alt (més o menys a 1800 m). La densitat de l'aire és aproximadament un 20% més baixa que al nivell del mar [10] així que cal esperar que la diferència més gran en el moviment de la pilota entre Johannesburg i ciutats situades a una altitud més baixa sigui quan aquest moviment es produeix a l'aire.

Per descomptat que hi ha hagut molts treballs sobre el moviment de les pilotes i els projectils a l'aire. A partir de 1600 Newton va observar que una pilota de tennis amb efecte tenia una trajectòria corbada. Un segle més tard Robin va mostrar que en una esfera giratòria hi havia una força aerodinàmica transversal: això és el que ara s'anomena *l'efecte Magnus* (o de manera més justa *l'efecte Robin-Magnus*). Cap a finals dels 1800, Tait va ser el primer a aplicar aquest concepte a una pilota relacionada amb l'esport (desafortunadament una pilota de golf en lloc d'una pilota de futbol). Tots aquests treballs eren sobre fluids sense fricció així que per l'explicació correcta de l'efecte Magnus es va haver d'esperar fins a la teoria de la capa límit de Prandtl el 1904. L'anàlisi específica del moviment d'una pilota de futbol durant el vol va arribar molt més tard. Asai *et al.* [1] van dur a terme un estudi experimental dels coeficients de sustentació en una pilota de futbol amb efecte i sense efecte i van mostrar una forta dependència del coeficient de sustentació respecte de la velocitat de rotació. Les equacions de moviment d'una pilota de futbol es poden trobar en molts treballs però en el nostre estudi farem servir la convenció de Goff i Carré [7] en la qual l'efecte Magnus es divideix en una component d'ascensió i en una component lateral (Asai *et al.* també utilitzen dues components). Hörzer *et al.* [10] proporcionen detalls útils de les diferències en les condicions atmosfèriques entre diverses seus de la Copa del Món a Sud-àfrica i demostren l'efecte de l'altitud en la trajectòria. Oggiano i Sætran [11] comparen la trajectòria de pilotes de futbol diferents: això confirma la creença que l'elecció de la pilota pot constituir un avantatge per a l'equip de casa.

Aquest article s'organitza de la manera següent. A la secció 2 es dona el model matemàtic tridimensional, que és ben conegut i que es basa essencialment en la segona llei de Newton. A causa de la no-linearitat de les equacions del moviment totes les solucions publicades amb anterioritat s'han obtingut numèricament. En una anàlisi d'un model més simple que el considerat en l'estudi present, Bray i Kerwin [2] afirmen que les equacions que regeixen el moviment no tenen solució en forma tancada, i encara que això és tècnicament correcte, a la secció 3 es dedueix una solució aproximada exacta. D'aquesta manera es mostra clarament l'efecte dels paràmetres del model en el moviment de la pilota, la qual cosa no és possible amb una solució numèrica. A la secció 4 es calculen solucions numèriques per verificar l'exactitud de la solució aproximada. Estudis experimentals sobre coeficients de fregament i d'elevació han demostrat la seva dependència de la rotació, però els estudis teòrics generalment deixen aquests coeficients com a constants. A la secció 5 s'estén l'anàlisi feta per tal de tractar el cas de coeficients variables. Finalment, es discuteix la qüestió de si l'elecció de la pilota realment pot donar un avantatge a l'equip de casa.

2 Model matemàtic

El moviment d'una pilota de futbol està descrit per la segona llei de Newton, $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$, on la força \mathbf{F} es compon de la gravetat i del fregament amb l'aire. Per a una pilota que no gira, el fregament només actua en el sentit oposat al moviment de la pilota. Per a una pilota que gira el fregament té dues components, la resistència en contra del moviment endavant i la força de Magnus. La força de Magnus actua en la direcció perpendicular a la direcció del moviment i a l'eix de rotació. Aquesta força es pot separar en dues components que denoten moviment d'elevació i moviment lateral; vegeu [1, 7]. Si la pilota es mou en la direcció definida per la velocitat del vector $\hat{\mathbf{v}}$ (on el barret indica el vector unitat), aleshores es pot definir un segon vector $\hat{\mathbf{l}}$, que és perpendicular a $\hat{\mathbf{v}}$ però que roman en el mateix pla que $\hat{\mathbf{v}}$ i el vector gravetat, $\hat{\mathbf{g}}$. Notem que la component z de $\hat{\mathbf{l}}$ és positiva (*i. e.* apunta amunt). Un sistema orientat positivament es defineix a través d'un tercer vector $\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{v}}$. El sistema de coordenades i els vectors es mostren a la figura 1. D'aquesta manera, la força de fregament que s'oposa al moviment, \mathbf{F}_d , actua en la direcció $-\hat{\mathbf{v}}$, l'aixecament \mathbf{F}_l actua en la direcció $\hat{\mathbf{l}}$ i la força lateral \mathbf{F}_s actua en la direcció $\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{v}}$. La força total es defineix com

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_s. \quad (1)$$

Per tal de separar les components del gir s'han de definir dues velocitats de rotació: ω_l és la velocitat al voltant de l'eix $\hat{\mathbf{l}}$ i ω_s és la velocitat al voltant de l'eix $\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{v}}$. Si només s'utilitza un eix de rotació (per exemple com es defineix a [10]), el qual està contingut en el pla $\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{v}}$, llavors l'eix fa un angle Ω amb l'eix $\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{v}}$, on $\tan \Omega = \omega_l / \omega_s$. Noteu que el problema plantejat aquí és més general que l'estudiat a [2], on l'eix de rotació està contingut solament en el pla x - z .

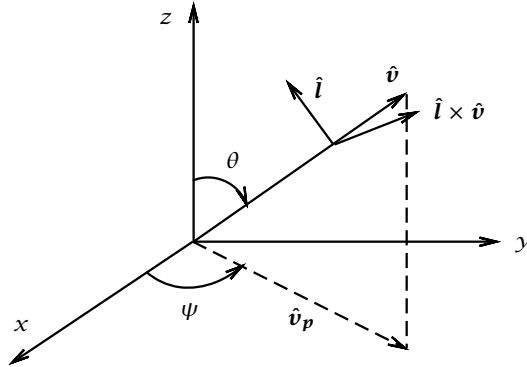


FIGURA 1: Sistema de coordenades.

Els signes de les forces depenen de quina convenció s'utilitzi. La força de fregament F_d és obvi que actua en direcció oposada al moviment de la pilota. Si es considera un gir lateral pur, aleshores l'eix z és l'eix de rotació. Utilitzant notació estàndard per a coordenades polars, com es mostra en la figura 1, amb ψ contingut en el pla x - y i mesurat des de l'eix x , i definint $\psi = \omega_s$, aleshores la força resultant F_s actua en la direcció negativa de x . Si només hi ha rotació endavant, llavors l'eix de rotació és x i aleshores $\dot{\theta} = \omega_l$ i la força resultant F_l actua en la direcció negativa de z . Per tant, són certes les relacions següents:

$$\mathbf{F}_d = -\frac{1}{2}\rho A |\mathbf{v}|^2 C_d \hat{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{F}_l = -\frac{1}{2}\rho A |\mathbf{v}|^2 C_l \hat{\mathbf{l}}, \quad \mathbf{F}_s = \frac{1}{2}\rho A |\mathbf{v}|^2 C_s \hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{v}}. \quad (2)$$

Aquí m és la massa de la pilota, A és la seva àrea transversal, ρ és la densitat de l'aire, C_i són els coeficients de fregament i

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}, \quad (3)$$

on $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ és el vector velocitat. El producte $\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{v}}$ actua en la direcció negativa de x , de manera que no hi ha signe negatiu en l'expressió de \mathbf{F}_s . Els coeficients de fregament C_i varien amb $Re = \rho |\mathbf{v}| D / \mu$ (on D és el diàmetre de la pilota i μ la viscositat de l'aire) i el paràmetre de rotació $Sp = D\omega / (2|\mathbf{v}|)$ [1, 5]. La variació de C_d respecte de Re mostra un canvi radical quan la pilota es mou a través de la transició laminar-turbulenta. Els resultats experimentals de la posttransició de [1] indiquen que C_d i C_l varien amb Sp però tenen poca variació respecte de Re ; vegeu també [7]. Noteu que, com que C_l i C_s apareixen a causa del mateix efecte, tenen el mateix comportament. Com que la força de Magnus es descompon en dues components hi ha dues velocitats angulars, ω_l i ω_s . Aleshores la variació de C_l i C_s respecte de Sp significa que prenen diferents valors si $\omega_l \neq \omega_s$. L'avantatge d'utilitzar dos coeficients de fregament és que els diferents eixos de rotació es poden diferenciar fàcilment. En particular, per al gir lateral pur és $\omega_l = C_l = 0$ i per al gir endavant pur és $\omega_s = C_s = 0$ (la relació entre ω i C es discutirà amb més detall més endavant).

Els vectors unitat es poden definir en termes dels dos angles ψ , θ amb les relacions següents:

$$\hat{\mathbf{v}} = \sin \theta \cos \psi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \psi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{l}} = -\cos \theta \cos \psi \mathbf{i} - \cos \theta \sin \psi \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k}, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{v}} = -\sin \psi \mathbf{i} + \cos \psi \mathbf{j}. \quad (6)$$

De manera alternativa els angles en termes de les components de la velocitat cartesiana es poden expressar com a

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{v}_p|}{|\mathbf{v}|}, \quad \cos \theta = \frac{\dot{z}}{|\mathbf{v}|}, \quad \sin \psi = \frac{\dot{y}}{|\mathbf{v}_p|}, \quad \cos \psi = \frac{\dot{x}}{|\mathbf{v}_p|}, \quad (7)$$

on $\mathbf{v}_p = (\dot{x}, \dot{y})$ és la projecció de \mathbf{v} sobre el pla x - y (vegeu figura 1).

L'equació del moviment es pot escriure ara en termes de les components

$$\ddot{x} = -k_d |\mathbf{v}| \dot{x} + k_l \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}_p|} \dot{x} \dot{z} + k_s \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}_p|} \dot{y}, \quad (8)$$

$$\ddot{y} = -k_d |\mathbf{v}| \dot{y} + k_l \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}_p|} \dot{y} \dot{z} - k_s \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}_p|} \dot{x}, \quad (9)$$

$$\ddot{z} = -g - k_d |\mathbf{v}| \dot{z} - k_l |\mathbf{v}| |\mathbf{v}_p|. \quad (10)$$

Els coeficients escalats del fregament són $k_i = \rho A C_i / (2m)$. Es tracta d'un conjunt d'equacions diferencials ordinàries no lineals de segon ordre sense solució analítica. Es poden resoldre fàcilment de forma numèrica i es pot fer algun avenç analític després de fer algunes suposicions raonables en relació amb el moviment de la pilota:

1. Els eixos es poden triar de manera que hom xuta la pilota principalment en una direcció (tot i que pel viratge òbviament es desviarà). Per tant, suposarem que la pilota és impulsada principalment en la direcció y .
2. El viratge dominant és en la direcció lateral, és a dir, la pilota es xuta sobretot amb efecte lateral.

La primera suposició es tradueix en el fet que la velocitat en la direcció y ha de ser significativament més gran que la velocitat en les direccions x i z , $\dot{y} \gg \dot{x}, \dot{z}$ i també que la pilota arriba més lluny en la direcció y . La segona hipòtesi és certa en general en el moviment d'una pilota de futbol, ja que normalment l'efecte lateral és més gran que l'efecte endavant; en canvi en una pilota de golf hom esperaria el contrari. L'anàlisi es pot adaptar fàcilment a l'efecte endavant però com que aquí ens centrem en pilotes de futbol, l'efecte dominant que suposarem és el lateral.

3 Solució de pertorbació

Per tal de progressar analíticament adimensionarem el sistema fent el canvi de variables

$$X = \frac{x}{L_1}, \quad Y = \frac{y}{L_2}, \quad Z = \frac{z}{L_3}, \quad T = \frac{t}{\tau}, \quad (11)$$

on L_2 és la distància en la direcció y a la porteria, $\tau = L_2/v$ és l'escala del temps que la pilota tarda a arribar a l'objectiu on v és la velocitat inicial de la pilota en la direcció y i $L_3 = g\tau^2$ és l'escala de distància vertical. Les lletres majúscules X, Y, T denoten les variables no dimensionals. L'escala de distància L_1 és, de moment, desconeguda però observem que a causa de la suposició 1, $L_1 \ll L_2$.

En primer lloc, considerem els vectors velocitat i els escrivim en termes de les quantitats adimensionals

$$|\mathbf{v}| = \frac{L_2}{\tau} \dot{Y} \sqrt{1 + \frac{L_1^2}{L_2^2} \frac{\dot{X}^2}{\dot{Y}^2} + \frac{L_3^2}{L_2^2} \frac{\dot{Z}^2}{\dot{Y}^2}} = \frac{L_2}{\tau} \dot{Y} r_1, \quad |\mathbf{v}_p| = \frac{L_2}{\tau} \dot{Y} \sqrt{1 + \frac{L_1^2}{L_2^2} \frac{\dot{X}^2}{\dot{Y}^2}} = \frac{L_2}{\tau} \dot{Y} r_2, \quad (12)$$

on r_1, r_2 denoten les arrels quadrades. Hem aïllat el factor $L_2 \dot{Y} / \tau$ ja que és el terme més gran en l'expressió de la velocitat i aleshores $r_1, r_2 = \mathcal{O}(1)$ (és a dir, la seva magnitud és de l'ordre de la unitat).

k_d	0.013		k_l	0.004	
k_s	0.0108		m	0.45	kg
ρ	1	kg m ⁻³	D	0.22	m
A	0.039	m ²	v	25	m/s
C_d	0.3		C_s	0.25	
C_l	0.1		L_2	20	m

TAULA 1: Valors típics dels paràmetres; vegeu [1, 4, 12].

Ara podem escriure les equacions que regeixen el moviment com a

$$\ddot{X} = -k_d L_2 \dot{X} \dot{Y} r_1 + k_l L_3 \frac{r_1}{r_2} \dot{X} \dot{Z} + k_s \frac{L_2^2 r_1^2}{L_1 r_2} \dot{Y}^2, \quad (13)$$

$$\ddot{Y} = -k_d L_2 \dot{Y}^2 r_1 + k_l L_3 \frac{r_1}{r_2} \dot{Y} \dot{Z} - k_s \frac{L_1 r_1^2}{r_2} \dot{X} \dot{Y}, \quad (14)$$

$$\ddot{Z} = -1 - k_d L_2 r_1 \dot{Y} \dot{Z} - k_l \frac{L_2^2}{L_3} r_1 r_2 \dot{Y}^2. \quad (15)$$

Per determinar L_1 observem que el moviment en la direcció x és produït ja sigui per una velocitat inicial ja sigui per la component de rotació en la direcció y . Com que l'estudi se centra en el viratge causat pel gir, la velocitat inicial en

la direcció x és zero, $\dot{x}(0) = \dot{X}(0) = 0$. El terme dominant a l'equació (13) és el terme que porta \dot{Y}^2 ja que els vectors velocitat estan escalats de manera que $r_1, r_2 = \mathcal{O}(1)$, $L_1 = k_s L_2^2$. Utilitzant els valors dels paràmetres de la taula 1 resulta que $L_1 \approx 4$ m, és a dir, hom espera que la pilota viatgi de l'ordre de 4 m lateralment durant el seu vol. El terme dominant en l'equació (14) és també el que porta \dot{Y}^2 . Tenim $k_d = 0.013$, $k_d L_2 = 0.26$ i això ho expressem amb $\varepsilon = k_d L_2$, que és un paràmetre petit (i $\varepsilon^2 \approx 0.07$). Els termes que porten l'arrel quadrada r_1, r_2 contenen les ràtios $L_1^2/L_2^2 \approx 0.04$, $L_3^2/L_2^2 \approx 0.25$, que denotem per $c_1 \varepsilon^2$ i $c_2 \varepsilon$, respectivament (noteu que $k_s L_1 = L_1^2/L_2^2$). Finalment, $k_l L_3 \approx 0.03 = c_3 \varepsilon^2$ i $k_l L_2^2/L_3 \approx 0.27 = c_4 \varepsilon$.

Ara les equacions són

$$\ddot{X} = -\dot{Y} r_1 \left[\varepsilon \dot{X} - c_3 \varepsilon^2 \frac{\dot{X} \dot{Z}}{r_2 \dot{Y}} - \frac{r_1}{r_2} \dot{Y} \right], \quad (16)$$

$$\ddot{Y} = -\dot{Y} r_1 \left[\varepsilon \dot{Y} - c_3 \varepsilon^2 \frac{\dot{Z}}{r_2} + c_1 \varepsilon^2 \frac{r_1}{r_2} \dot{X} \right], \quad (17)$$

$$\ddot{Z} = -1 - \dot{Y} r_1 [\varepsilon \dot{Z} + c_4 \varepsilon r_2 \dot{Y}], \quad (18)$$

on

$$r_1 = \sqrt{1 + c_1 \varepsilon^2 \frac{\dot{X}^2}{\dot{Y}^2} + c_2 \varepsilon \frac{\dot{Z}^2}{\dot{Y}^2}}, \quad r_2 = \sqrt{1 + c_1 \varepsilon^2 \frac{\dot{X}^2}{\dot{Y}^2}}. \quad (19)$$

Notem que la hipòtesi que hom xuta la pilota sobretot amb efecte lateral vol dir que els termes k_l apareixen a les equacions de \ddot{X} , \ddot{Y} amb un ordre més baix que els termes k_s (a través del coeficient c_3). En l'equació de \ddot{Z} l'enlairament és la força dominant després de la gravetat, per tant hi apareix amb un ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Quan la rotació endavant domina, l'escalat s'ha de canviar de manera convenient.

Un cop escrites les equacions en forma adimensional podem fer algunes observacions sobre el comportament de la solució, sense resoldre el sistema. Per exemple, tots els termes de (17) tenen el paràmetre petit ε , que indica que el moviment dominant en la direcció Y està descrit per l'equació $\ddot{Y} = 0$ i que el fregament, representat per ε , té un efecte relativament petit. Com que $\varepsilon = 0.26$, obviar els termes amb ε podria portar a un error del voltant del 26%. El moviment en la direcció Z està dominat per la gravetat. El moviment en la direcció X està dominat per la contribució de \dot{Y} (reflectint el fet que la força de Magnus és deguda a la diferència entre la velocitat equatorial i la velocitat endavant, que és aproximadament \dot{Y}). Tot i això, el més interessant és que, com que r_1 conté el terme $\varepsilon (\dot{Z}/\dot{Y})^2$, la velocitat en la direcció Z contribueix a totes les equacions. És més, afecta l'equació de X en un ordre ε , *i. e.* per als paràmetres que usem ara, no tenir en compte el moviment en la direcció Z pot portar a errors del voltant del 26%. Òbviament això pot tenir conseqüències significatives per a qualsevol experiment on s'utilitzi una anàlisi dos dimensional per modelar el moviment tridimensional de la pilota. Aquest fet es discuteix amb més detall a la secció 4, de resultats.

Les condicions inicials són que el moviment de la pilota comença a l'origen i surt amb una velocitat (dimensional) $(0, v, w)$. Noteu que la velocitat en la direcció x sempre es pot suposar nul·la, simplement definint l'eix y com la direcció del xut en el pla x - y . En forma adimensional aquestes condicions són $X(0) = Y(0) = Z(0) = 0$, $\dot{X}(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = 1$, $\dot{Z}(0) = W$, on $W = w\tau/L_3$.

Per tal de determinar una solució de pertorbació estàndard basada en el paràmetre petit ε escrivim

$$X = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots, \quad Y = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \dots, \quad Z = Z_0 + \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + \dots \quad (20)$$

La solució fins a l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ és

$$\begin{aligned} X = & \frac{T^2}{2} + \varepsilon \left[\frac{c_2 W^2 T^2}{2} - (3 + 2c_2 W) \frac{T^3}{6} + \frac{c_2 T^4}{12} \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left[\left(-\frac{9}{2} c_2 W^2 + 3c_3 W - 2c_2 c_4 W \right) \frac{T^3}{6} + \right. \\ & \left. + \left(6c_2 W + \frac{11}{2} - 2c_3 - \frac{c_1}{2} + 2c_2 c_4 \right) \frac{T^4}{12} - \frac{13c_2 T^5}{120} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

$$Y = T - \varepsilon \frac{T^2}{2} + \varepsilon^2 \left[-(c_2 W^2 - 2c_3 W) \frac{T^2}{4} + (2 - c_1 + c_2 W - c_3) \frac{T^3}{6} - \frac{c_2 T^4}{24} \right], \quad (22)$$

$$\begin{aligned} Z = & WT - \frac{T^2}{2} + \varepsilon \left[-(W + c_4) \frac{T^2}{2} + \frac{T^3}{6} \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left[-c_2 W^2 (W + c_4) \frac{T^2}{4} + (4W + 6c_4 + 3c_2 W^2 + 2c_2 c_4 W) \frac{T^3}{12} - \right. \\ & \left. - (3 + 3c_2 W + c_2 c_4) \frac{T^4}{24} + \frac{c_2 T^5}{40} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Bray i Kerwin [3] estudien un sistema simplificat dos dimensional. L'anàlisi que fan es basa a igualar l'acceleració al terme més gran dels membres de la dreta de les equacions. A partir de les equacions (16) i (17) això redueix el problema a

$$\ddot{X} = \dot{Y}^2, \quad \ddot{Y} = -\varepsilon \dot{Y}^2, \quad (24)$$

on cal remarcar que $r_1 \approx r_2 \approx 1$. Aplicant les condicions inicials resulta

$$Y = \frac{1}{\varepsilon} \ln |1 + \varepsilon T|, \quad X = -\frac{1}{\varepsilon} (Y - T). \quad (25)$$

Per relacionar aquestes solucions amb les de les equacions (21) i (22) utilitzem el desenvolupament de Taylor per a $\varepsilon \ll 1$ i trobem

$$X = \frac{T^2}{2} - \varepsilon \frac{T^3}{3} + \varepsilon^2 \frac{T^4}{4}, \quad (26)$$

$$Y = T - \varepsilon \frac{T^2}{2} + \varepsilon^2 \frac{T^3}{3}. \quad (27)$$

Si fixem $W = c_i = 0$ a (21) i (22), per tal d'eliminar la dependència en Z i fer que la solució sigui bidimensional, llavors les solucions de x difereixen en l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$, mentre que les solucions de y difereixen en l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. La simplificació de tenir en compte només els termes més grans dels membres de la dreta de les equacions permet posar de manifest correctament el comportament dominant, però en el cas del viratge lateral pot portar a errors en tots els termes posteriors. Per tant, aquesta forma de solució donarà una aproximació raonable en el resultat numèric per a y però una de molt més pobre per a x i l'error augmenta amb ε (per exemple, si incrementem el valor de L_2). Encara ens desviem més de la solució correcta pel fet de no tenir en compte el terme del moviment en Z . Discutirem això més endavant en el context de les solucions mostrades a la secció 4.

Tornem ara a les variables dimensionals $X = x/L_1$, $Y = y/L_2$, $Z = z/L_3$, $T = t/\tau$, on $L_1 = k_s L_2^2$, $L_3 = g\tau^2$, $\tau = L_2/v$ i L_2 , v són la distància i la velocitat inicials en la direcció y . Les constants s'han d'expressar en termes dels paràmetres dimensionals

$$\varepsilon = k_d L_2, \quad c_1 = \frac{k_s^2}{k_d^2}, \quad c_2 = \frac{g^2 L_2}{k_d v^4}, \quad c_3 = \frac{k_l g}{v k_d^2 L_2}, \quad c_4 = \frac{k_l v^2}{g k_d L_2}, \quad W = \frac{w v}{g L_2}. \quad (28)$$

La solució dimensional és

$$x = \frac{k_s (vt)^2}{2} \left[1 - \left\{ k_d vt - \frac{g^2 t^2 - 4gwt + 6w^2}{6v^2} \right\} \right], \quad (29)$$

$$y = vt \left[1 - \left\{ \frac{k_d vt}{2} \right\} \right], \quad (30)$$

$$z = wt - \frac{gt^2}{2} + \left\{ \frac{k_a g vt^3}{6} - (k_d w + k_l v) \frac{vt^2}{2} \right\}. \quad (31)$$

Noteu que, atès que les expressions són més aviat complicades, només les escrivim fins a l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (els termes $\mathcal{O}(\varepsilon)$ estan entre claus). En aquestes expressions podem veure clarament l'efecte que té cada paràmetre. L'equació per a y ens mostra que la distància recorreguda és aproximadament proporcional a la velocitat inicial i al temps, però que el fregament la redueix i que l'acció del fregament augmenta amb el temps. En la direcció z la distància recorreguda ve determinada principalment per la velocitat inicial i la gravetat, però l'acció tant del fregament com de l'aixecament tendeixen a canviar-ho. Altre cop, aquestes conseqüències augmenten amb el temps. De totes maneres, com que el viratge degut a l'efecte lateral és l'objecte principal d'aquest estudi, l'equació per a x és la més rellevant. En aquesta equació veiem que, fins a l'ordre principal, la distància recorreguda en la direcció x és proporcional al coeficient de fregament lateral k_s i també a $(vt)^2$. El disseny de la pilota i les condicions atmosfèriques contribueixen a través de k_s i, per tant, el disseny de la pilota és molt important pel que fa al viratge. El producte vt és la primera aproximació

a la distància recorreguda en la direcció y . La dependència quadràtica indica la importància de xutar lluny de la porteria. Com més viatgi la pilota, més virarà (això és ben conegut entre els especialistes de xuts lliures que sempre intenten moure la pilota lluny de la porteria). Potser l'exemple més famós és la falta llençada per Roberto Carlos contra França el 1997, que va produir una corba espectacular al final del vol de la pilota. Aquest xut es va fer aproximadament a 35 m de la porteria; vegeu-lo a YouTube o [6]. El fregament frontal k_d intervé al primer ordre i actua reduint el viratge. Una característica important de la solució és que el moviment vertical, a través de g i de w , també intervé al primer ordre. La forma quadràtica $g^2 t^2 - 4gwt + 6w^2$ és positiva sempre que $w \geq 0$ (i.e. la pilota no es xuta contra terra) i també actua per a incrementar el viratge. Una anàlisi bidimensional no podrà captar aquest efecte i la comparació amb les dades experimentals portarà a una sobrepredicció de k_s .

A causa de les diferències pel que fa a la dependència respecte del temps dels termes de les equacions (29)–(31), aquests termes seran menys precisos a mesura que el temps augmenti. Aquest fenomen és l'anomenat *efecte secular*. El collapse es produirà quan els termes d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ passin a ser d'ordre $\mathcal{O}(1)$. En el cas de l'equació per a x això passa quan $t \sim 1/(k_d v) \approx 3$ s. Les equacions per a y i z indiquen temps d'uns 9 s. Ja que el vol d'una pilota de futbol és típicament d'un segon, aquestes aproximacions serveixen per a xuts raonables i no cal considerar l'efecte secular.

4 Resultats numèrics i analítics

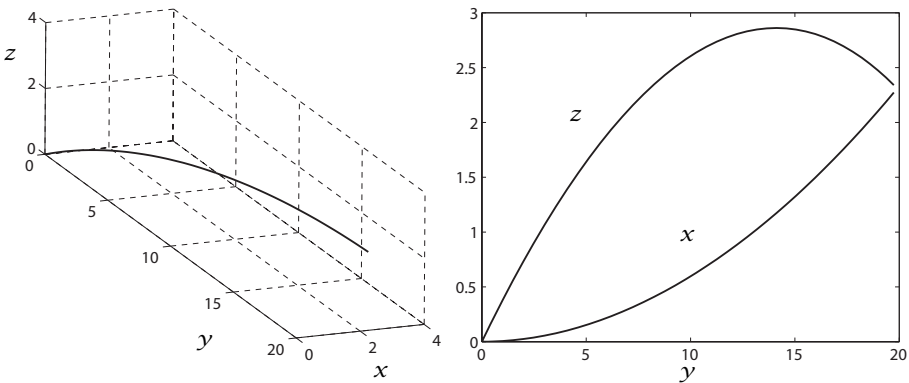


FIGURA 2: (a) a l'esquerra, solució numèrica que mostra una trajectòria dimensional d'una pilota de futbol que ha estat xutada a l'angle de la porteria; (b) a la dreta, representacions de x i z en funció de y .

La solució numèrica de les equacions (16)–(18) s'ha calculat utilitzant la rutina ODE45 de MATLAB. A la figura 2(a) es mostra una trajectòria tridimensional d'una pilota xutada amb condicions inicials $v = 25$ m/s, $w = 8.76$ m/s, i a una

distància de $L_2 = 20$ m de l'objectiu. L'elecció de w es va fer de manera que la pilota acabés a prop del travesser de la porteria (com que seguim el centre de massa de la pilota, l'alçada de la porteria es pren de 2.34 m, és a dir, l'alçada estàndard d'una porteria menys el radi de la pilota). Els altres paràmetres es poden trobar a la taula 1. Per recórrer 20 m en la direcció y es tarden 0.9112 s (sense fregament, $t = 20/25 = 0.8$ s). La figura 2(b) mostra la variació de x i z en funció de y . De la corba de x es pot deduir que la pilota viatja uns 2.3 m, amb una variació aproximadament quadràtica. En la direcció z l'altura de la pilota augmenta fins que és a prop de la porteria, i aconsegueix un màxim de 0.4 m per sobre de la porteria. Per mostrar la trajectòria d'una manera clara, la figura 2 utilitza quantitats dimensionals. Quan sigui possible, en les figures següents, preferirem utilitzar quantitats adimensionals ja que fan més clares les diferències en el moviment. També permeten combinar resultats, com a la figura 2, on les solucions de x i de y estan dibuixades a la mateixa gràfica.

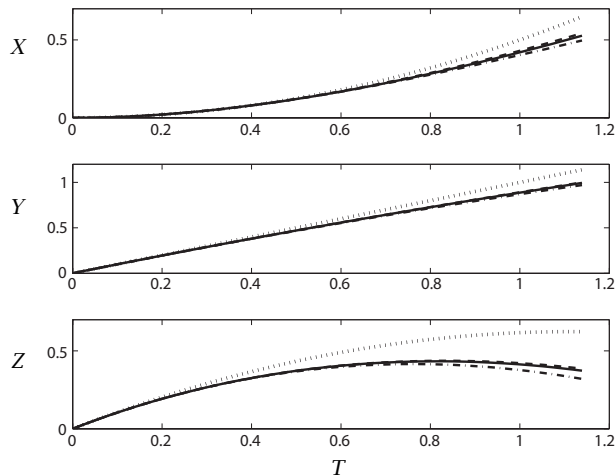


FIGURA 3: Trajectòries adimensionals de X , Y i Z en funció de T : solució numèrica completa (línia contínua), solució $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ (línia de punts), solució $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (línia de punts i ratlles) i solució $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ (línia discontinua). Els valors dels paràmetres són $C_d = 0.3$, $C_s = 0.25$ i $C_l = 0.1$.

A la figura 3 mostrem la variació de X , Y i Z en funció de T , per a les mateixes condicions que a la figura 2, però en aquest cas s'inclouen les diverses solucions de pertorbació. En unitats adimensionals el temps de vol és $T = 0.9112 \times 25/20 \approx 1.14$. La línia contínua correspon a la solució numèrica, la línia de punts correspon a la pertorbació d'ordre principal, la línia de punts i ratlles correspon al primer ordre i la línia discontinua correspon al segon ordre. En cada cas l'ordre principal dona una aproximació raonable per a temps petits però perd exactitud ràpidament. Per descriure el vol sencer, la solució de pertorbació per a Y és prou exacta fins al primer ordre, però per a les solucions de X i Z és menys exacta. Totes les corbes mostren una coincidència excel·lent a l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Com que la solució de segon ordre implica obviar

termes d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^3) \approx 0.02$, es poden produir errors de l'ordre del 2%. De fet, l'error augmenta amb el temps i és clar que val zero per a $T = 0$ a causa de la imposició de la condició inicial. En la direcció X el màxim error entre la solució numèrica i la de segon ordre és de quasi el 3% i això passa al final del vol. Aquest fet està d'acord amb la discussió prèvia segons la qual les solucions aproximades comencen a col·lapsar-se a mesura que el temps avança. Noteu que la mateixa conclusió serveix per al problema dimensional.

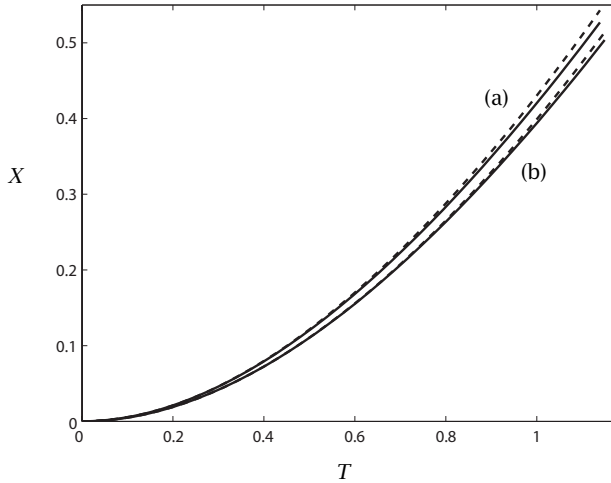


FIGURA 4: Comparació de la solució numèrica (línia contínua) i la solució de pertorbació de segon ordre (línia discontinua) per a X : (a) amb moviment vertical; (b) negligint el moviment vertical.

A la secció anterior s'ha discutit el problema aparent de negligir el moviment vertical i, en particular, s'ha vist que aquest problema seria més evident en el moviment en la direcció X . Recuperem ara un model bidimensional, amb moviment només en el pla X - Y , a través de la solució obtinguda posant $c_2 = c_3 = W = 0$ a les equacions (21) i (22). A la figura 4 es compara la solució numèrica (línia contínua) i la solució de pertorbació (línia discontinua) per a X fins al segon ordre. Les dues corbes etiquetades amb (a) inclouen el moviment en la direcció Z i les etiquetades amb (b) ignoren aquest moviment en Z . Si obviem el moviment en Z el viratge decreix entorn d'un 4.5%. Aquest error s'incrementa de manera no lineal a mesura que w augmenta: si doblem w l'error augmenta en un 30%. Aquesta observació té conseqüències òbvies en la interpretació dels estudis experimentals. Per exemple, si comparem el model dos-dimensional de [3] amb els experiments realitzats i l'utilitzem per calcular coeficients de fregament, aleshores per compensar el fet de negligir el moviment en la direcció Z el model predirà valors més grans que els reals. A [2] se simplifica el model matemàtic suposant que l'eix de rotació roman en el pla X - Z i per tant el terme \dot{Z} de l'equació (16) es pot negligir, tot i que es manté en l'equació de Y . Aquesta aproximació sembla inconsistent i també afectarà la predicció dels coeficients de fregament. És important aleshores implementar un model completament tridimensional quan vulguem calcular paràmetres experimentals.

Un estudi bidimensional és possible però, atès que no podem evitar la gravetat, aquest hauria d'estar confinat en el pla $Y-Z$ i utilitzar només el gir endavant.

4.1 Comparació amb dades experimentals

A l'article de Carré *et al.* [4] es presenten un seguit de resultats per al moviment d'una pilota amb efecte o sense efecte. Les figures 4a, 4b i 4c de [4] mostren una trajectòria típica per a una pilota xutada sense efecte *amb un angle inicial d'uns 15° respecte de terra* i amb una velocitat de xut en el ventall de 17-31 m/s. Extreure informació d'aquestes figures és un problema senzill d'ajust de corbes (en aquest cas es va utilitzar la funció polyfit del MATLAB, que ajusta les dades fent servir el criteri dels mínims quadrats). Un ajust quadràtic a les dades $y(t)$ de les trajectòries de la figura 4b de [4] dóna

$$y \approx a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \tag{32}$$

amb $a_0 = -0.1785$, $a_1 = 17.591$, $a_2 = -1.237$. Un ajust cúbic a les dades $z(t)$ de la figura 4c de [4] dóna

$$z \approx b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3, \tag{33}$$

amb $b_0 = 0.0253$, $b_1 = 6.287$, $b_2 = -6.294$, $b_3 = 0.201$. Els punts de dades es mostren a la figura 5 amb asteriscs. Finalment, la figura 4a de [4] indica que $z(y)$ és de la forma

$$z \approx c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3, \tag{34}$$

amb $c_0 = 0.008$, $c_1 = 0.371$, $c_2 = -0.023$, $c_3 = 0.0001$.

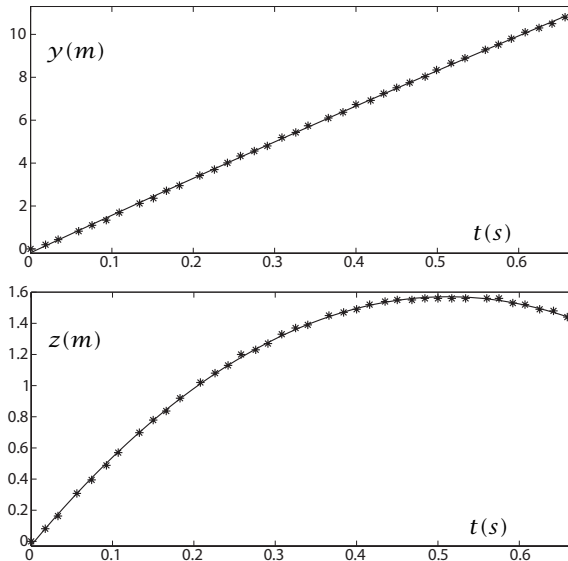


FIGURA 5: Comparació de les dades experimentals de [4] (asteriscs) i les corbes d'ajust (línies contínues).

A partir d'aquestes relacions és un problema senzill determinar uns quants dels paràmetres del vol de la pilota. Per exemple, l'angle inicial de xut, θ , el podem determinar observant que

$$\tan \theta = \frac{\dot{z}(0)}{\dot{y}(0)} = \frac{b_1}{a_1} \approx \frac{6.287}{17.591} \approx 0.357. \quad (35)$$

De manera alternativa $\tan \theta = dz/dy|_{y=0} = c_1 \approx 0.371$. Aquests dos resultats ens diuen que l'angle inicial del xut és $\theta \approx 19.65$ o 20.35 , amb una mitjana aproximada de 20° (una mica més alta que la citada en l'article). La velocitat inicial en les direccions y , z és $(\dot{y}(0), \dot{z}(0)) = (a_1, b_1) = (17.591, 6.287)$ i d'aquesta manera la velocitat inicial $|v| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \approx 18.68$ m/s, que forma part del rang esmentat.

La comparació entre els ajusts de les corbes (32) i (33) i les solucions de pertorbació de (30) i (31) ens permet obtenir informació addicional sobre el xut. En primer lloc, podem observar que tant y com z haurien de començar a l'origen, que és el cas per a la solució de pertorbació, però l'ajust de les corbes indica un petit error. Tot i això, els termes rellevants b_0 , c_0 són petits. Els valors de (v, w) s'obtenen prenent $(\dot{y}(0), \dot{z}(0))$ a les equacions (30) i (31) i, òbviament, $(v, w) = (a_1, b_1)$. El coeficient de fregament k_d es pot obtenir comparant els termes quadràtics a les expressions de y

$$-\frac{k_d v^2}{2} = a_2 \quad \Rightarrow \quad k_d = 0.008 \quad (36)$$

que té un ordre de magnitud similar al citat a la taula 1. Les expressions de z ens donen l'eina per comprovar aquest valor; comparant els termes cúbics s'obté

$$\frac{k_d g v}{6} = b_3 \quad \Rightarrow \quad k_d = 0.007, \quad (37)$$

que, permetent errors experimentals i errors en l'ajust de corbes, està d'acord amb la primera estimació. A [4] s'afirma que aquesta trajectòria és típica dels casos sense efecte, i, per tant, $k_l = 0$. Hi ha una tercera manera de determinar k_d : comparant termes quadràtics en les expressions de z . Això ens porta a un valor de $k_d \approx 0.025$, un resultat que no coincideix amb els trobats anteriorment. De totes maneres, deixant $k_l \neq 0$, els termes quadràtics es poden utilitzar per determinar $k_l = 0.0061$ quan $k_d = 0.008$, i $k_l = 0.0065$ quan $k_d = 0.007$.

A la figura 5, part superior, es comparen les dades experimentals amb la funció quadràtica de l'equació (32) per als valors citats de a_i . Això és equivalent a dibuixar la solució aproximada (30) amb $v = 17.591$ m/s, $k_d = 0.008$. Clarament la coincidència és molt bona. A la figura 5, part inferior, es comparen les dades experimentals amb la funció cúbica donada per l'equació (33) per als valors citats de b_i . Això és equivalent a representar la solució (31) amb $w = 6.287$ m/s i $k_d = 0.007$. Una altra vegada, la concordança és excel·lent.

En resum, les funcions suggerides per les solucions de pertorbació poden donar una concordança excel·lent amb les dades experimentals. Comparar els

coeficients de la corba ajustada amb les solucions de pertorbació ens permet calcular els coeficients de fregament (i també es pot utilitzar per determinar les velocitats inicials si són desconegudes). Com a exemple, s'han fet servir les dades donades a [4] per determinar els paràmetres del vol de la pilota, que indiquen un angle inicial d'uns 20° (en contra dels mencionats 15°), un coeficient de fregament $k_d \in [0.007, 0.008]$ i un coeficient d'alçament $k_l \in [0.0061, 0.0065]$. És particularment interessant el fet de l'aparició d'un coeficient d'enlairament diferent de zero en el cas d'un experiment aparentment sense efecte. Atès que les equacions ens donen tres maneres de calcular k_d en absència de rotació i que dos d'aquests camins s'assemblen força, sembla que el problema no es troba en les equacions. En conseqüència podem deduir que les gràfiques han estat mal presentades (de fet, només es donen com una solució «típica»), o bé que s'ha generat una petita rotació durant el vol, potser a causa de la posició inicial de la costura o de la vàlvula.

5 Coeficients de fregament

Fins ara l'anàlisi ha tractat amb coeficients de fregament constants. Tanmateix, els estudis experimentals han mostrat que C_d , C_l i C_s varien amb el coeficient de rotació $Sp = R\omega/|\mathbf{v}|$ i, d'alguna manera (si la fluctuació de l'aire és turbulenta), amb el número de Reynolds. Durant el vol d'una pilota la velocitat angular disminueix a poc a poc [10]. Això es pot observar en els resultats experimentals de [9] i llavors la velocitat angular es pot prendre com a constant, però la magnitud de $|\mathbf{v}|$ disminueix pel fregament i, per tant, Sp augmenta.

Existeix un gran nombre d'estudis experimentals que mostren la variació de C_s (o de C_l) amb Sp ; vegeu, per exemple, [1, 5, 9, 11]. Goff i Carré [7] resumeixen els resultats experimentals de Asai *et al.* [1] i Carré *et al.* [5]. Observen que, com que C_l i C_s sorgeixen del mateix procés, són equivalents (alguns autors no separen el coeficient d'enlairament en components i prefereixen treballar amb un de sol definit en un eix apropiat de rotació; vegeu, per exemple, [10]). Els resultats experimentals indiquen que C_s i C_l augmenten amb la rotació fins a establir-se al voltant de $Sp = 0.3$. Els valors reals varien amb els experiments i, com es mostra a [11], amb diferents tipus de pilota, però típicament varien entre 0 i 0.35 quan Sp augmenta de 0 a 0.3 [1, 4, 9, 12]. Com que en aquest estudi ens centrem en l'efecte del gir, en els càlculs despreciam la regió on Sp és molt petit (per sota de 0.1) i utilitzem una aproximació a trossos de la forma

$$C_s = \begin{cases} C_{s0} \left(1 + \frac{m_s}{C_{s0}} (Sp - Sp_0)\right), & 0.1 < Sp < 0.3, \\ C_{sm} \left(1 + \frac{m_s}{C_{s0}} (0.3 - Sp_0)\right) = C_{sm}, & Sp > 0.3, \end{cases} \quad (38)$$

on el gradient $m_s = 0.8$, $C_{s0} = 0.25$ és el coeficient quan $Sp = Sp_0 = 0.15/0.8$ i $C_{sm} = 0.34$ és el valor constant màxim de C_s . El coeficient de fregament $k_s = k_{s0}$ s'escriu com a

$$k_{s0} = \frac{\rho AC_{s0}}{2m}.$$

La forma lineal, sense el truncament, també havia estat utilitzada per Hörzer *et al.* [10]. El coeficient de fregament C_d mostra una dependència menor respecte de Sp i, per tant, com a primer intent per modelar els coeficients variables permetem que C_s variï mentre que deixem constant C_d .

A causa de l'equivalència de C_s amb C_l , només estudiem l'efecte de variar una d'aquestes quantitats. Això és encertat, ja que, com hem comentat a la secció anterior, l'anàlisi hauria de ser tridimensional (llevat que la limitéssim al pla y - z i imposéssim només gir endavant). Si permetem que tant C_s com C_l variïn, aleshores la pertorbació serà extremament complicada de tractar. En comptes d'això, estudiem el cas de gir lateral pur, fixant $C_l = k_l = 0$ mentre C_s ve donat per l'equació (38). El model adimensional es redueix aleshores a

$$\ddot{X} = -\dot{Y}r_1 \left[k_d L_2 \dot{X} - k_{s0} \phi_s \frac{L_2^2 r_1}{L_1 r_2} \dot{Y} \right], \quad (39)$$

$$\ddot{Y} = -\dot{Y}r_1 \left[k_d L_2 \dot{Y} + k_{s0} \phi_s \frac{L_1 r_1}{r_2} \dot{X} \right], \quad (40)$$

$$\ddot{Z} = -1 - k_d L_2 r_1 \dot{Y} \dot{Z}, \quad (41)$$

on

$$\phi_s = \begin{cases} 1 + \frac{m_s}{C_{s0}} (Sp - Sp_0), & 0.1 < Sp < 0.3, \\ \frac{C_{sm}}{C_{s0}}, & Sp > 0.3, \end{cases} \quad (42)$$

i

$$Sp = \frac{D\omega}{2|\mathbf{v}|} = \frac{D\omega}{2r_1 v \dot{Y}}. \quad (43)$$

Definim

$$\phi_s = \frac{\phi_1}{r_1 \dot{Y}} + \phi_2, \quad \phi_1 = \frac{m_s R \omega}{C_{s0} v}, \quad \phi_2 = 1 - \frac{m_s Sp_0}{C_{s0}}. \quad (44)$$

Per recuperar el cas de gir constant les condicions fixades són $\phi_1 = 0$ i $\phi_2 = 1$. Mantenint les definicions anteriors per als paràmetres petits (però amb k_s substituït per k_{s0}), les equacions es poden escriure com a

$$\ddot{X} = -\dot{Y}r_1 \left[\varepsilon \dot{X} - \left(\frac{\phi_1}{r_1 \dot{Y}} + \phi_2 \right) \frac{r_1}{r_2} \dot{Y} \right], \quad (45)$$

$$\ddot{Y} = -\dot{Y}r_1 \left[\varepsilon \dot{Y} + c_1 \varepsilon^2 \left(\frac{\phi_1}{r_1 \dot{Y}} + \phi_2 \right) \frac{r_1}{r_2} \dot{X} \right], \quad (46)$$

$$\ddot{Z} = -1 - \varepsilon r_1 \dot{Y} \dot{Z}. \quad (47)$$

El gir variable és representat pel terme que inclou ϕ_1 el qual apareix amb l'ordre dominant a l'equació de \ddot{X} . Així doncs, hom espera que el gir variable tingui un efecte significatiu en el moviment en X . Tot i això, ϕ_1 i X només apareixen a les equacions de \ddot{Y} i \ddot{Z} amb el segon ordre i, per tant, hom espera que el gir variable tingui poc efecte en el moviment en Y , Z .

Utilitzant una pertorbació estàndard, fins a l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ les solucions són

$$X = (\phi_1 + \phi_2) \frac{T^2}{2} + \varepsilon \left[\frac{c_2 W^2 (\phi_1 + 2\phi_2) T^2}{4} - \right. \tag{48}$$

$$\left. - (\phi_1 (2 + c_2 W) + \phi_2 (3 + 2c_2 W)) \frac{T^3}{6} + \frac{c_2 (\phi_1 + 2\phi_2) T^4}{24} \right],$$

$$Y = T - \varepsilon \frac{T^2}{2}, \quad Z = WT - \frac{T^2}{2} + \varepsilon \left[-\frac{WT^2}{2} + \frac{T^3}{6} \right]. \tag{49}$$

Observant que $k_l = 0$ resulta que $c_3 = c_4 = 0$ i aleshores les solucions de Y i de Z anteriors corresponen a les equacions (21)-(23) fins a l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$, mentre que la solució de X difereix de l'equació (21) en l'ordre dominant.

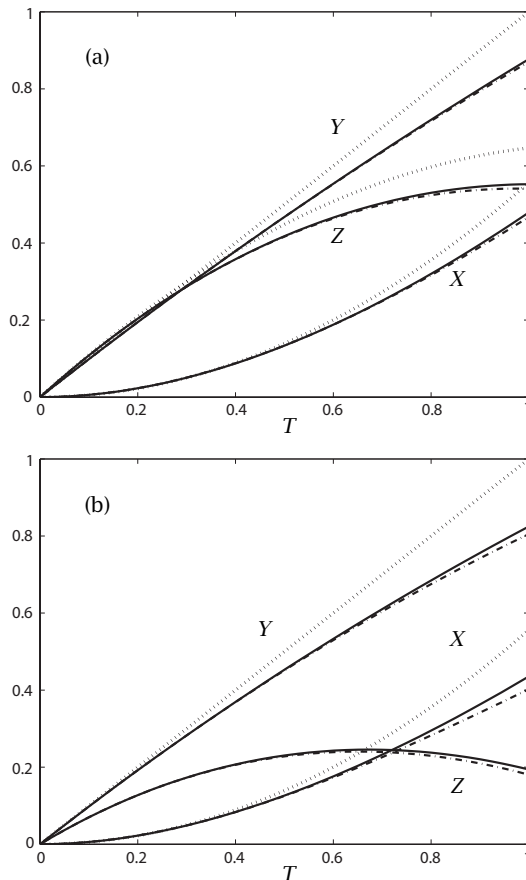


FIGURA 6: Trajectòries adimensionals de X , Y i Z en funció de T per a C_s variable (amb $\omega = 50$): solució numèrica completa (línia contínua), solució $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ (línia de punts) i solució $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (línia de punts i ratlles): (a) $L_2 = 20$; (b) $L_2 = 30$ m.

La figura 6 mostra una comparació entre les solucions numèriques i de pertorbació del model incloent-t'hi el gir variable. La figura 6(a) té les mateixes condicions inicials que s'havien fet servir a la figura 3, però ara amb C_s variant d'acord amb l'equació (38) i $\omega = 50$ rad/s. La línia contínua és la solució numèrica i les línies discontinües indiquen diversos nivells de la solució de pertorbació. La corba X mostra que al final de la trajectòria la pilota s'ha mogut una mica menys de 0.6 unitats adimensionals, que correspon a una distància dimensional de $0.6k_{s0}L_2^2 \approx 2.59$ m. Com que el viratge dimensional és proporcional a L_2 , a la figura 6(b) es representa el mateix xut però ara a una distància de 30 m. El canvi de L_2 prové d'un augment de $\varepsilon = k_d L_2$ i així s'espera que la solució de pertorbació perdi precisió. Això és clar observant la figura, tot i que la solució $\mathcal{O}(\varepsilon)$ és relativament precisa (podríem augmentar aquesta precisió trobant el terme $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$). El viratge dimensional al final del recorregut ara és d'uns 4.86 m. Aquest valor és quasi el doble del corresponent a un xut des de 20 m i prové de la dependència aproximadament quadràtica respecte de la distància.

A la figura 7(a) hi ha dibuixades quatre corbes corresponents a $\omega = 30, 40, 50, 60$ rad/s i $L_2 = 30$ m (amb la resta de condicions com a la figura 3). Tal com s'esperava, augmentar ω fa augmentar el moviment lateral de manera que $X(1)$ varia de 0.298 a 0.44 quan ω augmenta de 30 a 60 (i dimensionalment de 2.9 m a 4.3 m). Obviant el fregament variable, l'equació (29) indica que l'increment hauria de ser aproximadament lineal $x \propto k_s$. Incloure la variació del coeficient de fregament, amb truncament, fa que l'augment sigui no lineal. Per exemple, quan ω augmenta de 30 a 40, $X(1)$ augmenta en 0.052 (dimensionalment 0.5 m), però augmentant ω de 50 a 60, $X(1)$ augmenta només en 0.04 (dimensionalment 0.4 m). Un augment de ω superior no produirà gaire variació en el moviment. Ens pot ajudar a entendre això la figura 7(b) que mostra la variació de C_s al llarg de la trajectòria: amb $\omega = 30$ o 40 el valor de C_s sempre augmenta. Quan $\omega = 50$ el valor de C_s es torna constant cap al final del vol i per a $\omega = 60$ és constant durant la meitat del temps de vol. Per tant, qualsevol xut amb $\omega > 60$ donarà un resultat similar al de $\omega = 60$. Duent a terme aquest estudi va sorgir la pregunta de què és el que presenten exactament els diferents grups de recerca quan dibuixen les corbes $C_s - Sp$. En particular no queda prou clar com s'interpreta $Sp = R\omega/|\mathbf{v}|$. Els experiments de Asai *et al.* [1] i de Passmore *et al.* [12] consideren una pilota fixada en un túnel de vent en el qual ω i \mathbf{v} romanen constants, de manera que Sp pren un únic valor per a cada experiment. El fregament i la força lateral es mesuren directament, un fet que després permet calcular els coeficients de fregament a través de l'equació (2). Experiments més «realistes» consideren un xut real d'una pilota en un entorn controlat i després calculen els coeficients adaptant les dades a algun model matemàtic. Per exemple, Bray i Kerwin [2] monitoritzen el vol d'una pilota amb dues càmeres. Les equacions del model es resolen i s'iteren, utilitzant coeficients de fregament com a paràmetres variables fins que es troba una bona correspondència amb les dades experimentals.

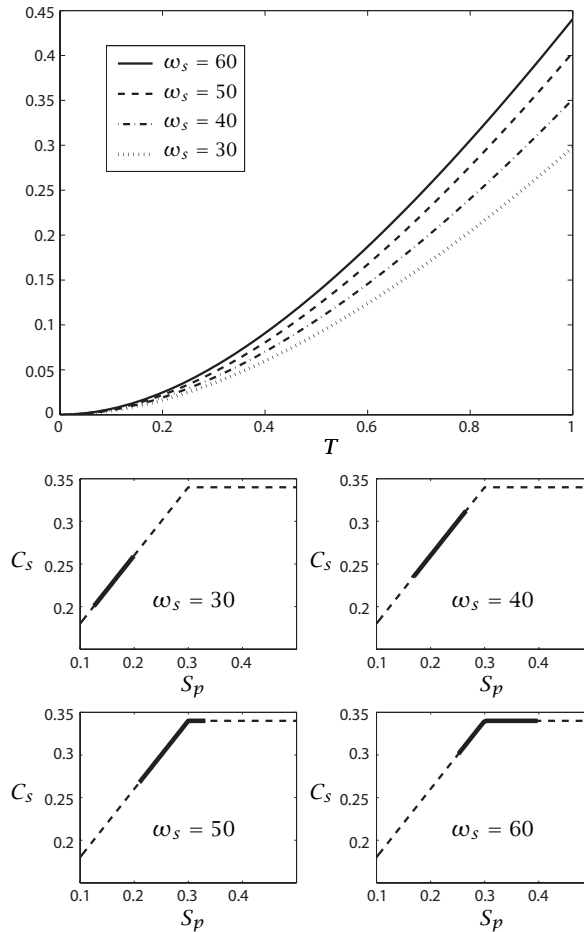


FIGURA 7: (a) a la part superior, trajectòries adimensionals de x en funció de t per a C_s variable; (b) a la part inferior, gràfiques corresponents a C_s en funció S_p , la línia discontinua representa l'equació (38), la línia contínua gruixuda és la variació de C_s al llarg de la trajectòria.

Amb aquest mètode es determinen valors constants per al fregament frontal i lateral per a un xut donat. De totes maneres, com que aquests valors provenen d'ajustar la trajectòria sencera, on S_p és una funció creixent, els coeficients han de ser alguna mena de mitjana per al xut específic. Carré *et al.* [4] fan servir una tècnica semblant on els coeficients de fregament són mitjanes, però les gràfiques es fan a partir del valor inicial de S_p (d'aquesta manera s'evita la confusió en la variació de S_p). Goff i Carré [7, 8] escullen coeficients de fregament per tal de minimitzar l'error de mínims quadrats entre la solució numèrica i les dades dels experiments, però per reduir la variació de S_p limiten les dades als primers 0.07 s de vol. Griffiths *et al.* [9] utilitzen un sistema

precís de seguiment de la pilota però calculen els coeficients amb la fórmula de Wesson [14], que suposa el fregament constant. Per tant, les diferents dades que es donen mostren valors de C_s i $S\mu$ reals o bé poden ser valors mitjans sobre una trajectòria donada (amb diferents mètodes de fer la mitjana). La figura 8 presenta dos grups de corbes, les corbes de sota corresponen a C_s variable amb $L_2 = 30$ m. La línia discontinua representa la trajectòria fins a $t = 1.655$ s (per acabar a $y \approx 30$ m) i la línia contínua acaba a $t = 0.693$ s (al voltant de $y = 15$ m). Les corbes de la part superior utilitzen un valor constant de $C_s = 0.307$, que va ser escollit per fer coincidir el resultat de la variable C_s després de 1.655 s. La gràfica es presenta dimensionalment, ja que totes les modificacions d'escala depenen de la tria de C_s . Totes les altres condicions són les mateixes que en cas de $\omega = 50$ rad/s de la figura 7. La característica important és que per a temps diferents de 1.655 s la corba constant de C_s té una quantitat de viratge diferent, fet que indica que si s'utilitza un valor mitjà per a C_s , aleshores el seu valor variarà amb la distància del punt de xut (a la figura els xuts de 15 m mostren una diferència de 10 cm en el viratge). Això és, si totes les altres condicions estan fixades, ajustant un valor constant de C_s a les dades experimentals, llavors obtindrem un rang de valors de C_s per a xuts fets a distàncies diferents.

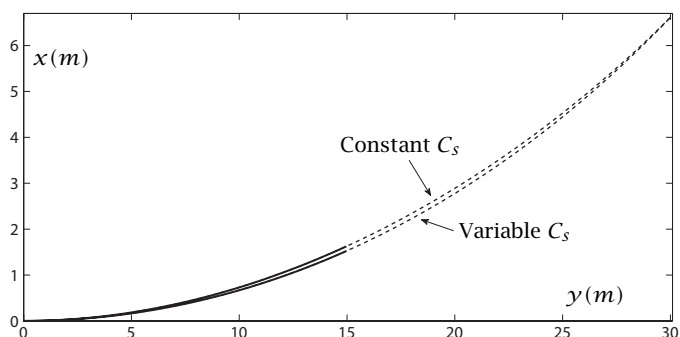


FIGURA 8: Comparació de trajectòries per a C_s variable i per a C_s constant.

6 Discussió

En aquest treball hem estudiat les equacions tridimensionals per al moviment d'una pilota de futbol durant el vol. La solució numèrica és trivial però aquesta no mostra la dependència del problema respecte dels paràmetres. Per aquest motiu, s'ha desenvolupat una solució de pertorbació que ha resultat molt precisa quan es compara amb la solució numèrica. En l'obtenció d'aquesta solució el canvi d'escala s'ha basat en la hipòtesi que els jugadors de futbol donen més efecte lateral que per sobre (o per sota) a la pilota. Això es podria canviar fàcilment si estudiéssim, per exemple, el moviment d'una pilota de golf, on l'efecte per sobre o per sota és el dominant. L'anàlisi realitzada ha permès fer un seguit d'observacions sobre el moviment de la pilota.

Les aproximacions analítiques mostren que a l'ordre principal el moviment lateral és proporcional al coeficient de fregament lateral k_s i a la distància $(vt)^2$. Això explica el motiu pel qual els xuts de falta fets de més lluny tenen més viratge. Fins al primer ordre en el paràmetre petit, el moviment en cada direcció està descrit per una equació de grau 4 com a màxim en el temps. Els estudis experimentals sovint aproximen les dades amb un polinomi. Per exemple, Carré *et al.* [4] mostren una concordança excel·lent amb les dades experimentals suposant que la x varia quadràticament amb t . Això està d'acord amb el resultat referent a l'ordre principal d'aquest estudi, $x \approx k_s(vt)^2/2$, i permetrà copsar correctament el comportament dominant i la solució per a temps petit. Bray i Kerwin [2] suposen una dependència quàrtica per a x , y , z : com que una quàrtica conté més coeficients, hom pot ajustar les dades experimentals amb més precisió. Aquesta funció està en concordança amb l'expressió de primer ordre. Per aquesta raó els resultats que presentem aquí no es van comparar inicialment amb dades experimentals: molts estudis han mostrat que les dades poden ser ben aproximades per funcions quadràtiques o quàrtiques. Com que els resultats prenen aquesta forma, es pot obtenir una bona concordança simplement escollint els coeficients adequats (i així deduint els valors dels coeficients de fregament). De totes maneres, pel suggeriment d'un revisor, hem comparat els resultats amb els de [4]. Així s'ha vist que hi ha la concordança esperada i s'han pogut determinar d'una manera senzilla els paràmetres del vol. De fet, això mostra d'alguna manera que les equacions poden ser considerades indulgents en el sentit que un model poc precís pot donar encara una bona concordança amb dades experimentals. Negligint termes, per exemple, estudiant només el moviment bidimensional, portarà a la mateixa forma de solució que el sistema tridimensional, però els coeficients polinomials seran diferents. Com a conseqüència, un estudi numèric d'un conjunt d'equacions lleugerament incorrecte serà capaç de donar una bona concordança amb les dades experimentals, però els coeficients de fregament calculats amb aquesta solució seran diferents del seu valor real. Per il·lustrar aquest fet, combinem les equacions (29) i (30) per tal de determinar una expressió de x com a funció de y , precisa fins a l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$,

$$x = \frac{k_s y^2}{2} \left[1 + \left\{ \frac{w^2}{v^2} - \frac{2gw y}{3v^3} + \frac{g^2 y^2}{6v^4} \right\} \right], \quad (50)$$

on els termes $\mathcal{O}(\varepsilon)$ estan entre claus. A l'ordre principal, es pot observar el fet ben conegut que x varia, de manera aproximada, quadràticament amb y . A mesura que el temps avança, i d'aquesta manera y , el terme $\mathcal{O}(\varepsilon)$ creix en importància i fa que el vol es desviï de la forma quadràtica i aquesta desviació és descrita per una quàrtica. El coeficient correcte de y^2 en l'equació anterior és $k_s(1+w^2/v^2)/2$. Donat un polinomi que s'ajusti amb les dades experimentals i donats valors inicials de les velocitats v i w , és possible calcular k_s simplement comparant els coeficients polinòmics adequats. De totes maneres, si el model matemàtic negligeix el moviment en z (fixant $w = 0$ a (50)), aleshores la predicció de k_s estarà afectada per un factor $1 + w^2/v^2$ respecte del seu valor real.

Aleshores òbviament s'ha d'anar amb compte a l'hora de triar el model per tal d'obtenir els coeficients de fregament a partir de dades experimentals tridimensionals. Si la pilota és llançada en un camp gravitacional (cosa més aviat difícil d'evitar) amb efecte lateral, aleshores s'hauran d'utilitzar les equacions tridimensionals al complet, ja que la velocitat vertical té un efecte important en el moviment lateral. L'excepció a aquesta norma és quan la pilota és llançada amb velocitat zero en la direcció x i només amb efecte per sobre (o per sota); aleshores un estudi bidimensional en el pla y - z serà suficient. Com que C_s apareix pel mateix efecte que C_l , només s'ha de determinar una d'aquestes dues quantitats i l'experiment dos-dimensional ens donarà tota la informació necessària.

En la secció final s'ha investigat l'efecte que té la variació de C_s (o C_l) a causa del gir durant el vol. Els estudis numèrics generalment suggereixen un valor constant, sovint escollit per donar el millor ajust a les dades. Els resultats en aquest estudi mostren que la variació de C_s provoca un canvi en relació amb les trajectòries predites. Tot i que és possible triar un valor constant mitjà, aquest valor variarà amb la llargada de la trajectòria. Com que el coeficient de fregament és una funció de la pilota i de les propietats de l'aire, i no de la llargada del vol, aquest resultat és físicament poc realista. Un problema que va sorgir en aquesta part de l'estudi va ser la interpretació del gir. Per determinar C_s en termes de $S\mathcal{P}$ es pot realitzar un experiment on la trajectòria de la pilota de futbol se segueix amb algun equip de captura de moviment. La comparació amb els resultats del model matemàtic porta a un valor de C_s per a un $S\mathcal{P}$ donat, per a cada experiment. De totes maneres, com que $S\mathcal{P}$, de fet, creix durant el vol no és clar què es vol dir amb el valor citat. Excepcions a aquesta norma són els experiments duts a terme amb una pilota immòbil en un túnel de vent, cas en què $S\mathcal{P}$ es pot mantenir constant; vegeu, per exemple, [1, 12].

El salt ben conegut en el coeficient de fregament, que pot produir una rotació en sentit contrari en altres esports, no s'ha considerat en aquest article ja que el moviment d'una pilota de futbol té lloc per a valors del número de Reynolds per sobre de la transició [10]. De totes maneres, val la pena fer notar que la transició té lloc per a valors de Re més alts com més llisa és la pilota. Com que la densitat de l'aire disminueix amb l'altitud (i per tant, també ho fa Re), això podria ser un factor important en el moviment d'una pilota llisa en estadis situats a molta altitud, com ara el de Johannesburg. De fet, durant la Copa del Món del 2010, en què es va fer servir la pilota Jabulani (una pilota llisa sense costures), hi va haver moltes crítiques sobre els vols aparentment erràtics de les pilotes. Per exemple, el seleccionador d'Anglaterra, Fabio Capello, va afirmar que la pilota es comportava d'una manera estranya a gran alçada sobre el nivell del mar; el davanter brasiler Fabiano va afirmar que canviava de manera imprevisible de direcció quan anava per l'aire; vegeu [15].

A continuació es discuteix si l'elecció de la pilota pot donar algun avantatge a un equip, i en particular si l'altura hi pot intervenir. De l'equació (29) es pot veure que el viratge en la direcció x és proporcional a $k_s = \rho AC_s / (2m)$. El valor de la densitat de l'aire ρ decreix amb l'altitud. En estadis a gran altitud, com el

de Johannesburg, a 1800 m, $\rho \approx 1.04 \text{ kg/m}^3$ és aproximadament un 20% més baixa que a nivell del mar, $\rho \approx 1.29 \text{ kg/m}^3$. Per tant, un equip acostumat a jugar a nivell del mar esperarà un 20% més de viratge. Per il·lustrar la diferència més clarament, a la figura 9 es mostren tres trajectòries per a xuts idèntics amb $\rho = 1.04, 1.19$ i 1.29 kg/m^3 (els dos últims valors són els adequats per a Madrid i Barcelona, respectivament). Els valors inicials són $v = 36 \text{ m/s}$ i $L_2 = 35 \text{ m}$, el coeficient de fregament és constant, $C_s = 0.34$, i les altres condicions són les mateixes que en les figures prèvies. Si la pilota es xuta inicialment a nivell del pal de la porteria, aleshores una velocitat en la direcció x de -15.16 m/s porta a un gol només a nivell del mar, quan $\rho = 1.29$ (utilitzem aquí la solució numèrica ja que \dot{x} no es va incloure en la solució de pertorbació i de passada aquest xut verifica la solució de pertorbació). El mateix xut fet a Madrid passaria de llarg de la porteria uns 1.3 m mentre que a Johannesburg fallaria per uns 3.3 m. Hörzer *et al.* [10] van predir un comportament similiar a les seves solucions numèriques.

L'avantatge de la solució analítica presentada en aquest article és que no només mostra explícitament l'efecte de la densitat de l'aire, sinó que també mostra la dependència respecte d'altres variables. Per exemple, com que el viratge és proporcional a ρAC_s , el canvi en el comportament de la pilota degut a l'altitud es pot obtenir canviant el coeficient de fregament. La trajectòria per a $\rho = 1.29$ a la figura 9 pot fer-se idèntica a la corba de $\rho = 1.04$ posant $C_s = 1.04 \times 0.34 / 1.29 \approx 0.274$. Això és un tema important actualment per als fabricants de pilotes de futbol (impulsat per la Copa del Món de Sud-àfrica del 2010) que volen fabricar pilotes que tinguin el mateix comportament a diferents altituds.

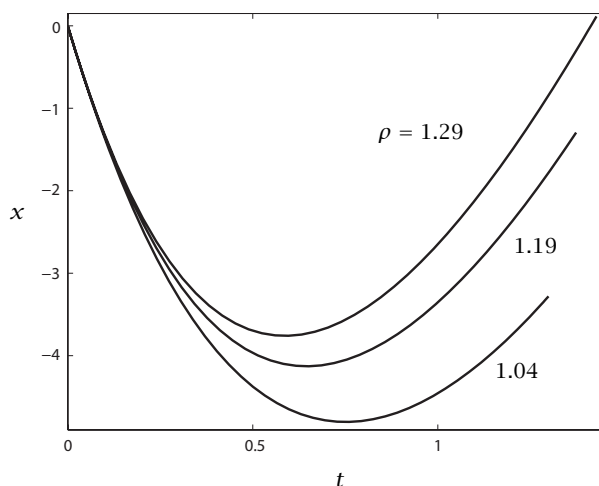


FIGURA 9: Diferències en trajectòries a diferents altituds.

Finalment, queda la pregunta de si aquesta anàlisi pot marcar diferència a la pràctica. La solució analítica mostra clarament els factors que afecten el

vol de la pilota. Posa de manifest que els equips que juguen a la costa estan acostumats a un viratge més gran que els equips que juguen a grans altituds, ja que la densitat de l'aire o la rugositat de la pilota redueixen el viratge. En conseqüència, després de la reunió que va tenir lloc a Johannesburg el gener del 2011 es va suggerir que el Bidvest Wits utilitzés una pilota llisa per als partits ja que d'aquesta manera s'aconseguiria el comportament més allunyat del que esperen els equips que normalment juguen en altituds més baixes. En canvi, en els entrenaments per a partits a fora haurien de fer servir una pilota rugosa. Els equips de costa haurien d'aplicar l'argument contrari i triar pilotes rugoses quan han de jugar amb equips d'altituds grans. És clar que no es poden predir tots els factors que afectaran la sort dels equips, però val la pena de notar que abans de la reunió de Johannesburg els Wits no havien guanyat en vuit partits consecutius. En el seu primer partit a casa després de la reunió, que van jugar amb un equip de costa, van guanyar per 6-0. Fins al final de la temporada 2011 van perdre només un partit a casa, que va ser un partit de Copa, on l'equip de casa no pot posar la pilota. Desafortunadament, no ho van fer tan bé en els partits fora de casa.

Agraïments

La recerca de T. G. Myers ha tingut el suport del projecte Industrial applications of moving boundary problems (Marie Curie International Reintegration Grant, núm. FP7-256417) i del Ministeri de Ciència i Innovació, ajut MTM2010-17162. S. L. Mitchell agraeix el suport del Mathematics Applications Consortium for Science and Industry (MACSI, www.macsi.ul.ie) finançat per la Science Foundation Ireland Mathematics Initiative, grant 06/MI/005.

Referències

- [1] ASAI, T.; SEO, K.; KOBAYASHI, O.; SAKASHITA, R. «Fundamental aerodynamics of the soccer ball». *Sports Engineering*, 10 (2007), 101-110.
- [2] BRAY, K.; KERWIN, D. «Modelling the flight of a soccer ball in a direct free kick». *Journal of Sports Sciences*, 21 (2) (2003), 75-85.
- [3] BRAY, K.; KERWIN, D. G. «Simplified flight equations for a spinning soccer ball». A: REILLY, T.; CABRI, J.; ARAÚJO, D. (ed.). *Science and Football V: The Proceedings of the Fifth World Congress on Science and Football*. Londres. Nova York: Routledge, 2005, 39-44.
- [4] CARRÉ, M. J.; ASAI, T.; AKATSUKA, T.; HAAKE, S. J. «The curve kick of a football II: flight through the air». *Sports Engineering*, 5 (2002), 193-200.
- [5] CARRÉ, M. J.; GOODWILL, S. R.; HAAKE, S. J. «Understanding the effect of seams on the aerodynamics of an association football». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 219 (2005), 657-666.

- [6] DUPEUX, G.; LE GOFF A.; QUÉRÉ, D.; CLANET C. «The spinning ball spiral». *New. J. Phys.*, 12 (2010), 093004.
- [7] GOFF, J. E.; CARRÉ, M. J. «Trajectory analysis of a soccer ball». *Am. J. Phys.*, 77 (11) (2009), 1020-2017.
- [8] GOFF, J. E.; CARRÉ, M. J. «Soccer ball lift coefficients via trajectory analysis». *Eur. J. Phys.*, 31 (2010), 775-784.
- [9] GRIFFITHS, I.; EVANS, C.; GRIFFITHS, N. «Tracking the flight of a spinning football in three dimensions». *Meas. Sci. Technol.*, 16 (10) (2005), 2056-2065.
- [10] HÖRZER, S.; FUCHS, C.; GASTINGER, R.; SABO, A.; MEHNEM, L.; MARTINEK, J.; REICHEL, M. «Simulation of spinning soccer ball trajectories influenced by altitude». 8th Conference of the International Sports Engineering Association (ISEA). *Procedia Engineering*, 2 (2) (2010), 2461-2466.
- [11] OGGIANO, L.; SÆTRAN, L. «Aerodynamics of modern soccer balls». *Procedia Engineering*, 2 (2) (2010), 2473-2479.
- [12] PASSMORE, M. A.; TUPLIN, S.; SPENCER, A.; JONES, R. «Experimental studies of the aerodynamics of spinning and stationary footballs». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 222 (2) (2008), 195-205.
- [13] RIGSBY, B. «The history of the soccer ball». Disponible a <http://www.soccerballworld.com/History.htm#Early>.
- [14] WESSON, J. *The science of soccer*. Bristol. Filadèlfia: IOP Publishing Ltd., 2002.
- [15] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. «Adidas Jabulani». Wikipedia, The Free Encyclopedia. Data de l'última revisió: 1 de gener de 2015. Disponible a http://en.wikipedia.org/wiki/Adidas_Jabulani.

TIMOTHY G. MYERS
CENTRE DE RECERCA MATEMÀTICA
CAMPUS DE BELLATERRA, EDIFICI C
08193 BELLATERRA
BARCELONA, ESPANYA
tmyers@crm.cat

SARAH L. MITCHELL
MACSI
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS
UNIVERSITY OF LIMERICK
LIMERICK, IRELAND
sarah.mitchell@ul.ie